Optimisation

Dr. Ibtissem DIDI

17 Mars 2020

Plan

Introduction

Selon la dimension de la fonction objectif à optimiser, il existe les méthodes **unidimensionnelles** et **multidimensionnelles** qui sont des méthodes déterministes. Les méthodes unidimensionnelles sont utilisées dans l'optimisation de fonctions à une seule variable. Deux grandes classes d'optimisation unidimensionnel existent : les méthodes de **Recherche Linéaire** (Line Search Methods) et les méthodes d'**approximation**, ces méthodes sont basées sur des techniques qui permettent de localiser le point minimal de la fonction à partir de réductions successives de l'intervalle de recherche. Parmi ces méthodes, citons la méthode de **Dichotomie**, la méthode de **Fibonacci**, la méthode de la **Section d'Or** et la méthode de **l'interpolation quadratique (parabolique)/cubique**.

Introduction

Un problème d'optimisation unidimensionnel est définit par

$$\min F = f(x)$$

où $f(x)$ est une fonction à une seule variable. Ce problème a une solution si $f(x)$ possède un seul minimum dans un intervalle considéré $x_L \leq x \leq x_U$, où x_L et x_U sont les limites inférieure et supérieure respectivement du minimiseur $\bar{x}$.
Dans les méthodes de Recherche Linéaire, $\bar{x}$ appartient à un intervalle $[x_L, x_U]$ appelé **intervalle d'incertitude**, le but est de réduire d'une manière itérative l'intervalle jusqu'à obtenir le plus petit intervalle $[x_{L,k}, x_{U,k}]$ qui contient $\bar{x}$.
Dans les méthodes approximatives, on fait une approximation de la fonction par un polynôme d'ordre 2 ou 3, en général, puis appliquer les méthodes classiques du calcul différentiel.

Fonctions unimodales

Définition

On dit qu'une fonction f est **unimodale** sur un intervalle réel $[A, B]$ si elle admet un minimum $\overline{\alpha} \in [A, B]$ et si $\forall \alpha_1 \in [A, B]$ et $\forall \alpha_2 \in [A, B]$ avec $\alpha_1 < \alpha_2$, on a :

1. $\alpha_2 \leq \overline{\alpha} \Longrightarrow f(\alpha_1) > f(\alpha_2)$
2. $\alpha_1 \geq \overline{\alpha} \Longrightarrow f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$

Une fonction unimodale sur $[A, B]$ a donc la propriété d'avoir un minimum locale unique, mais , elle n'est pas nécessairement dérivable, ni même continue.

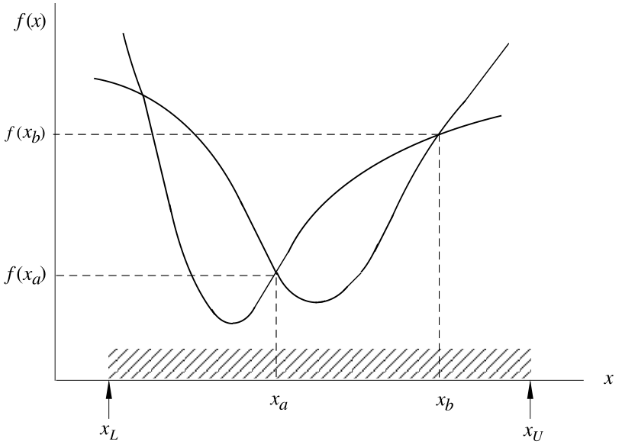
Objectif

Considérons une fonction uni-modale qui a pour minimum appartenant à l'intervalle $[x_L, x_U]$ qu'on doit le localiser. Supposons qu'on connaît la valeur de f en deux points $x_a, x_b \in [x_L, x_U]$. Ainsi, on aura 3 possibilités :

1. $f(x_a) < f(x_b)$
2. $f(x_a) > f(x_b)$
3. $f(x_a) = f(x_b)$

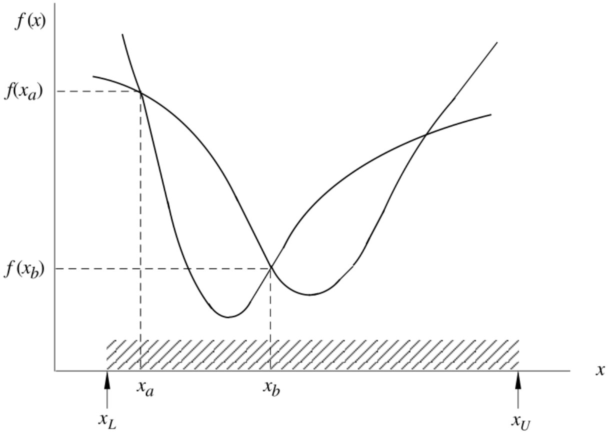
Objectif

Si on ai dans le premier cas ainsi, on aura soit $\bar{x} \in [x_L, x_a]$, soit $\bar{x} \in [x_a, x_b]$, donc il sera forcément dans $[x_L, x_b]$.



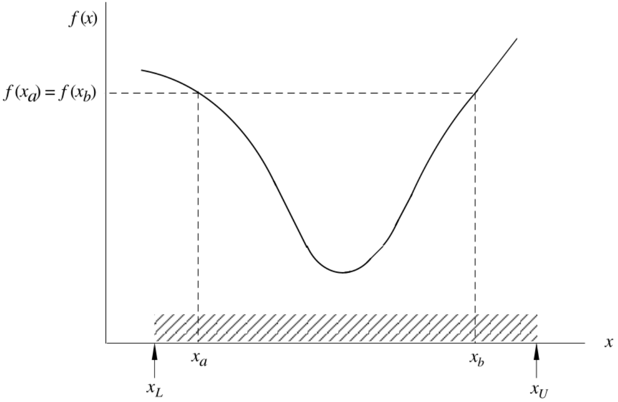
Objectif

Si on ai dans le second cas ainsi, on aura soit $\bar{x} \in [x_b, x_U]$, soit $\bar{x} \in [x_a, x_b]$, donc il sera forcément dans $[x_a, x_U]$.



Objectif

Si on ai dans le troisième cas ainsi, on aura $\bar{x} \in [x_a, x_b]$.



Algorithme de la méthode de dichotomie

1. **Donner** x_L, x_U et ϵ
2. **Initialiser** $k = 0$
3. **Calculer** $L = x_U - x_L$
   Répéter
   - $x_1 = \dfrac{x_L + x_U}{2}$
   - $\delta = 10^{-3} \times L$
   - $x_a = x_1 - \delta$
   - $x_b = x_1 + \delta$
   - $f(x_a)$ et $f(x_b)$
     - **Si** $f(x_a) < f(x_b)$ **alors** $x_U = x_b$
     - **Si** $f(x_a) > f(x_b)$ **alors** $x_L = x_a$
     - **Sinon** $x_L = x_a$ **et** $x_U = x_b$
   - **Calculer à nouveau** $L = x_U - x_L$
   - $k = k + 1$

   Tant que $L > \epsilon$
4. Donner $x_s = \dfrac{x_L + x_U}{2}$ et $f(x_s)$

Après k itérations, l'intervalle d'incertitude se réduit à

$$I_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k I_0$$

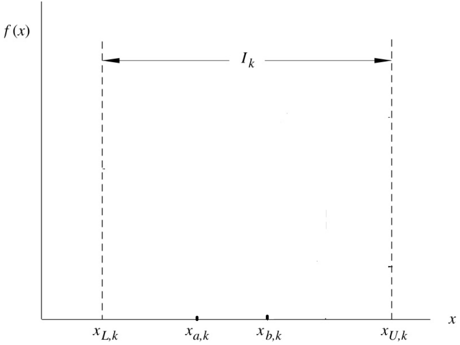
L'inconvénient de cette méthode est l'évaluation de la fonction f en deux points. Ainsi, la méthode de dichotomie n'est pas optimale, en ce sens que, pour un nombre fixé N de calcul de f, elle n'aboutit pas à l'intervalle réduit le plus petit possible. L'utilisation d'une suite de Fibonacci conduit à une méthode optimale.

Objectif

On considère un intervalle d'incertitude

$$I_k = [x_{L,k}, x_{U,k}]$$

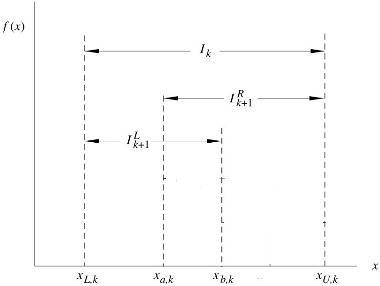
et soient $x_{a,k}$ et $x_{b,k}$ deux points de l'intervalle I_k.



Objectif

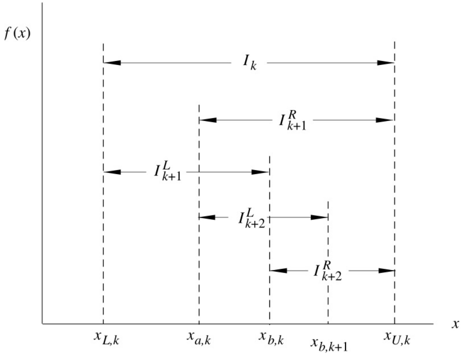
Les valeurs de f aux pts $x_{a,k}$ et $x_{b,k}$ sont $f(x_{a,k})$ et $f(x_{b,k})$.

- Si $f(x_{a,k}) < f(x_{b,k})$, on choisi l'intervalle à gauche $I_{k+1}^{L} = [x_{L,k}, x_{b,k}]$.
- Si $f(x_{a,k}) > f(x_{b,k})$, on choisi l'intervalle à droite $I_{k+1}^{R} = [x_{a,k}, x_{U,k}]$.
- Si $f(x_{a,k}) = f(x_{b,k})$, on a soit I_{k+1}^{L} soit I_{k+1}^{R}.



Objectif

Si le minimiseur appartient à l'intervalle I_{k+1}^R et que la valeur de $f(x)$ est connue en un point dans I_{k+1}^R noté $x_{b,k+1}$. Ceci est suffisant comme conditions pour pouvoir réduire l'intervalle I_{k+1}^R. Du coup, l'un des intervalles I_{k+2}^L et I_{k+2}^R va être choisi et ainsi de suite.



Objectif

D'après la figure précédente, on a

$$I_k = I_{k+1}^L + I_{k+2}^R$$

On suppose que

$$I_{k+1}^L = I_{k+1}^R = I_{k+1}$$
$$I_{k+2}^L = I_{k+2}^R = I_{k+2}$$

On obtient ainsi,

$$I_k = I_{k+1} + I_{k+2}$$

Si cette procédure est répéter plusieurs fois un ensemble d'intervalle va être généré comme suit :

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_2 = I_3 + I_4$$

$$\vdots$$

$$I_n = I_{n+1} + I_{n+2}$$

Objectif

Dans ce système de n équations il existe $n+2$ variables. Si I_1 l'intervalle de départ est donné et en imposant $I_{n+2}=0$, on a

$$I_{n+1} = I_n - I_{n+2} = I_n \equiv F_0 I_n$$

$$I_n = I_{n+1} + I_{n+2} = I_n \equiv F_1 I_n$$

$$I_{n-1} = I_n + I_{n+1} = 2I_n \equiv F_2 I_n$$

$$I_{n-2} = I_{n-1} + I_n = 3I_n \equiv F_3 I_n$$

$$I_{n-3} = I_{n-2} + I_{n-1} = 5I_n \equiv F_4 I_n$$

$$I_{n-4} = I_{n-3} + I_{n-2} = 8I_n \equiv F_5 I_n$$

$$\vdots$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = F_n I_n$$

Objectif

Une suite est générée et est appelée *suite de Fibonacci* définie par

$$\{F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, ...\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...\}$$

Ce qui donne une relation récursive de la forme

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{ pour } k \geq 2$$

où $F_0 = F_1 = 1$. Si le nombre d'itération est supposé être n, alors la recherche par Fibonacci réduit l'intervalle d'incertitude à

$$I_n = \frac{I_1}{F_n}$$

1. **Entrer** $x_{L,1}$, $x_{U,1}$ et n
2. **Calculer** F_1, F_2,..., F_n
3. $I_1 = x_{U,1} - x_{L,1}$ **et calculer** $I_2 = \frac{F_{n-1}}{F_n} I_1$

$$x_{a,1} = x_{U,1} - I_2 \ , \ x_{b,1} = x_{L,1} + I_2$$

$$f_{a,1} = f\left(x_{a,1}\right) \ , \ f_{b,1} = f\left(x_{b,1}\right)$$

et on pose $k = 1$

4. **Calculer** $I_{k+2} = \frac{F_{n-k+1}}{F_n - k} I_{k+1}$
   - **Si** $f_{a,k} \geq f_{b,k}$ **mettre à jour**

$$x_{L,k+1} = x_{a,k} \ , \ x_{U,k+1} = x_{U,k} \ , \ x_{a,k+1} = x_{b,k}$$

$$x_{b,k+1} = x_{L,k+1} + I_{k+2} \ , \ f_{a,k+1} = f_{b,k} \ , \ f_{b,k+1} = f\left(x_{b,k+1}\right)$$

- **Si $f_{a,k} < f_{b,k}$ mettre à jour**

$$x_{L,k+1} = x_{L,k} \ , x_{U,k+1} = x_{b,k} \ , x_{a,k+1} = x_{U,k+1} - I_{k+2}$$

$$x_{b,k+1} = x_{a,k} \ , f_{a,k+1} = f_{a,k} \ , f_{a,k+1} = f\left(x_{a,k+1}\right)$$

5. **Si $k = n-2$ ou $x_{a,k+1} > x_{b,k+1}$ donner $\bar{x} = x_{a,k+1}$ et $\bar{f} = f(\bar{x})$ puis sortir**
   Sinon $k = k+1$ puis aller à l'étape 4

Inconvénients
Le défaut de cette méthode est de fixer le nombre d'itérations à l'avance.
Si l'on connaît pas toujours a priori le nombre n de calculs que l'on désire effectuer, on peut utiliser la méthode du nombre d'or.

Objectif

Suivant le même principe que la méthode de Fibonacci, elle consiste a prendre les longueurs des intervalles successifs dans un rapport fixe :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_3} = \frac{I_3}{I_4} = \cdots = \gamma$$

de telle sorte qu'à l'étape $k+1$ la disposition relative des points soit la même que celle de l'étape k.

$$I_k = I_{k+1} = I_{k+2}$$

et si l'on impose :

$$\frac{I_k}{I_{k+1}} = \frac{I_{k+1}}{I_{k+2}} = \gamma$$

on en déduit :

$$\frac{I_k}{I_{k+1}} = 1 + \frac{I_{k+2}}{I_{k+1}}$$

Objectif

Soit $\gamma = 1 + \frac{1}{\gamma}$ ou encore $\gamma^2 - \gamma - 1 = 0$, équation dont la racine positive est le *nombre d'or* :

$$\gamma = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$$

Bien sûr, la méthode du nombre d'or n'est pas optimale, mais on vérifie sans peine que pour un nombre suffisamment élevé n de calculs de la fonction f, elle conduit asymptotiquement à la même disposition de points que la méthode de Fibonacci.
En effet, on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \gamma$$

1. **Entrer** $x_{L,1}$, $x_{U,1}$ et ϵ
2. $I_1 = x_{U,1} - x_{L,1}$, $\gamma = 1,618$ **et calculer** $I_2 = \dfrac{I_1}{\gamma}$
   $x_{a,1} = x_{U,1} - I_2$, $x_{b,1} = x_{L,1} + I_2$, $f_{a,1} = f\left(x_{a,1}\right)$
   et $f_{b,1} = f\left(x_{b,1}\right)$ **et on pose** $k = 1$
3. **Calculer** $I_{k+2} = \dfrac{I_{k+1}}{\gamma}$
   - **Si** $f_{a,k} \geq f_{b,k}$ **mettre à jour**

     $$x_{L,k+1}\ ,\ x_{U,k+1}\ ,\ x_{a,k+1}\ ,\ x_{b,k+1}\ ,\ f_{a,k+1}\ \text{et}\ f_{b,k+1}$$

   - **Si** $f_{a,k} < f_{b,k}$ **mettre à jour les mêmes quantités**
4. **Si** $I_k < \epsilon$ ou $x_{a,k+1} > x_{b,k+1}$ **faire**
   - **Si** $f_{a,k+1} > f_{b,k+1}$ **calculer**

     $$\bar{x} = \frac{x_{b,k+1} + x_{U,k+1}}{2}$$

- **Si** $f_{a,k+1} = f_{b,k+1}$ **calculer**

$$\bar{x} = \frac{x_{a,k+1} + x_{b,k+1}}{2}$$

- **Si** $f_{a,k+1} < f_{b,k+1}$ **calculer**

$$\bar{x} = \frac{x_{L,k+1} + x_{a,k+1}}{2}$$

calculer $\bar{f} = f(\bar{x})$ **puis sortir**
Sinon $k = k + 1$ **puis aller à l'étape 3**

Exercice.
Pour la fonction $f(x) = e^{x(x-1)}$, effectuez trois itérations des deux algorithmes (dichotomie, Fibonacci et section d'or) à partir de l'intervalle initial $[-1, 1]$ avec un $\epsilon = 10^{-3}$.

Objectif

En optimisation unidimensionnelle, la méthode d'interpolation quadratique consiste à approximer l'expression de la fonction objectif par un polynôme du second ordre

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

où a_0, a_1 et a_2 sont constantes. Soit

$$p(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 = f(x_i) = f_i ...(\star)$$

pour $i = 1, 2, 3$ où $[x_1, x_3]$ est l'intervalle qui contient le minimiseur de $f(x)$.
Considérons que les valeurs de f_i sont connues, ainsi a_0, a_1 et a_2 peuvent être déduite par la solution du système $(\star)$.

Objectif

La première dérivée de $p(x)$ est donnée par :

$$p'(x) = a_1 + a_2 x$$

Si $p'(x) = 0$ et $a_2 \neq 0$ alors le minimiseur de $p(x)$ est déduit par

$$x^\star = -\frac{a_1}{2a_2}$$

En résolvant simultanément les équations du système ($\star$), on trouve

$$a_1 = -\frac{\left(x_2^2 - x_3^2\right) f_1 + \left(x_3^2 - x_1^2\right) f_2 + \left(x_1^2 - x_2^2\right) f_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}$$

$$a_2 = \frac{(x_2 - x_3) f_1 + (x_3 - x_1) f_2 + (x_1 - x_2) f_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}$$

Objectif

Ainsi

$$x^{\star} = -\frac{\left(x_2^2 - x_3^2\right) f_1 + \left(x_3^2 - x_1^2\right) f_2 + \left(x_1^2 - x_2^2\right) f_3}{2\left[\left(x_2 - x_3\right) f_1 + \left(x_3 - x_1\right) f_2 + \left(x_1 - x_2\right) f_3\right]}$$

Si $p(x)$ est une bonne approximation de $f(x)$, alors $x^{\star}$ sera une bonne estimé de $\bar{x}$.

Interpolation en deux points. Ici, on considère que les valeurs de $f(x)$ et de ces premières dérivées sont connues en deux points distincts. On peut écrire :

$$p(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = f(x_1) \equiv f_1$$

$$p(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = f(x_2) \equiv f_2$$

$$p'(x_1) = a_1 + 2a_2 x_1 = f'(x_1) \equiv f_1'$$

Objectif

La solution de ces équations donne a_1 et a_2, ainsi $x^\star = -\dfrac{a_1}{2a_2}$.

$$x^\star = x_1 + \frac{f_1'(x_2 - x_1)^2}{2[f_1 - f_2 + f_1'(x_2 - x_1)]}$$

Maintenant si la dérivée est connue en deux points x_1 et x_2 alors

$$x^\star = x_2 + \frac{f_2'(x_2 - x_1)}{f_1' - f_2'}$$

1. **Entrer** x_1, x_3 **et** ϵ **et poser** $x_0^\star = 10^{99}$.
2. **Calculer** $x_2 = \dfrac{x_1 + x_3}{2}$ **et** $f_i = f(x_i)$ **et** $i = 1, 2, 3$.
3. **Calculer** $x^\star$ **et** $f^\star = f(x^\star)$.
   Si $|x^\star - x_0^\star| < \epsilon$, **alors** $\bar{x} = x^\star$ **et** $f(\bar{x}) = f^\star$, **et arrêt.**
4. **Si** $x_1 < x^\star < x_2$ **alors faire :**
   si $f^\star \leq f_2$, **affecter** $x_3 = x_2$, $f_3 = f_2$, $x_2 = x^\star$, $f_2 = f^\star$;
   sinon, si $f^\star > f_2$, **affecter** $x_1 = x^\star$, $f_1 = f^\star$.
   Si $x_2 < x^\star < x_3$ **alors faire :**
   si $f^\star \leq f_2$, **affecter** $x_1 = x_2$, $f_1 = f_2$, $x_2 = x^\star$, $f_2 = f^\star$;
   sinon, si $f^\star > f_2$, **affecter** $x_3 = x^\star$, $f_3 = f^\star$.
   Poser $x_0^\star = x^\star$, **puis répéter à partir de l'étape 3**