الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
المدرسة العلياللعلوم التطبيقية - تلمسان
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées-Tlemcen

Module : Optimisation — Année 2022-2023

Série de TD 1

Exercice 1 *Résoudre le problème d'optimisation suivant avec la méthode graphique*

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_1^2 + x_2 + 4 \\ sc\ c_1(x) &= -x_1^2 - (x_2+4)^2 + 16 \geq 0 \\ c_2(x) &= -x_1 - x_2 - 6 \geq 0 \end{aligned}$$

1. *Indiquer la région admissible*
2. *Trouver l'optimum graphiquement. Est-il contraint ?*

Exercice 2 *Résoudre le problème d'optimisation suivant avec la méthode graphique*

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_2 - \frac{8}{x_1} \\ sc\ c_1(x) &= \frac{1}{5}x_1 - x_2 \geq 0 \\ c_2(x) &= 16 - (x_1-5)^2 - x_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. *Indiquer la région admissible*
2. *Trouver l'optimum graphiquement. Est-il contraint ?*

Exercice 3 *Résoudre le problème d'optimisation suivant avec la méthode graphique*

$$\begin{aligned} \min f(x) &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ sc\ a_1(x) &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ c_1(x) &= x_1 \geq 0 \\ c_2(x) &= x_2 \geq 0 \\ c_3(x) &= x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1. *Indiquer la région admissible*
2. *Trouver l'optimum graphiquement. Est-il contraint ?*

Exercice 4 *Résoudre le problème d'optimisation suivant avec la méthode graphique*

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (x_1-12)x_1 + (x_2-6)x_2 + 45 \\ sc\ c_1(x) &= \frac{7}{5}x_1 - x_2 - \frac{7}{5} \geq 0 \\ c_2(x) &= -x_2 - \frac{7}{5}x_1 + \frac{77}{5} \geq 0 \\ c_3(x) &= x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. *Indiquer la région admissible*
2. *Trouver l'optimum graphiquement. Est-il contraint ?*

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

المدرسة العليا للعلوم التطبيقية - تلمسان

Ecole Supérieure en Sciences Appliquées-Tlemcen

Module : Optimisation — Année 2022-2023

Série de TD 2

Exercice 1 *Soit la fontion objectif*

$$f(x) = 2x_1^3 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2 + 3$$

1. *Trouver une approximation linéaire de $f(x)$ au point $x+\delta$ si $x^T = [1\ 1]$.*
2. *Trouver une approximation quadratique de $f(x)$ au même point.*

Exercice 2 *Une fonction quadratique à n variables est donnée par*

$$f(x) = a + b^Tx + \frac{1}{2}x^TQx$$

où Q est une matrice symétrique $n \times n$, montrer que le gradient et le Hessien de $f(x)$ sont donnés par : $g = b + Qx$ et $H(x) = Q$ respectivement.

Exercice 3 *Le point $x_a^T = [2\ 4]$ est un minimiseur possible pour le problème*

$$\begin{aligned} \min f(x) &= \frac{1}{4}\left[x_1^2 + 4x_2^2 - 4(3x_1 + 8x_2) + 100\right] \\ sc\ c_1(x) &= x_1 = 2 \\ c_2(x) &= x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. *Trouver les directions admissibles*
2. *Vérifier si les conditions du second ordre sont vérifiées.*

Exercice 4 *Classifier les matrices suivantes (DP, SDP, DN, SDN, Ind).*

$$(a)\ H = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix},\ (b)\ H = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}\ et\ (c)\ H = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & -20 \end{bmatrix}$$

Exercice 5 *Trouver et classifier les points stationnaires de la fonction*

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - x_2x_3 + 4x_1 + 12$$

Exercice 6 *Montrer que la fonction*

$$f(x) = \left(x_2 - x_1^2\right)^2 + x_1^5$$

possède un seul point stationnaire qui n'est ni un maximum ni un minimum.

Exercice 7 *L'un des points* $x_a = [1\ -1]^T$, $x_b = [0\ 0]^T$ *et* $x_c = [1\ 1]^T$ *minimise la fonction*

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

À l'aide de tests appropriés, identifier le véritable minimiseur.

Exercice 8 *Etudier la convexité des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_4 + x_1x_4$
2. $f(x) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_4 + x_1x_4$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
المدرسة العليا للعلوم التطبيقية - تلمسان
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées-Tlemcen

Module : Optimisation — Année 2020-2021

Série de TD 3

Exercice 1 *Soit la fonction objectif suivante*

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$$

Sous MATLAB,

1. *Introduire la fonction $f(x,y)$ dans un fichier function nommé 'f'.*
2. *Sur un fichier script, calculer les dérivées partielles de f, en utilisant la commande* `diff`.
3. *Dans le même fichier, résoudre le système* $\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$ *en utilisant la commande* `solve` *et donner les points stationnaires.*
4. *Visualiser la fonction ainsi que les résultats, en utiLIsant les commandes* `meshc`, `surfc`, `contour`.
5. *Déterminer la nature des points stationnaires de la fonction f à partir de la question précédente.*

Exercice 2 *Le polynôme suivant*

$$f(x) = -5x^5 + 4x^4 - x^3 + 11x^2 - 2x + 1$$

est une fonction unimodale sur l'intervalle $I = [-0.5, 0.5]$.

1. *Utiliser la méthode de dichotomie pour trouver le minimum de $f(x)$ sur I avec une incertitude inférieure à 10^{-5}.*
2. *Résoudre la question (1) en utilisant la méthode de Fibonacci.*
3. *Résoudre la question (1) en utilisant la méthode de la section d'or.*
4. *Résoudre la question (1) en utilisant l'interpolation parabolique.*

Exercice 3 *Le polynôme suivant*

$$f(x) = [\ln(x-2)]^2 + [\ln(10-x)]^2 - x^{0.2}$$

est une fonction unimodale sur l'intervalle $I = [6, 9.9]$. Répéter les questions de l'exercice 2.

Exercice 4 *Le polynôme suivant*

$$f(x) = -3x\sin(0.75x) + e^{-2x}$$

est une fonction unimodale sur l'intervalle $I = [0, 2\pi]$. *Répéter les questions de l'exercice 2.*

Exercice 5 *Les valeurs d'une fonction* $f(x)$ *au points* $x = x_1$ *et* $x = x_2$ *sont* f_1 *et* f_2 *respectivement, et la dérivée de* $f(x)$ *au point* x_1 *est* f_1'. *Montrer que*

$$\bar{x} = x_1 + \frac{f_1'\,(x_2 - x_1)^2}{2\left[f_1 - f_2 + f_1'\,(x_2 - x_1)\right]}$$

est une estimée du minimiseur de $f(x)$.

Application. *Trouver sous* MATLAB *l'estimé du minimun de la fonction* $f(x) = e^x - x^3$ *sur l'intervalle* $[-1, 0]$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
المدرسة العليا للعلوم التطبيقية - تلمسان
Ecole Supérieure en Sciences Appliquées-Tlemcen

Module : Optimisation — Année 2020-2021

Série de TD 4

Exercice 1 *La méthode de plus forte pente est utilisée pour résoudre le problème*

$$\min f(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$$

et une séquence $\{x_k\}$ est générée.

1. *En supposant que*

$$x_{2k+1} = \left[0 \ \left(1 - \frac{1}{5^k}\right)\right]^T$$

Montrer que

$$x_{2k+3} = \left[0 \ \left(1 - \frac{1}{5^{k+1}}\right)\right]^T$$

2. *Trouver un minimiseur de $f(x)$ en utilisant les résultats de (1).*

Exercice 2 *Le problème*

$$\min f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 + 4x_2$$

est résolu en utilisant la méthode de la plus forte pente avec comme point initial $x_1 = (0\ 0)^T$.

1. *Par récurrence, montrer que*

$$x_{k+1} = \left[\frac{2}{3^k} - 2 \qquad \left(-\frac{1}{3}\right)^k - 1\right]^T$$

2. *Déduire le minimiseur de $f(x)$.*

Exercice 3 *Soit le problème*

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 0.2x_1x_2 - 2.2x_1 + 2.2x_2 + 2.2$$

1. *Trouver un point vérifiant les conditions nécessaires du premier ordre pour un minimiseur.*
2. *Quel est le taux de convergence de la méthode de plus forte pente pour ce problème ?*
3. *En partant du point $x_0 = [0\ 0]^T$, combien d'itérations de plus forte pente au plus sont elles nécessaires pour réduire la valeur de la fonction à 10^{-10}.*

Exercice 4 *Soit*

$$\min f(x) = 5x_1^2 - 9x_1x_2 + 4.075x_2^2 + x_1$$

1. *Résoudre ce problème en utilisant la méthode de la plus forte pente avec* $x_0 = [1\ 1]^T$ *et* $\epsilon = 3.10^{-6}$.
2. *Faire une analyse de convergence du problème pour expliquer pourquoi la méthode de la plus forte pente requiert ici un grand nombre d'itérations pour atteindre la solution.*

Exercice 5 *Résoudre le problème*

$$\min f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

en utilisant

1. *l'algorithme de la plus forte pente sans recherche linéaire avec hessien.*
2. *l'algorithme de la plus forte pente sans recherche linéaire sans hessien.*
3. *l'algorithme de la plus forte pente avec recherche linéaire et vérifier la solution en utilisant les conditions suffisantes de second ordre.*
4. *l'algorithme de Newton.*
5. *l'algorithme de Gauss-Newton.*
6. *la commande prédéfinie de* MATLAB `fminunc`

dans les cas suivants
$x_0 = [4\ 4]^T$, $x_0 = [4\ \ -4]^T$, $x_0 = [-4\ 4]^T$ *et* $x_0 = [-4\ \ -4]^T$ *avec* $\epsilon = 10^{-6}$.

Comparer les résultats obtenus.