École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen
Département de la formation préparatoire
Niveau deuxième année, 2019 - 2020

ANALYSE III & IV

Série de Travaux Dirigés Numéro 6

Séries Entières

Responsable du module: M.HOUBAD

19 Avril 2020

Exercice 1. Déterminer le rayon et le domaine de convergence des séries entières

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}x^n,\quad \sum_{n\geq 1} n^{\sqrt{n}}z^n,\quad \sum_{n\geq 0}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)x^n,\quad \sum_{n\geq 1} n^{(-1)^n}x^n,$$
$$\sum_{n\geq 0}(3+\cos n)(z+2i)^n,\quad \sum_{n\geq 0}\frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}x^{2n+1},\quad \sum_{n\geq 1}e^n z^{n^3},\quad \sum_{n\geq 0}2^n z^{n!}.$$

Exercice 2. Vérifier la convergence et calculer la somme des séries

$$\sum_{n\geq 1}\cos(nx)x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\mathrm{ch} n}{n}z^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{n}x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n}x^n,\quad \sum_{n\geq 0}n^2x^n,$$
$$\sum_{n\geq 0}\frac{\cos(n\theta)}{n!}x^n,\ \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{n(-1)^n}{(2n)!}x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 3. Développer en séries entières autour de l'origine :

$$\frac{2x+4}{(x-2)(x-3)},\quad \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2,\quad (\sin(x)\mathrm{sh}(x))^2,\quad e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt,$$
$$\ln\left(\sqrt{1-2x\cos(\alpha)+x^2}\right),\quad \frac{z\sin\alpha}{z^2-2z\cos\alpha+1}.$$

Exercice 4. Chercher sous forme de série entière la solution de

$$\begin{cases} 4xy^{(2)}+2y^{(1)}-y=0,\\ y(0)=1,\end{cases},\quad \begin{cases} y^{(2)}+xy^{(1)}+y=1,\\ y(0)=1,\end{cases},\quad \begin{cases} x^2y^{(2)}-2xy^{(1)}+(2-x^2)y=0,\\ y(0)=0,\quad y^{(1)}(0)=1.\end{cases}$$

Exercice 5. Soit

$$F(x)=\int_0^{\pi/2}\ln\left(1+x(\sin t)^2\right)dt,\quad x\in]-1,+1[,\quad I_n=\int_0^{\pi/2}(\sin(t))^n\,dt.$$

1. Calculer la valeurs de I_n.
2. Déterminer le développement en série entière de $\ln(1+u)$ et donner son rayon de convergence.
3. Montrer que
$$\ln\left(1+x(\sin t)^2\right)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{(\sin(t))^{2n}}{n}x^n,\quad \forall x\in]-1,+1[.$$
4. En déduire le développement en série entière en x de $F(x)$ et on donne son rayon de convergence.