Mekki HOUBAD

Suites et Séries de Fonctions

Chapitre IV d'Analyse III et IV

Septembre 2016

©Mekki HOUBAD
Département de Mathématiques
Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen 13000
Algérie
m.houbad@gmail.com

http://www.univ-tlemcen.dz

Table des matières

Chapitre 4

Séries et Suites de Fonctions

4.1 Suite de fonctions

Définition 1. *Soit l'ensemble*

$$\mathcal{F}(I, \mathbb{K}) = \{f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}\}.$$

On définie une suite de fonction notée f une application de la forme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \\ n &\longmapsto \quad f_n, \end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned} f_n : I &\longrightarrow \quad \mathbb{K} \\ x &\longmapsto f_n(x) \end{aligned}$$

Exemple 1. la famille de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \forall x \in [0,1] : \quad f_n(x) = \frac{nx+1}{n(x^2+n^2)},$$

est une suite de fonctions définie sur l'intervalle $I = [0, 1]$.

4.1.1 Convergence simple et uniforme des suites de fonctions

Définition 2 (Convergence simple)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction, on dit qu'elle converge simplement ver f sur l'intervalle I si*

$$\forall x \in I : \quad \operatorname*{Lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

autrement dit

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N(\varepsilon, x) \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

et on note

$$f_n \xrightarrow[n\infty]{I} f.$$

Définition 3 (Convergence uniforme)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction, on dit qu'elle converge uniformément ver f sur l'intervalle I si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall x \in I, \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

et on note

$$f_n \underset{n\infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} f.$$

Définition 4 (Norme de la convergence uniforme)**.** *On appelle norme de la convergence uniforme la norme définie sur $\mathcal{F}(I;\mathbb{K})$ par*

$$\|f\| = \operatorname*{Sup}_{x\in I} |f(x)|, \quad f \in \mathcal{F}(I;\mathbb{K}).$$

Proposition 1. *La suite de fonction $(f_n)_n$ converge uniformément sur I si et seulement si*

$$\|f_n - f\| = \operatorname*{Sup}_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exemple 2.

1. Soit la suite de fonction définie par $f_n(x) = x^n$ avec $x \in I = [0,1]$, on a

$$\operatorname*{Lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \begin{cases} 0 \ Si \ x \in [0,1[\\ 1 \ Si \ x = 1 \end{cases}$$

donc f_n converge simplement ver f, de plus

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \max\left[\operatorname*{Sup}_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)|, |f_n(1) - f(1)|\right] \\ &= \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1[} |x^n| \\ &= 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

donc f_n ne converge pas uniformément ver f.

2. Soit la suite de fonction définie par $f_n(x) = x^n$ avec $x \in I = [0,a]$ avec $0 < a < 1$, on a

$$\operatorname*{Lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = 0, \quad \forall x \in I,$$

donc f_n converge simplement ver f, de plus

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \operatorname*{Sup}_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \operatorname*{Sup}_{x\in[0,a]} |x^n| \\ &= a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

donc f_n converge pas uniformément ver f sur I.

3. Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ définie sur $I = \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname*{Lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

donc f_n converge simplement ver la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, de plus

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f(x)\| &= \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

donc on a la convergence uniforme de f_n ver la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

4. Soit la suite de fonction f_n définie sur $I = [0, 1[$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & Si\ x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \\ -n^2 x + 2n & Si\ x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ \\ 0 & Si\ x \in]\frac{2}{n}, 1[\end{cases}$$

lorsque n tend ver $+\infty$ la fonction f_n tend ver zéro car l'intervalle $]\frac{2}{n}, 1[$ tend ver $[0, 1[$ donc on a la convergence simple ver la fonction nulle, de plus

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f(x)\| &= \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1[} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \max \left[\operatorname*{Sup}_{x \in [0,1/n[} |f_n(x) - f(x)|, \operatorname*{Sup}_{x \in]1/n,2/n]} |f_n(x) - f(x)|, \operatorname*{Sup}_{x \in]2/n,1[} |f_n(x) - f(x)| \right] \\ &= \max \left[\operatorname*{Sup}_{x \in [0,1/n[} n^2 x, \operatorname*{Sup}_{x \in]1/n,2/n]} (-n^2 x + 2n) \right] \\ &= n \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

donc nous n'avons pas la convergence uniforme.

5. Soit la suite de fonction f_n définie sur $I = [0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0\ Si\ x = 0 \\ 1\ Si\ x \in]0, 1/n[\\ 0\ Si\ x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

lorsque n tend ver $+\infty$ l'intervalle $]1/n, 1]$ tend ver $[0, 1]$ donc la suite f_n converge simplement ver la fonction $f \equiv 0$, de plus

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f(x)\| &= \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1[} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \max \left[|f_n(0) - f(0)|, \operatorname*{Sup}_{x \in]0,1/n]} |f_n(x) - f(x)|, \operatorname*{Sup}_{x \in]1/n,1[} |f_n(x) - f(x)| \right] \\ &= 1 \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

donc nous n'avons pas la convergence uniforme.

6. Soit la suite de fonctions f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{n \cos(nx)}{\sqrt{n}}$$

$f_n(x)$ n'admet pas de limite quand n tend ver $+\infty$ donc nous n'avons ni la convergence simple ni la convergence uniforme.

7. Soit la suite de fonction f_n définie sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2 x^2},$$

on a

$$\operatorname*{Lim}_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$$

donc on a la convergence simple ver la fonction nulle, de plus

$$g_n'(x) = (f_n(x) - f(x))' = \left(\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right)' = 2n\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \iff x = \pm\frac{1}{n},$$

et donc

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - f(x)\| &= \max\left[\operatorname*{Lim}_{x\to-\infty}|g_n(x)|, \left|g_n\left(-\frac{1}{n}\right)\right|, \left|g_n\left(+\frac{1}{n}\right)\right|, \operatorname*{Lim}_{x\to+\infty}|g_n(x)|\right] \\ &= \max[0,1,1,0] \\ &= 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

donc nous n'avons pas la convergence uniforme.

Proposition 2. *Si une suite de fonction converge uniformément sur un intervalle I alors elle converge simplement sur le même intervalle. La réciproque est fausse.*

Proposition 3 (Critère de Cauchy de la convergence uniforme)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction, elle converge uniformément sur I si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N(\varepsilon), \quad \forall m \in \mathbb{N} \Longrightarrow |f_n(x) - f_{n+m}(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in I.$$

Autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N(\varepsilon), \quad \forall m \in \mathbb{N} \Longrightarrow \|f_n - f_{n+m}\| \leq \varepsilon.$$

4.2 Propriétés de suites de fonctions uniformément convergente, Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Proposition 4 (Continuité)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que f_n converge uniformément ver une fonction f sur I. Si f_n est continue en $x_0 \in I$ (respectivement sur I) alors f est continue en x_0 (respectivement sur I).*

Proposition 5. *Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que f_n converge uniformément ver une fonction f sur I*

Remarque 1.

1. Si f_n converge simplement ver f et f_n continue cela n'implique pas que f est continue en x_0.
2. Si f_n est continue et f discontinue alors on conclus que f_n ne converge pas uniformément ver f.

$\triangle$

Proposition 6 (De Dini)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, continue sur I, converge simplement ver une fonction f sur I et f_n est une suite croissante sur I. Alors f_n converge uniformément ver f sur I.*

Proposition 7 (Intégration)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que f_n converge uniformément ver une fonction f sur I et f_n intégrable sur I. Alors f est intégrable sur I et pour tout intervalle fermé bornée $[a,b] \subset I$ on a*

$$\operatorname*{Lim}_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \operatorname*{Lim}_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Corollaire 1. *Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle $I = [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ tel que f_n converge uniformément ver une fonction f sur I et f_n intégrable sur I.*
Soit $a \in I$ et soit les deux fonctions

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Alors F_n converge uniformément ver F sur I.

Proposition 8 (Dérivabilité). *Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que*

1. *f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I pour tout n.*
2. *f_n' converge uniformément ver une fonction g sur I.*

Alors f_n converge uniformément ver une fonction f sur I tel que $f'(x) = g(x)$ autrement dit

$$\left(\operatorname*{Lim}_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \operatorname*{Lim}_{n\to+\infty} f_n'(x).$$

Proposition 9 (Dérivabilité). *Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que*

1. *f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I pour tout n.*
2. *f_n converge uniformément ver une fonction f sur I.*

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f_n' converge uniformément ver f'.

4.3 Séries de Fonctions

4.3.1 Séries de fonctions, Convergence simple et Convergence absolue

Définition 5 (Série de Fonctions). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On appelle une série de fonctions notée $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ le couple de deux suites de fonctions $(f_n)_n$ et $(S_n)_n$. La série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est de même nature que la suite $(S_n)_n$.

Définition 6 (Domaine de convergence d'une série de fonctions). *On appelle domaine de convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ l'ensemble des $x_0 \in I$ tel que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge.*

Définition 7 (Convergence Simple). *On dit que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur I ver une fonction $S(x)$ si pour chaque x_0 fixé dans I la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge, autrement dit*

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N(\varepsilon, x) \Longrightarrow |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N(\varepsilon, x) \Longrightarrow \left|\sum_{k\geq n+1} f_k(x)\right| \leq \varepsilon.$$

Proposition 10 (Critère de Cauchy). *Soit la série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ définie sur un intervalle I à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, elle converge simplement sur I si et seulement si elle est de Cauchy, autrement dit*

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N(\varepsilon, x), \quad \forall p \in \mathbb{N} \Longrightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| \leq \varepsilon.$$

Définition 8 (Série absolument convergente). *On dit que la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *est absolument convergente si* $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ *converge simplement.*

Proposition 11. *Si la suite de fonctions* $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *converge absolument alors elle converge simplement.*

Remarque 2. Pour montrer la convergence simple on applique les critère de convergence des séries numérique au niveau de la séries $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$. △

Exemple 3. Soit la séries de fonction définie par

$$\sum_{n\geq 1} \frac{ne^{-nx}}{x^2n^2+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{ne^{-nx}}{x^2n^2+1} = \begin{cases} 0 & Si\ x>0 & \text{(Condition nécessaire de convergence vérifiée)} \\ 1 & Si\ x=0 & \text{(Diverge)} \\ +\infty & Si\ x<0 & \text{(Diverge)} \end{cases}$$

Dans le cas ou $x > 0$ on pose $f_n(x) = \dfrac{ne^{-nx}}{x^2n^2+1} > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{x^2(n+1)^2+1} \frac{x^2n^2+1}{ne^{-nx}} = e^{-x} < 1$$

on applique le critère de D'Alembert on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \dfrac{ne^{-nx}}{x^2n^2+1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.3.2 Convergence uniforme d'une série de fonction

Définition 9 (Convergence uniforme). *Soit la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$*, on dit qu'elle converge uniformément si la suite de fonction* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ *converge uniformément ver* $S(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$*, autrement dit*

$$\|S_n - S\| = \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\in I} \left| \sum_{k\geq n+1} f_k(x) \right| = \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition 12 (Critère de Cauchy). *Soit la série de fonction* $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *définie sur un intervalle* I *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, elle converge uniformément sur* I *si et seulement si elle est de Cauchy, autrement dit*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N} \Longrightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in I.$$

ce qui est de même que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N} \Longrightarrow \left\| \sum_{k=n}^{n+p} f_k \right\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 13. *Si la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *converge uniformément sur* I *alors elle converge simplement sur* I*, la réciproque est fausse.*

Exemple 4. Soit la série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ définie par

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{2^n x^n + x^2 + nx}, \quad \forall x \in [1, +\infty[,$$

on a

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k\geq n+1} f_k \right\| &\leq \sum_{k\geq n+1} \|f_k\| \\
&= \sum_{k\geq n+1} \left\| \frac{e^{-nx}}{2^n x^n + x^2 + nx} \right\| \\
&\leq \sum_{k\geq n+1} \left\| \frac{e^{-nx}}{2^n x^n} \right\| \\
&\leq \sum_{k\geq n+1} \frac{e^{-n}}{2^n} \\
&= \frac{\frac{e^{-(n+1)}}{2^{(n+1)}}}{1 - \frac{e^{-1}}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

donc la série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$.

Remarque 3. Pour monter la convergence uniforme sur I de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ il faut montrer que

$$\left\| \sum_{k\geq n+1} f_k \right\| = \operatorname*{Sup}_{x\in I} \left| \sum_{k\geq n+1} f_k(x) \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

△

4.3.3 Convergence normale d'une série de fonction

Définition 10 (Convergence normale)**.** *Soit la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *définie sur* $I \subset \mathbb{R}$*, on dit qu'elle converge normalement sir* I *si la série numérique définie par* $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|$ *converge, avec*

$$\|f_n\| = \operatorname*{Sup}_{x\in I} |f_n(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 5.

$$\sum_{n\geq 0} x^n, \quad x \in [-a, +a], \quad 0 < a < 1.$$

on pose $f_n(x) = x^n$ on a

$$\|f_n\| = a^n$$

vu que $a \in]0, 1[$ donc $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|$ est une série géométrique convergente et donc $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est normalement convergente.

Proposition 14. *La convergence normale sur un intervalle I implique la convergence uniforme sur l'intervalle I, la réciproque est fausse.*

Proposition 15 (Critère de Weierstrass). *Soit $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ une série de fonctions définie sur un intervalle I telle que*

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_0, \quad \forall x \in I : \quad |f_n(x)| \leq C_n,$$

et $\sum C_n$ une série numérique convergente. Alors $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est normalement convergente sur I

Exemple 6.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(nx)}{n^4+1}$$

on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad \left|\frac{\sin(nx)}{n^4+1}\right| \leq \frac{1}{n^4} = C_n$$

et $\sum C_n$ est une série de Riemann convergente donc $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(nx)}{n^4+1}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Proposition 16 (D'Abel). *Soit $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ une série de fonction définie sur I telle que*

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_0, \quad forall x \in I : \quad f_n(x) = u_n(x)v_n(x),$$

et

1. *La suite de fonction $U_n(x) = \sum_{k=N_0}^{n} u_k(x)$ est bornée autrement dit*

$$\forall x \in I, \quad \forall n \geq N_0 : \quad |U_n(x)| \leq M, \quad M \in \mathbb{R}_+^*.$$

2. *La suite numérique $\|v_n(x)\|$ tend ver zéro quand n tend ver $+\infty$.*
3. *La série $\sum_{n\geq N_0} \|v_n - v_{n+1}\|$ converge.*

Alors la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est uniformément convergente sur I.

Exemple 7. Soit la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ tel que

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2x^2+1}, \quad \forall x \in I = [\pi/2, 3\pi/2],$$

on pose

$$u_n(x) = \sin(nx), \quad v_n(x) = \frac{1}{n^2x^2+1}$$

1. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \sin(nx) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{inx}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{ix}\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{ix}\frac{(1-e^{i(n+1)x})(1-e^{-ix})}{\left|1-e^{ix}\right|}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{ix}\frac{(1-e^{i(n+1)x)(1-e^{-ix})}}{\left|1-e^{ix}\right|}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}-1-e^{i(n+2)x+e^{i(n+1)x}}}{(1-\cos(x))^2+(\sin(x))^2}\right) \\
&= \frac{\sin(x)-1-\sin((n+2)x)+\sin((n+1)x)}{(1-\cos(x))^2+(\sin(x))^2}
\end{aligned}$$

et donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| \leq \frac{4}{(1-\cos(x))^2 + (\sin(x))^2} = \frac{2}{1-(\cos(x))^2} = \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$

qui est bornée car $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

2. On a

$$\|v_n(x)\| \leq \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$\|v_n(x)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\|v_n - v_{n+1}\| &= \underset{x\in[\pi/2,3\pi/2]}{Sup} \left|\frac{1}{n^2x^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2x^2+1}\right| \\
&= \underset{x\in[\pi/2,3\pi/2]}{Sup} \left|\frac{(n+1)^2x^2+1-n^2x^2}{\left(n^2x^2+1\right)\left((n+1)^2x^2+1\right)}\right| \\
&= \underset{x\in[\pi/2,3\pi/2]}{Sup} \left|\frac{2nx^2+x^2+1}{\left(n^2x^2+1\right)\left((n+1)^2x^2+1\right)}\right| \\
&\leq \frac{3\pi n+1}{\left(n^2(\pi/2)^2+1\right)\left((n+1)^2(\pi/2)^2+1\right)} \sim \frac{16}{3\pi^3}\frac{1}{n^3}, \quad \text{(Riemann Converge)}
\end{aligned}$$

donc $\sum_{n\geq 1} \|v_n - v_{n+1}\|$ converge.

On utilise le Critère d'Abel on en déduit que $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniformément sur I.

Corollaire 2. *Soit $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ une série de fonction définie sur I telle que*

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_0, \quad \forall x \in I: \quad f_n(x) = u_n(x)v_n(x),$$

et

1. *La suite de fonction $U_n(x) = \sum_{k=N_0}^{n} u_k(x)$ est bornée autrement dit*

$$\forall x \in I, \quad \forall n \geq N_0: \quad |U_n(x)| \leq M, \quad M \in \mathbb{R}_+^*.$$

2. *La suite numérique $\|v_n(x)\|$ tend ver zéro quand n tend ver $+\infty$.*
3. *la suite de fonction $(v_n(x))_n$ est une suite de fonctions monotone en n.*

Alors la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est uniformément convergente sur I.

Exemple 8.

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}, \quad x \in I = [1, +\infty[.$$

on pose

$$u_n(x) = (-1)^n, \quad v_n(x) = \frac{1}{n^x},$$

on a $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ est bornée, et

$$\|v_n\| = \operatorname{Sup}_{x\in I}\left|\frac{1}{n^x}\right| = \frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$\|v_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

de plus $v_n(x) = e^{x\ln(n)}$vu que $x > 0$ donc v_n est strictement croissante en n.On utilise le corollaire précédent on en conclus que $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^x}$ converge uniformément sur I.

Proposition 17 (Continuité). *Soit* $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *une série de fonctions sur l'intervalle* I *telle que*

1. $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *converge uniformément sur* I *ver une certain fonction* $S(x)$.
2. $f_n(x)$ *est continue en* $x_0 \in I$ *(respectivement sur* I*) pour tout* n

Alors $S(x)$ *est continue en* x_0 *(respectivement sur* I*).*

Proposition 18 (Dérivabilité). *Soit* $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *une série de fonctions sur l'intervalle* I *telle que*

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ f_n *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I.
2. $\sum_{n\geq 0} f'_n(x)$ *converge uniformément sur* I.
3. *Il existe* $x_0 \in I$ *tel que* $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ *converge.*
4. $f_n(x)$ *est continue en* $x_0 \in I$ *(respectivement sur* I*) pour tout* n

Alors

1. $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *converge uniformément sur* I.
2. $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *et*

$$\left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right)' = \sum_{n\geq 0} f'_n(x).$$

Proposition 19 (Intégration). *Soit* $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *une série de fonctions sur l'intervalle* I *telle que*

1. $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *converge uniformément sur* I *ver une certain fonction* $S(x)$.
2. $f_n(x)$ *est intégrable sur* I *pour tout* n

Alors

1. $S(x)$ *est intégrable sur* I.
2. *Soit* $x_0 \in I$ *alors pour tout* $x \in I$ *on a*

$$\sum_{n\geq 0}\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \overset{I}{\longrightarrow} \int_{x_0}^{x} S(t)dt = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n\geq 0} f_n(t)\right)dt.$$