École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen
Département des Mathématiques
Niveau deuxième année, 2019 - 2020

ANALYSE III

Série de Travaux Dirigés Numéro 4

Séries Numériques

Responsable du module: M.HOUBAD

03 Mars 2020

Exercice 1. Calculer les sommes suivante

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)},\quad \sum_{n\geq 0}(-1)^n,\quad \sum_{k=p}^{q} r^k,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\operatorname{tg}\left(2^{-n-1}\right)}{\cos\left(2^{-n}\right)},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(n-2)^2}{n!},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k,\quad \sum_{k=1}^{n} k^2,\quad \sum_{k=1}^{n} k^3,\quad \sum_{k=1}^{n} k^4,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ipk},\quad \sum_{k=1}^{n}\sin(pk),\quad \sum_{k=1}^{n}\cos(pk),\quad \forall p\in\mathbb{N}^*.$$

Exercice 2. Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle tel que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*:\quad \alpha_k\neq 0.$$

Déterminer le terme générale des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de n du premier terme et les nombres α_k dans les deux cas suivantes

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*:\quad u_{n+1}=\alpha_n u_n,\quad u_1\in\mathbb{R}^*.$$

2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*:\quad v_{n+2}=\alpha_n v_n,\quad v_1\in\mathbb{R}^*.$$

Applications : Déterminer le terme générale u_n vérifier et le terme générale v_n dans les cas suivante

$$\alpha_n=\frac{1}{n},\quad \alpha_n=n,\quad \alpha_n=\frac{n+1}{n^2}$$

Exercice 3. Etudier la convergence et calculer la sommes des séries suivantes

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)},\quad \sum_{n\geq 1} ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right),\quad \sum_{n\geq 0} ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right),\quad x\in]0,\pi/2[$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(ny)}{2^n\left(\cos(y)\right)^n},\quad |2\cos(y)|>1,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{n^3}{n!},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Exercice 4. Etudier la nature des séries de terme généraux suivants

$$\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)},\quad \frac{n^n}{\prod_{k=1}^{n}(2k)},\quad \frac{\sum_{k=1}^{n}k}{\sum_{k=1}^{n}k^2},\quad \frac{1}{n\,ln(n)},\quad \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n,\quad \frac{a^n n!}{n^n};\quad a>0$$

$$\int_0^{\pi/n}\frac{sin(x)^3}{1+x}dx,\quad \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},\quad \frac{n^n}{\sqrt{(n!)^\alpha}},\quad e^{-n^\alpha};\quad \alpha\in\mathbb{R},\quad \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}e^{in\theta},\quad \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{ln(n!)}.$$

Exercice 5. Soient les deux séries numériques de termes généraux suivantes

$$u_n=\frac{1}{n}\cos\left(n+\frac{1}{n}\right),\quad v_n=\frac{1}{n}\cos(n).$$

1. Montrer que la série de terme générale $w_n=u_n-v_n$ est une série absolument convergente.
2. Déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 6. Soit la série de terme général

$$u_n=\frac{n}{(2n+1)5^n}.$$

1. Monter que cette série converge ver une valeur S.
2. Déterminer n pour que la somme

$$\sum_{k=1}^{n}u_n,$$

soit à $10^{-\alpha}$ pré de la somme S, avec $\alpha\in\mathbb{N}$.

Exercice 7. Soit la suite $(a_n)_n$ définie par

$$a_n=(-1)^n\frac{n^2+1}{n^4+n^2+1}$$

1. Monter que la série de terme général a_n converge.
2. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_n$ tel que

$$a_n=u_n-u_{n+1}.$$

3. Déterminer la valeur ver laquelle la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 8. Etudier la nature des series suivante

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}\frac{\alpha^n}{2n+1},\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(\alpha-2)^n}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 9. Etudier la nature des séries de termes généraux

$$\frac{a^n}{n^2}, \quad \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}+\cos(n)}, \quad r^{-a\sqrt{n}}\sin(n); \quad a>0$$

$$(-1)^n n^{1/n}\sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \frac{(\sin(n))^2}{n}, \quad \sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$$

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right), \quad \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}, \quad \left(\cos\left(\frac{1}{ln(n)}\right)\right)^{n^\alpha}.$$

Exercice 10.

1. Montrer que le produit de Cauchy de la série de terme général $(-1)^n/\sqrt{n}$ par elle-même diverge.
2. Montrer que le produit de Cauchy de la série de terme général $(-1)^n/n$ par elle-même converge.

Exercice 11. Disucuter selon le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n^\alpha}.$$

Exercice 12. Montrer que la série

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)},$$

est semi-convergente.

Exercice 13. On donne la formule suivante, si les deux série $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergente alors

$$\left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right) = \text{Le produit de Cauchy de } \sum a_n \text{ par } \sum b_n.$$

Calculer les deux somme suivante.

$$\sum_{\mathbf{n}\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!}\right), \quad \sum_{\mathbf{n}\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}\right).$$