Mekki HOUBAD

Séries Entières

Chapitre V d'Analyse III et IV

Avril 2017

©Mekki HOUBAD
Département de Mathématiques
Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen 13000
Algérie
m.houbad@gmail.com

http://www.univ-tlemcen.dz

Table des matières

Chapitre 4

Séries Entières

4.1 Notions de base

Définition 1 (Série entière)**.** *On appelle une série entière toute série de fonction de la forme*

$$\sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n, \quad x_0 \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

avec x_0 est un point fixe dit centre de la série et $(a_n)_n$ une série numérique réelle ou complexe.
Par un changement de varivable en $X = x - x_0$ on peut ce ramené à une série entière centré en zéro de la forme

$$\sum_{n\geq 0} a_n X^n.$$

Exemple 1. la série de fonction

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(2n)}{n!}(x-1)^n$$

est une série entière dans $\mathbb{R}$ centrée en 1.

Lemme 1 (Abel)**.** *Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$, tel que il existe $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et $\sum_{n\geq 0} a_n(\tilde{x}-x_0)^n$ converge. Alors $\forall x \in \mathbb{R}($ ou $\mathbb{C})$ tel que$|x-x_0| < |\tilde{x}-x_0|$ la série $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ converge.*

Corollaire 1. *Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$, tel que il existe $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et $\sum_{n\geq 0} a_n(\tilde{x}-x_0)^n$ diverge . Alors $\forall x \in \mathbb{R}($ ou $\mathbb{C})$ tel que$|x-x_0| > |\tilde{x}-x_0|$ la série $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ diverge.*

Définition 2 (Rayon de convergence)**.** *Soit $\mathcal{D}_{cv}$ le domaine de convergence de la série entière, autrement dit c'est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour lesquels la série entière converge.*
On appelle rayon de converge de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ la quantité

$$R = \text{Sup}\left\{|x-x_0|, \quad x \in \mathcal{D}_{cv}\right\}.$$

Remarque 1.[Notation]
On appelle un disque ouvert un ensemble de la forme

$$\mathcal{D}(x_0, r[= \{x \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} : \quad |x-x_0| < r\}.$$

On appelle un disque fermé un ensemble de la forme

$$\mathcal{D}(x_0, r] = \{x \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} : \quad |x-x_0| \leq r\}.$$

△

Lemme 2 (Rayon de convergence)**.** *Le rayon de converge de la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ *est donné par la formule*

$$R = \frac{1}{\underset{n\to+\infty}{\text{Lim}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Si la limite $\underset{n\to+\infty}{\text{Lim}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *n'existe pas (multiple) alors*

$$R = \frac{1}{\underset{n\to+\infty}{\text{LimSup}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Exemple 2.

1. Soit la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2n+1}{3n^2+n+3}(x-1)^n$$

on a $a_n = \dfrac{2n+1}{3n^2+n+3}$ donc

$$R = \frac{1}{\underset{n\to+\infty}{\text{Lim}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\underset{n\to+\infty}{\text{Lim}}\left|\frac{2n+2}{3(n+1)^2+n+4}\,\frac{3n^2+n+3}{2n+1}\right|} = 1,$$

donc la série converge dans le domaine $]x_0-R, x_0+R[=]0,2[$

a. Pour $x=0$ on a

$$\left.\sum_{n\geq 0} \frac{2n+1}{3n^2+n+3}(x-1)^n\right|_{x=0} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{2n+1}{3n^2+n+3}$$

est une série alternée qui converge.

b. Pour $x=2$ on a

$$\left.\sum_{n\geq 0} \frac{2n+1}{3n^2+n+3}(x-1)^n\right|_{x=2} = \sum_{n\geq 0}\frac{2n+1}{3n^2+n+3}$$

est une série en équivalence avec une série de Riemann qui diverge.

Donc le domaine de convergence de la série est $[0,2[$.

2. Soit la série entière

$$\sum_{n\geq 1} e^n\frac{n!}{2^n n^n}(x-2)^{2n}$$

on pose $X=(x-2)^2$ on a

$$\sum_{n\geq 1} e^n\frac{n!}{2^n n^n}X^n$$

donc

$$a_n = e^n\frac{n!}{2^n n^n}$$

ainsi

$$R = \frac{1}{\underset{n\to+\infty}{\text{Lim}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\underset{n\to+\infty}{\text{Lim}}\left|e^{n+1}\frac{(n+1)!}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}\,\frac{2^n n^n}{e^n n!}\right|} = 2.$$

ce qui donne que $X<2$ et donc $(x-2)^2<2$ ainsi $x\in]2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}[$.

a. Pour $x = 2 - \sqrt{2}$ on a

$$\sum_{n\geq 1} e^n \frac{n!}{2^n n^n}(x-2)^2\Bigg|_{x=2-\sqrt{2}} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n e^n \frac{n!}{2^{n-1}n^n}$$

la terme $u_n = e^n \dfrac{n!}{2^{n-1}n^n}$ est décroissante ($u_{n+1}/u_n < 1$) ver zéro donc on a une série alternée qui converge.

b. Pour $x = 2 + \sqrt{2}$ on a

$$\sum_{n\geq 1} e^n \frac{n!}{2^n n^n}(x-2)^2\Bigg|_{x=2+\sqrt{2}} = \sum_{n\geq 0} e^n \frac{n!}{2^{n-1}n^n}$$

on applique le critère de d'Alembert on a une série convergente.

Donc le domaine de convergence de la série est $[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$.

Lemme 3 (Règle D'Hadamard)**.** *Soit la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$*, alors le rayon de convergence* R *est donnée par*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & Si\ 0 < \rho < +\infty, \\ 0 & Si\ \rho = +\infty, \\ +\infty & Si\ \rho = 0. \end{cases}$$

Avec

$$\rho = \operatorname*{LimSup}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Lemme 4 (Second lemme d'Abel)**.** *Soit la série entière* $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ *avec un rayon de convergence* $R > 0$*. Alors*

1. *Si* $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ *converge alors*

$$\operatorname*{Lim}_{x\to(x_0+R)^-} S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n R^n.$$

2. *Si* $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n R^n$ *converge alors*

$$\operatorname*{Lim}_{x\to(x_0+R)^+} S(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n R^n.$$

4.2 Propriétés des séries entières

Théorème 1 (La convergence)**.** *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ *une série entière avec un rayon de convergence* R*. Alors*

1. *Dans le disque de convergence on a la convergence simple.*
2. *Dans tout domaine de la forme* $\mathcal{D}(x_0, r]$ *avec* $0 < r < R$ *on a la convergence simple, absolue, uniforme et normale.*

Théorème 2 (Continuité de la somme, Intégration terme à terme, Dérivation terme à terme)**.** *Soit la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ *admet une rayon de convergence* $R>0$. *On pose*

$$S(x)=\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n, \forall x\in \mathcal{D}_{cv}.$$

Alors

1. *S est continue sur tout $K\subset \mathcal{D}(x_0,R[$.*
2. *S est intégrable sur tout $K\subset \mathcal{D}(x_0,R[$ et*

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

3. *$S\in \mathcal{C}^{\infty}(K)$ pour tout $K\subset \mathcal{D}(x_0,R[$ et*

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n\geq k}\frac{n!}{(n-k)!}a_n(x-x_0)^{n-k},\quad S(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Exemple 3. On veut calculer ca somme

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n(2n+1)}x^{2n+1}.$$

1. Domaine de convergence de la série : on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n(2n+1)}x^{2n+1}&=x\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n(2n+1)}x^{2n}\\&=x\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n(2n+1)}X^{n},\quad X=x^2.\end{aligned}$$

donc

$$a_N=\frac{1}{2n(2n+1)}\Longrightarrow R=\frac{1}{\underset{N\to+\infty}{\text{Lim}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=1$$

alors $X<1$ ce qui donne $x^2<1$ et alors $x\in]-1,+1[$ et pour $x=+-1$ on obtient une série équivalente à une série de Riemann convergente donc le domaine de convergence est $[-1,+1]$.

2. Calcule de la somme. On pose

$$g(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n(2n+1)}x^{2n+1},\quad \forall x\in]-1,+1[$$

donc

$$g'(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n}x^{2n},\quad \forall x\in]-1,+1[$$

et aussi

$$g''(x)=\sum_{n\geq 1}x^{2n-1},\quad \forall x\in]-1,+1[$$

or

$$g''(x)=x\sum_{n\geq 1}(x^2)^{(n-1)}=x\sum_{N\geq 0}(x^2)^N=\frac{x}{1-x^2}.$$

ainsi

$$g'(x) = \ln\left(1-x^2\right) + g'(0) = \ln\left(1-x^2\right)$$

et donc

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^x \ln\left(1-t^2\right) dt + g(0) \\
&= \int_0^x \ln\left(1-t^2\right) dt \\
&= t\ln\left(1-t^2\right)\Big|_0^x + \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt \\
&= x\ln\left(1-x^2\right) + \int_0^x \frac{1}{1-t^2} - 1 dt \\
&= x\ln\left(1-x^2\right) + \int_0^x \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)} - 1 dt \\
&= x\ln\left(1-x^2\right) + \left[-\frac{1}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\ln(1+t) - t\right]_0^x \\
&= x\ln\left(1-x^2\right) - \frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) - x.
\end{aligned}$$

Proposition 1 (Linéarité et produit de deux séries entières). *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ *une série entière avec un rayon de convergence* R_1 *et* $\sum_{n\geq 0} b_n(x-x_0)^n$ *une série entière avec un rayon de convergence* R_2 *et soit* $\lambda, mu \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *on note par* $R = \min\{R_1, R_2\}$. *Alors*

1. *Dans le disque* $\mathcal{D}(x_0, R[$

$$\sum_{n\geq 0} (\lambda a_n + \mu b_n)(x-x_0)^n = \lambda\left(\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n\right) + \mu\left(\sum_{n\geq 0} b_n(x-x_0)^n\right).$$

2. *Dans le disque* $\mathcal{D}(x_0, R[$

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n(x-x_0)^n,$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k.$$

4.3 Développement en série entière au voisinage de zéro d'une fonction d'une variable réelle

Définition 3 (Série de Taylor-Maclaurin d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$). *Une fonction* f *est dit analytique au voisinage de* x_0 *si elle est dévellopable en série de Mac-Laurin au voisinage de* x_0 *autrement dit*

$$\exists R \in \mathbb{R}_+^*; \quad \forall x \in \mathcal{D}(x_0, R[: \quad f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Exemple 4.

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge ver e^x sur tout $\mathbb{R}$.
2. $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge ver $\cos x$ sur tout $\mathbb{R}$.
3. $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge ver $\sin x$ sur tout $\mathbb{R}$.

4.3.1 Fonction développable en série entière sur l'intervalle ouvert de convergence

Proposition 2. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ *une série entière converge ver* $S(x)$*, alors cette série est la série de Taylor de la fonction* $S(x)$ *au voisinage de* x_0*. autrement dit*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Proposition 3 (Fonction développable en série entière)**.** *Soit* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *au voisinage de* x_0*, alors* f *est développable en série entière dans un voisinage de* x_0*.*

Proposition 4 (Unicité du développement en série entière)**.** *Le développement en série entière d'une fonction* f *est unique.*

4.4 Applications

4.4.1 Le développements en séries entières des fonctions usuelles

Remarque 2. Le développement d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en série entière au voisinage d'un point x_0 ce fait par le développement limité suivi d'une détermination de rayon et domaine de convergence. △

Exemple 5. On veut développer la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$$

en série entière au voisinage de zéro

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{1+\frac{x}{a}}\right] = \frac{1}{a}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{x}{a}\right)^n$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n\right] + \left[\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n\right] \\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\left[1+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^n \end{aligned}$$

soit $a_n = (-1)^n\left[1+\frac{1}{2^{n+1}}\right]$ on a

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{2^{n+1}}\right]/\left[1+\frac{1}{2^{n+2}}\right] = 1$$

pour $x = +-1$ on a

$$\underset{n\to+\infty}{\text{Lim}} |a_n x^n|_{x=+-1} = \underset{n\to+\infty}{\text{Lim}} \left[1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right] = 1 \neq 0$$

donc le domaine de convergence est $\mathcal{D} =]-1, +1[$ est donc la fonction $f(x)$ est développable en série entière au voisinage de zéro sur la domaine $\mathcal{D}$.

4.4.2 Recherche de solution d'une équation différentielle ordinaire du premier et deuxième ordre à coefficients variables sous forme de séries entières

Remarque 3. Pour résoudre les équations de la forme

$$a(x)f^{(2)}(x) + b(x)f^{(1)}(x) + c(x)f(x) = g(x)$$

on fait les étapes suivante

1. On dévellope $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ et $g(x)$ en série entière au voisinage de la donnée initiale x_0.
2. On cherche $f(x)$ sous la forme
$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$$
3. On utilise le produit de Cauchy pour développer les termes $a(x)f^{(2)}(x)$, $b(x)f^{(1)}(x)$ et $c(x)f(x)$ sous forme de série entière
4. On utilise l'identification pour déterminer les coefficients a_n
5. Finalement on déterminer le domaine de convergence de la série
$$\sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$$

△

Exemple 6. On veut résoudre

$$xf^{(2)}(x) + f^{(1)}(x) + f(x) = 1 \tag{4.1}$$

soit

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n, \quad f^{(1)}(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}, \quad f^{(2)}(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2},$$

donc l'équation (4.1) ce transforme en

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 1$$

un changement d'indice permet d'avoir

$$\sum_{l\geq 1} (l+2)(l+1)a_{l+1} x^l + \sum_{l\geq 0} (l+1)a_{l+1} x^l + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 1$$

ce qui donne

$$a_1 + a_0 + \sum_{n\geq 1} \left[(n+3)(n+1)a_{n+1} + a_n\right] x^n = 1$$

et donc

$$a_1 + a_0 = 1, \quad \forall n \geq 1 : \quad (n+3)(n+1)a_{n+1} + a_n = 0$$

alors

$$a_1 = 1 - a_0, \quad \forall n \geq 1 : \quad a_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(n+3)} a_n \Longrightarrow a_n = (-1)^{n-1} \frac{3!}{(n+2)!n!}(1 - a_0).$$

et donc

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{3!}{(n+2)!n!}(1 - a_0)x^n, \quad a_0 \in \mathbb{R}.$$