École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen
Département de la formation préparatoire
Niveau deuxième année, 2019 - 2020

Analyse III & IV

Série de Travaux Dirigés Numéro 5

Suites de Fonctions et Séries de Fonctions

Responsable du module: M.HOUBAD
22 Mars 2020

Exercice 1. Étudier la convergence simples et uniforme des suites de fonctions suivantes

$$\frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}, \quad \operatorname{arctg}(nx).$$

Exercice 2. Soit la suite de fonction $(f_n)_n$ définie par

$$f_n(x) = n\,(\cos x)^n \sin x.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.
2. Vérifier que
$$\int_0^{\pi/2} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(x)dx$$
3. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$.

Exercice 3. Soit la suite de fonction $(f_n)_n$ définie par

$$f_n(x) = 2^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ convergence simplement ver une fonction f.
2. Étudier la continuité de f_n et de f.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$.

Exercice 4. Soit la suite de fonction $(f_n)_n$ définie par

$$f_n(x) = x^n \ln x, \quad x \in]0,1].$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ convergence uniformément sur $]0,1]$ ver une fonction f.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n')_n$.

Exercice 5. Trouver le domaine de convergence des séries de fonctions suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} e^{-nx^2}\sin(nx), \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^n, \quad \sum_{n\geq 1}\frac{(z-i)^{3n}}{na^n}, \quad \sum_{n\geq 1} x^n\frac{\sin(nx)}{n}.$$

Exercice 6. Étudier la convergence simples et uniforme des séries de fonctions suivantes :

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right), \quad \sum_{n\geq 0}\frac{x}{(1+x^2)^n}, \quad \sum_{n\geq 2}\frac{xe^{-nx}}{\ln n}, \quad \sum_{n\geq 1}\operatorname{th}(nx)-\operatorname{th}((n-1)x).$$

Exercice 7. Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ définie par

$$\forall x \in J = [-1, +1] : \quad f_n(x) = \frac{n+2-(n+1)x}{n^2+3n+2} x^{n+1}.$$

1. Déterminer $a_n(x)$ tel que
$$f_n(x) = a_n(x) - a_{n+1}(x).$$
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge uniformément et déterminer ca somme.
3. Monter que $f_n(x)$ est croissante sur $[0, 1]$ et établir la convergence normale de la série sur $[0, 1]$.

Exercice 8. Soit la suite de fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad f_n(x) = \frac{e^{-2nx}}{2n+1}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
2. On considère la séries de fonction de terme générale $u_n(x)$ définit par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n(x) = (-1)^n f_n(x).$$
   (a) Trouver le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$.
   (b) Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ sur $\mathcal{D}$.
   (c) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge uniformément sur le domaine $\mathcal{D}$.
   (d) Déduire que $S(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$ est une fonction continue sur $\mathcal{D}$
   (e) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
3. On pose dans la suite
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad v_n(x) = e^{-x} u_n(x).$$
   (a) Étudier la dérivabilité de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ sur $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
   (b) Calculer la somme suivante
$$T(x) = \sum_{n\geq 0} v_n'(x), \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$
4. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S(x) = e^x \operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right).$$
5. Justifier que
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Suppléménetaires

Exercice 9. Étudier la convergence simples et uniforme des suites de fonctions suivantes

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & Si \quad 0 \leq x \leq n \\ 0 & Si \quad x > n. \end{cases} \quad , \quad g_n(x) = n\,(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right).$$

Exercice 10. Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad f_n(x) = e^{-n|x+1|}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}: \quad g_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{\ln n}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad h_n(x) = \frac{nx}{1 + n|x|}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*: \quad k_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right).$$

Exercice 11. Soit la suite de fonction $(f_n)_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{x/n} - 2}{n} & Si \quad x \in [0, n] \\ 0 & Si \quad x \geq n \end{cases}$$

Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f à déterminer.

Exercice 12. Soit la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*: \quad f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ et la convergence uniforme sur toute intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme sur toute intervalle $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}$ (Indication considérer la suite numérique définie par $x_n = n$).
3. Calculer la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)dt.$$

Exercice 13. Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} U_n(x)$ définie par

$$\forall x \in I = [-1, +1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*: \quad U_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^n} - \frac{(-1)^n}{n}.$$

Montrer que $\sum_{n\geq 1} U_n(x)$ converge normalement sur I et déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n + x^n}$ converge uniformément sur I.

Exercice 14. Soit la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}.$$

1. Étudier, suivante les valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la convergence simple de cette séries.
2. On note par

$$\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x},$$

   (a) Montrer que la séries ne converge pas normalement sur $]1, +\infty[$.
   (b) Étudier la convergence normale sur $[a, +\infty[$ avec $a > 1$ et déduire la valeur de $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x)$.
   (c) Montrer que $\zeta(x)$ est dérivable sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.
   (d) Calculer $\zeta'(x)$.
   (e) Montrer que $\zeta(x)$ ne eut être majorée au voisinage de 1 et déduire la valeur de $\lim_{x \to 1} \zeta(x)$.