



ANALYSE III

Série de Travaux Dirigés Numéro 3

L'Analyse Vectoriel

Responsable du module: M.HOUBAD

25 Février 2020

Exercice 1. Donner le vecteur qui dirige la tangente et calculer la longueur des courbes suivante

$$(C_1) : y^2 + x^2 + 3x - 4 = 0.$$

$$(C_2) : x - y \operatorname{tg}\left(\frac{z}{a}\right) = 0, \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad a > 0, \quad R > 0.$$

$$(C_3) : x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad a > 0.$$

Exercice 2. Donner une paramétrisation, les vecteur directeur du plan tangent, le vecteur normale à et l'aire de (S) dans le cas suivants

— (S) est la demi Sphère définie par

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z > 0.$$

— (S) est le Tor défini par

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2, \quad R > r > 0.$$

Exercice 3. Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe (OZ) de la portion du paraboloïde de révolution

$$x^2 + y^2 = 2cz, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Exercice 4. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la partie de la surface conique

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2}z^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad z \geq 0.$$

Exercice 5.

1. Soit f un champs scalaire et U un champs de vecteurs. Montrer que

$$\operatorname{rot}(fU) = f \operatorname{rot}(U) + \nabla f \wedge U.$$

2. Montrer que si un champs de vecteur V est en tout point colinéaire à un champ de gradient, alors

$$V \cdot \operatorname{rot}(V) = 0.$$

Exercice 6. Soient $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ tel que $f(1) = 1$, V un champs de vecteur défini par

$$V(x, y, z) = f(r) (x, y, 2z), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Déterminer f tel que V soit un champs de rotationnelle (on dit aussi qu'il est a flux conservatif).

2. A quoi sert la formule suivante

$$\int_0^1 t f(tX) \wedge X dt + Cst.$$

3. On peut appliquer la formule précédente dans cette exercice ?

4. Déterminer U le potentiel vecteur de V sachant que la troisième composante de U est nul et que $U(x, y, 0) = 0$.

Exercice 7. Soit le champs de vecteur

$$V(x, y, z) = (y^2 + z^2, -xy, -xz)$$

soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ vérifiée $\varphi(1) = 1$

1. Déterminer φ pour que champs de vecteur $\varphi(z)V(x, y, z)$ soit un champs de rotationnelle.
2. Une fois φ choisie déterminer le potentiel vecteur associée au champs vectoriel $\varphi(z)V(x, y, z)$.

Exercice 8. Soit le champs de vecteur F définit par

$$F(x, y, z) = (e^x + y, 2y + x, 2z)$$

Montrer que F est un champs conservatif et déterminer son potentiel.

Exercice 9. Calculer l' intégrale curviligne

$$\int_{(C)} y^2 dx + x^2 dy, \quad (C) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x}{a} - 2\frac{y}{b} = 0, \quad (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2.$$

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on considère (C) le carré orienté de sommets

$$A = (a, a), \quad B = (-a, a), \quad C = (-a, -a), \quad D = (a, -a),$$

calculer l' intégrale curviligne suivant

$$\int_{(C)} \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy.$$

Exercice 11. Soit la courbe (C) parcouru dans le sens directe, calculer

$$\int_{(C)} xy dx + (x + y) dy, \quad (C) : y = x^2, \quad -1 \leq x \leq 2.$$

Exercice 12. Calculer l' intégrale curviligne

$$\int_{(C)} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz, \quad (C) : \begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \\ z = ht, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], \quad R > 0, \quad h > 0.$$

Exercice 13. Calculer le circulation du champs de vecteur $F(x, y) = (-y, x)$ le long de la demi-ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad y \geq 0$$

Exercice 14. Calculer la circulation du champs de vecteur

$$F(x, y, z) = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2 - 2z).$$

le long de la courbe définie par

$$x^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1, \quad z = \frac{1}{\sqrt{3}}y.$$

Exercice 15. On applique la formule de Green, calculer

$$\int_{(\partial D_1)} -y dx + x dy, \quad (\partial D_1) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1 \right\}$$

$$\int_{(\partial D_2)} (2xy - x^2) dx + (x^2 + y^2) dy, \quad (\partial D_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y - x^2)(x - y^2) = 0\}$$

$$\int_{(\partial D_3)} xy^2 dx + 2xy dy, \quad (\partial D_3) = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\iint_{(D_4)} 2x^3 - y dx dy, \quad (D_4) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \right\}$$

Exercice 16. Calculer l'aire de la partie délimité par l'axe (OX) , l'axe (OY) et la courbe paramétrée

$$(C) : \quad x = a \cos(t)^3, \quad y = a \sin(t)^3, \quad \in [0, \pi].$$

Exercice 17. Soit (S) une surface fermée, n la normale extérieure unitaire de (S) calculer

$$\iint_{(S)} (x, y, z) \cdot n ds.$$

Exercice 18. Calculer

$$\iint_{(S)} z dx dy, \quad \iint_{(S)} x^2 dy dz + y^2 dx dy + z^2 dx dy,$$

ou (S) est e coté extérieure de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Exercice 19. Calculer

$$\iint_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2} ds, \quad (S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 = 0, \quad z \in [0, b]\}.$$

Exercice 20. On utilise la formule de Stokes calculer

$$\int_{(C)} (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz, \quad (C) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0\}$$

$$\int_{(C)} x^2 y^3 dx + dy + z dz, \quad (C) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0\}.$$

Exercice 21. On utilise la formule d'Ostrogradsky calculer

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} (x, y, z) \cdot n ds, & \quad (S) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad n \text{ la normale extérieure} \\ \iint_{(S)} (x^2, y^2, z^2) \cdot n ds, & \quad (S) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad n \text{ la normale extérieure} \\ \iint_{(S)} x^2 dx dy + y dx dz + z dx dy, & \quad (S) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, \quad 0 \leq z \leq b, \\ \iint_{(S)} x dy dz + y dx dz + z dx dy, & \quad (S) : x^2 + y^2 = a^2, \quad -h \leq z \leq h, \quad h > 0, \end{aligned}$$

Exercices Supplémentaires

Exercice 22. Soit f, g deux champs scalaires et U, V deux champs de vecteurs. Montrer que

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(f + g) &= \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g), & \operatorname{grad}(fg) &= f \operatorname{grad}(g) + g \operatorname{grad}(f), \\ \operatorname{rot}(fV) &= f \operatorname{rot}(V) + \nabla f \wedge V, & \operatorname{div}(U \wedge V) &= V \cdot \operatorname{rot}(U) - U \cdot \operatorname{rot}(V), \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(V)) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}(V)) - \Delta(V), & \operatorname{div}(fV) &= \operatorname{grad}(f) \cdot V + f \operatorname{div}(V). \end{aligned}$$

On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, calculer

$$\operatorname{grad} r, \quad \operatorname{grad} r^2, \quad \operatorname{grad} \frac{1}{r}, \quad \operatorname{grad} f(r).$$

Exercice 23. Calculer les intégrales curvilignes suivantes

$$\begin{aligned} \int_{(C)} y^2 dx + 2xy dy & \quad (C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\} \\ \int_{(C)} y dx - x dy & \quad (C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\} \\ \int_{(C)} \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy & \quad (C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\} \\ \int_{(C)} \frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy & \quad (C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0, \quad x \in [1, 2]\} \end{aligned}$$

Exercice 24. Calculer les coordonnées du centre de gravité du segment de la surface sphérique

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

coupée par le plan $z = H$.

Exercice 25. Donner le vecteur qui dirige la tangente et calculer la longueur des courbes suivante

$$\begin{aligned} (C_1) : \quad x &= a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ht, \quad t \in [0, 2\pi] \\ (C_2) : \quad r &= a(1 + \cos \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Exercice 26. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(C)} x^2 dx - xy dy,$$

dans le cas ou

- (C) est le segment $[OB]$ avec $O(0, 0)$ et $B(1, 1)$.
- (C) est la courbe d'équation

$$x = y^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Exercice 27. Soit le segment $[OA]$ avec $A(1, 1)$ et $O(0, 0)$, calculer

$$\int_{[OA]} y \sin x dx + x \cos y dy.$$

Exercice 28. Soit le champs de vecteur

$$F(x, y, z) = (x + z, -3xy, x^2).$$

1. Calculer la circulation de F entre les deux points $O(0, 0, 0)$ et $P(1, 2, -1)$ le long des chemins suivantes

$$(C_1) : (x, y, z) = (t^2, 2t, -t), \quad (C_2) : [OP].$$

2. Que peut on remarquer ? Pourquoi ?

Exercice 29. Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe (OZ) de la demi sphère

$$(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0\},$$

avec une densité superficielle $\rho(x, y, z) = 1$.

Exercice 30. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(C)} y^2 dx + x^2 dy,$$

tel que la courbe (C) est définie par

$$(C) : x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Exercice 31. Soit le demi-cardioïde (C) d'équation

$$r = a(1 + \cos \theta), \quad a > 0, \quad \theta \in [0, \pi],$$

calculer

$$\int_{(C)} (x + y) dx + (x - y) dy.$$

Exercice 32. Calculer la circulation du champs de vecteur

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

le long du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 2x = 1$$

parcouru dans le sens direct.

Exercice 33. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on considère (C) le carré orienté de sommets

$$A = (a, a), \quad B = (-a, a), \quad C = (-a, -a), \quad D = (a, -a),$$

calculer les deux intégrales curvilignes

$$\int_{(C)} \frac{x-y}{x^2+y^2} dx - \frac{x+y}{x^2+y^2} dy.$$

Exercice 34. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(C)} yz dx + xz dy + xy dz,$$

$$(C) : \quad x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = ht, \quad t \in [0, 2\pi], \quad R > 0, \quad h > 0.$$

Exercice 35. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(C)} z dx + x dy + y dz, \quad (C) : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + z = 1.$$

Exercice 36. Calculer l'aire de la partie délimitée par l'axe (OX) et l'arc paramétré

$$x = a(t - \sin(t)), \quad y = a(1 - \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Exercice 37. Soit (S) une surface fermée qui enferme un volume V . On utilise la formule d'Ostrogradsky montrer que

$$\oint_{(S)} xy dx dy + yz dy dz + zx dz dx = 0$$

$$\oint_{(S)} \frac{\partial u}{\partial x} dy dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy dz + \frac{\partial u}{\partial z} dx dy = \iiint_V \Delta u dx dy dz$$

$$\oint_{(S)} (x, y, z) \cdot n ds = \iiint_V 3 dx dy dz, \quad n \text{ la normale extérieure}$$

$$\oint_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2)(dy dz + dx dz + dx dy) = 2 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz$$

Exercice 38. On utilise la formule de Stokes montrer que

$$\oint_{(\partial S)} y dx + z dy + x dz = - \iint_{(S)} n \cdot ds, \quad n \text{ la normale extérieure}$$

Exercice 39. Soit le champs de vecteur

$$V(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

1. Calculer la circulation de V le long du cercle de centre O et de rayon R .
2. Dédurre que le champs de vecteur V ne dérive pas d'un potentiel.