Mekki HOUBAD

Séries Numériques

Chapitre III d'Analyse III et IV

Septembre 2016

Département de Mathématiques
Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen 13000
Algérie
m.houbad@gmail.com

Table des matières

Chapitre 3

Séries Numériques

3.1 Généralités

On rappelle les deux majoration suivante, lorsque x est au voisinage de $+\infty$

$$e^x \geq Cst\, x^\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad ln(x) \leq Cst\, x^\beta, \quad \forall \beta > 0$$

Définition 1 (d'une série numérique). *Soit $(u_n)_n$ une suite numérique on note par $(S_n)_n$ la suite*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

On appelle une série numérique de terme générale u_n la couple de deux suites (u_n, S_n) liéé par la relation (3.1), S_n st dit la somme partielle jusqu'a le rang n.
On note aussi la série par

$$\sum_{n\geq 0} u_n$$

Définition 2 (la convergence d'une série). *On dit que la série*

$$\sum_{n\geq 0} u_n$$

est convergente si et seulement si la suite $(S_n)_n$ est convergente

Exemple 1.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$
   on utilise la décomposition en éléments simples on a

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \Longrightarrow a = 1, \quad b = -1$$

   donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left[\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}\right] = \lim_{N\to+\infty} \left[\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k}\right] \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left[1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ vaut 0 ou 1 elle n'admet pas une limite, donc elle diverge.

3. $\sum_{n\geq 0} r^n$ avec $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Série géométrique, on sais que pour $r \neq 1$

$$\sum_{k=p}^{q} r^k = r^p \, \frac{1-r^{q-p+1}}{1-r}$$

ainsi

$$\sum_{n\geq 0} r^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \begin{cases} 0 & \text{Si } 0 \leq r < 1 \\ +\infty & \text{Si } r > 1 \end{cases}$$

4. $\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{tg}\left(2^{-n-1}\right)}{\cos\left(2^{-n}\right)}$. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\left(2^{-n-1}\right) = \frac{\sin\left(2^{-n-1}\right)}{\cos\left(2^{-n-1}\right)} &= \frac{\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\cos\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\cos\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\cos\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - \cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\cos\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)} \\
&= \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) - \cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\operatorname{tg}\left(2^{-n-1}\right)}{\cos\left(2^{-n}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^n}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

ainsi

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{tg}\left(2^{-n-1}\right)}{\cos\left(2^{-n}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\right) - \lim_{n\to+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\right).$$

5. $\sum_{n\geq 1} \frac{(n-2)^2}{n!}$

Définition 3 (Opérations sur les séries**).**

1. *On définit la somme des deux série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *la série*

$$\sum u_n + v_n.$$

2. *On définit le produit de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *par un scalaire* λ *par*

$$\sum_{n\geq 0} \lambda u_n.$$

3. *On définit le produit des deux série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *la série définie par*

$$\sum_{n\geq 0} \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}.$$

3.2 Convergence Et Propriétés

Définition 4 (De la convergence)**.** *On dit que la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge vers* S *si la suite*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

converge ver S. S_n *s'appelle la somme partielle de la série.*

Définition 5 (De la convergence)**.** *On dit que la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge vers* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *si la suite*

$$\forall \varepsilon < 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \left| \sum_{n\geq 0} u_n - S \right| \leq \varepsilon$$

qui peut être mise sous la forme

$$\forall \varepsilon < 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \left| \sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} u_n \right| \leq \varepsilon$$

la valeur

$$R_\varepsilon = \sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{+\infty} u_n,$$

s'appelle le reste le reste de la série.

Proposition 1. *Sin on ajoute ou on retranche un nombre finie de termes la nature de la série ne change pas, par contre sa somme (limite de la série) change.*

Proposition 2. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux série alors*

1. *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge alors* $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ *converge.*
2. *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *diverge alors* $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ *diverge.*
3. *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *diverge alors on peut rien conclure sur la nature de* $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$.

3.2.1 Condition nécessaire et suffisante de convergence

Théorème 1. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série.*

1. *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge alors* $\operatorname{Lim}_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. *Si* $\operatorname{Lim}_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ *alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge.*
3. *Si* $\operatorname{Lim}_{n\to+\infty} u_n = 0$ *alors on peut rien conclure sur la nature de* $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exemple 2. Soit la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{n^2+1}(-1)^n$, $u_n = \frac{e^n}{n^2+1}(-1)^n$, vu que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^2+1}(-1)^n = +-\infty \neq 0,$$

donc cette série diverge.

3.2.2 Propriétés des séries numériques convergente

Proposition 3. *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux série alors si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ converge ver $\sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n$.*

Proposition 4 (Cauchy). *On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N(\varepsilon), \quad \forall p \geq 1 \Longrightarrow \left| \sum_{n=N(\varepsilon)+1}^{N(\varepsilon)+p} u_n \right| \leq \varepsilon.$$

Proposition 5. *Dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ toute série de Cauchy converge et toute suite convergente est de Cauchy.*

Définition 6 (Série absolument convergente)**.**

1. *On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente si $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.*
2. *On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est semi-absolument si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ diverge.*

Théorème 2. *Toute suite absolument convergente dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est convergente.*

Exemple 3. Soit la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n e^n}{3^n}$, le terme générale $u_n = \frac{(-1)^n e^n}{3^n}$ on a

$$|u_n| = \left| \frac{(-1)^n e^n}{3^n} \right| = \frac{e^n}{3^n} = \left(\frac{e}{3}\right)^n$$

la série du terme générale $\left(\frac{e}{3}\right)^n$ est une série géométrique convergente car $\frac{e}{3} \in]-1, +1[$ donc $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge et donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente donc elle converge.

3.3 Séries A Terme Positif

Définition 7. *On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à terme positive si*

$$\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N : \quad u_n \geq 0.$$

Exemple 4. Soit la série $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{-n}}{n^2-99}$, vu que

$$\forall n \geq 10 : \quad \frac{e^{-n}}{n^2-99} \geq 0$$

alors la série $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{-n}}{n^2-99}$ est à terme positive.

Proposition 6 (Série géométrique). *La série* $\sum_{n\geq p} r^n$ *converge si et seulement si* $r \in]-1+1[$ *et dans ce cas on a*

$$\sum_{n\geq p} r^n = \frac{r^p}{1-r}.$$

Proposition 7 (Monotonie). *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à terme positive alors la suite*

$$S_n = \sum_{n=0}^{n} u_n$$

est une suite croissante à partir de certain rang $n = N$. *De plus si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est majorée alors elle est convergente.*

Exemple 5. Soit la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec

$$u_n = \frac{e^{-n}}{n!2^n}$$

vu que $u_n \leq \frac{1}{2^n}$ alors

$$\sum_{n\geq 0} u_n \leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = 2$$

donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à terme positive majorée donc elle est convergente.

Proposition 8 (Comparaison). *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux série à terme positive tel que*

$$\exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq N \in \mathbb{N}: \quad u_n \leq v_n.$$

1. *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge alors* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *diverge.*
2. *Si* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*

Exemple 6. Soit la série à terme positive suivante $\sum_{n\geq 1} \frac{2+\sin(n)}{n^2 3^n}$ on peut faire la majoration

$$\frac{2+\sin(n)}{n^2 3^n} \leq \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}$$

la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{n-1}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$ est une série géométrique convergente donc on utilise le critère de comparaison, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2+\sin(n)}{n^2 3^n}$ converge.

Proposition 9 (Avec l'intégrale). *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à terme positive, on définie la fonction* f *définie de* $[0, +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *satisfait*

$$\forall n \geq 0: \quad u_n = f(n).$$

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ *sont de la même nature.*

Exemple 7. Soit la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ on définie la fonction

$$f(x)=\frac{1}{x^\alpha};\quad \forall x\in[1,+\infty[$$

on a

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx=\operatorname*{Lim}_{A\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$$
$$=\begin{cases}\operatorname*{Lim}_{A\to+\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^A & Si\ \alpha\neq 1\\ \operatorname*{Lim}_{A\to+\infty}\ln(x)|_1^A & Si\ \alpha=1\end{cases}=\begin{cases}\operatorname*{Lim}_{A\to+\infty}\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha} & Si\ \alpha\neq 1\\ \operatorname*{Lim}_{A\to+\infty}\ln(A) & Si\ \alpha=1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-\frac{1}{1-\alpha} & Si\ \alpha>1\ converge\\ +\infty & Si\ \alpha<1\quad diverge\\ +\infty & Si\ \alpha=1\quad diverge\end{cases}$$

donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ si et seulement si $\alpha>1$.

Proposition 10 (Riemann). *La série à terme positive* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ *dite série de Riemann converge si et seulement si* $\alpha>1$.

Définition 8. *Soit* $\sum_{n\geq 0}u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0}v_n$ *deux série à terme positive, on dit que ces deux séries sont équivalente si les deux terme générales* u_n *et* v_n *sont équivalent, autrement dit*

$$\operatorname*{Lim}_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1,$$

et on note $u_n\sim v_n$.

Proposition 11 (Equivalence). *Deux séries à terme positive qui sont équivalente sont de la même nature.*

Exemple 8. Soit la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n n^n}{e^n n!}$, on a

$$|u_n|=\left|\frac{(-1)^n n^n}{\sqrt{n^3}e^n n!}\right|=\frac{n^n}{\sqrt{n^3}e^n n!},$$

utilise la formule de Stirling qui donne un équivalence de $n!$ au voisinage de $+\infty$:

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n},$$

on peut déduire alors que

$$|u_n|\sim\frac{n^n}{\sqrt{n^3}e^n\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^2},$$

La Série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ,donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^2}$ converge, et donc $\sum_{n\geq 1}|u_n|$ converge, alors $\sum_{n\geq 1}u_n$ est absolument convergente, et finalement $\sum_{n\geq 1}u_n$ est une série converge.

Exemple 9. Soit la série à terme positive $\sum_{n\geq 1} 2-2\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ on utilise le développement limité de cos au voisinage de zéro à savoir

$$\cos(x) \underset{\mathcal{V}(0)}{\sim} 1-\frac{x^2}{2}$$

on en déduit que

$$2-2\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

or la série du terme générale $1/n^2$ est une série de Riemann convergente, donc on utilise le critère de comparaison on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} 2-2\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est une série convergente.

Proposition 12 (Critère de Riemann**).** *Soit $\sum u_n$ une série à terme positive tel que*

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lim}}\, n^{\alpha}u_n = l.$$

1. *Si l existe fini non nul alors :*
   a. *Si $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge.*
   b. *Si $\alpha \leq 1$ alors $\sum u_n$ diverge.*
2. *Si $l = 0$ et $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge.*
3. *Si $l = +\infty$ et $\alpha \leq 1$ alors $\sum u_n$ diverge.*

Preuve.

1. On suppose que
$$\underset{n\to\infty}{\text{Lim}}\, n^{\alpha}u_n = l,$$
avec l existe fini non nul, alors
$$\underset{n\to\infty}{\text{Lim}}\, \frac{u_n}{1/n^{\alpha}} = 1 \iff u_n \sim \frac{l}{n^{\alpha}}$$
or $\sum \frac{l}{n^{\alpha}}$ est une serie de Riemann converge si et seulement si $\alpha > 1$, on applique le critère de comparaison on en déduit que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. On suppose que que $\alpha > 1$
$$\underset{n\to\infty}{\text{Lim}}\, n^{\alpha}u_n = 0,$$
donc
$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*; \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad n^{\alpha}u_n \leq C,$$
donc
$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*; \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad u_n \leq \frac{C}{n^{\alpha}},$$
la série $\sum \frac{C}{n^{\alpha}}$ est une série de Riemann convergente on applique le critère de comparaison on en déduit que $\sum u_n$ converge.
3. On suppose que que $\alpha \leq 1$
$$\underset{n\to\infty}{\text{Lim}}\, n^{\alpha}u_n = +\infty,$$
donc
$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*; \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad n^{\alpha}u_n \geq C,$$
donc
$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*; \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad u_n \geq \frac{C}{n^{\alpha}},$$
la série $\sum \frac{C}{n^{\alpha}}$ est une série de Riemann divergente on applique le critère de comparaison on en déduit que $\sum u_n$ diverge.

□

Exemple 10.

Proposition 13 (Critère de comparaison indirecte)**.** *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux série à terme positive tel que*

$$\exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors

1. *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*
2. *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*

Preuve. On suppose que

$$\exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

donc

$$\exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}.$$

donc la suite u_n/v_n est décroissante ce qui donne que

$$\exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_N}{v_N} = C.$$

alors

$$\exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad u_n \leq C v_n$$

on applique le critère de comparaison alors

1. Si $\sum v_n$ converge la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

□

Théorème 3 (d'Alembert)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à terme positive tel que*

1. *Si il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que*

$$\exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha,$$

   alors $\sum u_n$ converge.

2. *Si il existe $\alpha > 1$ tel que*

$$\exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \alpha,$$

   alors $\sum u_n$ diverge.

Preuve.

1. Si il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que

$$\exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq n : \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha,$$

   cela donne que

$$\exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad u_{n+1} \leq \alpha u_n$$

   et donc

$$\exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad u_n \leq (\alpha^{N-1} u_N)\alpha^n$$

   or $\sum \alpha^n$ est une série géométrique convergente on applique le critère de comparaison on en déduit que alors $\sum u_n$ converge.

2. Si il existe $\alpha > 1$ tel que
$$\exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq n : \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \alpha,$$
cela donne que
$$\exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad u_{n+1} \geq \alpha u_n$$
et donc
$$\exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N : \quad u_n \geq (\alpha^{N-1} u_N)\alpha^n$$
or $\sum \alpha^n$ est une série géométrique divergente on applique le critère de comparaison on en déduit que alors $\sum u_n$ diverge.

□

Proposition 14 (Critère d'Alembert). *Soit $\sum u_n$ une série à terme positive tel que*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

1. *Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.*
3. *Si $l = 1$ on a un doute sur la nature de $\sum u_n$.*

Preuve. On suppose que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$
donc
$$\forall \varepsilon > 0; \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| \leq \varepsilon$$
ce qui donne
$$\forall n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow (l-\varepsilon)u_n \leq u_{n+1} \leq (l+\varepsilon)u_n$$
alors
$$\forall n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow (l-\varepsilon)^n \left[(l-\varepsilon)^{N(\varepsilon)-1} u_{N(\varepsilon)}\right] \leq u_n \leq (l+\varepsilon)^n \left[(l+\varepsilon)^{N(\varepsilon)-1} u_{N(\varepsilon)}\right],$$

1. Si $l < 1$ alors on peut choisir ε tel que $l + \varepsilon < 1$, or la série $\sum (l+\varepsilon)^n$ est une série géométrique convergente on applique le critère de comparaison alors on en déduit que la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $l > 1$ alors on peut choisir ε tel que $l - \varepsilon > 11$, or la série $\sum (l-\varepsilon)^n$ est une série géométrique divergente on applique le critère de comparaison alors on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.
3. Si $l = 1$ on a un doute sur la nature de $\sum u_n$. Un exemple
La série de Riemann $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ vérifier
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$
portant elle diverge pour $\alpha \leq 1$ et elle converge pour $\alpha > 1$.

□

Exemple 11. Soit la série $\sum_{n\geq 2} \frac{n^2+2n+3}{n!} e^n$ on pose $u_n = \frac{n^2+2n+3}{n!} e^n$ donc
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + 2(n+1) + 3}{(n+1)!} e^{n+1} \frac{n!}{(n^2+2n+3)e^n} = 0 < 1,$$
donc la série converge.

Proposition 15 (Bertrand). *On appelle série de Bertrand la série de la forme*

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}\left(\mathrm{Ln}(n)\right)^{\beta}}.$$

Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Preuve. Le terme générale

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha}\left(\mathrm{Ln}(n)\right)^{\beta}} = \frac{1}{n^{(\alpha+1)/2}} \frac{n^{(-\alpha+1)/2}}{\left(\mathrm{Ln}(n)\right)^{\beta}}$$

1. Si $\alpha > 1$ alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{(-\alpha+1)/2}}{\left(\mathrm{Ln}(n)\right)^{\beta}} = 0$$
donc
$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*;\quad \exists N \in \mathbb{N};\quad \forall n \geq N :\quad \frac{n^{(-\alpha+1)/2}}{\left(\mathrm{Ln}(n)\right)^{\beta}} \leq C,$$
donc
$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*;\quad \exists N \in \mathbb{N};\quad \forall n \geq N :\quad u_n \leq C\frac{1}{n^{(\alpha+1)/2}},$$
vu que $\alpha > 1$ donc la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{(\alpha+1)/2}}$ converge, on applique le critère de comparaison on en déduit que $\sum u_n$ converge pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.
2. Si $\alpha < 1$ alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{(-\alpha+1)/2}}{\left(\mathrm{Ln}(n)\right)^{\beta}} = +\infty$$
donc
$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*;\quad \exists N \in \mathbb{N};\quad \forall n \geq N :\quad \frac{n^{(-\alpha+1)/2}}{\left(\mathrm{Ln}(n)\right)^{\beta}} \leq C,$$
donc
$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*;\quad \exists N \in \mathbb{N};\quad \forall n \geq N :\quad u_n \geq C\frac{1}{n^{(\alpha+1)/2}},$$
vu que $\alpha < 1$ donc la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{(\alpha+1)/2}}$ diverge, on applique le critère de comparaison on en déduit que $\sum u_n$ diverge pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.
3. Si $\alpha = 1$ on a
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\left(\mathrm{Ln}(x)\right)^{\beta}}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_2^{A} \frac{1}{x\left(\mathrm{Ln}(x)\right)^{\beta}}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_2^{A} (Ln(x))'\left(\mathrm{Ln}(x)\right)^{-\beta}dx$$
$$= \begin{cases} \lim\limits_{A\to+\infty} \left.\dfrac{\left(\mathrm{Ln}(x)\right)^{1-\beta}}{1-\beta}\right|_2^A & Si\ \beta \neq 1 \\ \lim\limits_{A\to+\infty} Ln(Ln(x))|_2^A & Si\ \beta = 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\left(\mathrm{Ln}(A)\right)^{1-\beta}}{1-\beta} - \dfrac{\left(\mathrm{Ln}(2)\right)^{1-\beta}}{1-\beta} & Si\ \beta \neq 1 \\ \lim\limits_{A\to+\infty} Ln(Ln(A)) - Ln(Ln(2)) & Si\ \beta = 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{\left(\mathrm{Ln}(2)\right)^{1-\beta}}{1-\beta} & Si\ \beta > 1 \\ +\infty & Si\ \beta < 1 \\ +\infty & Si\ \beta = 1 \end{cases}$$

alors pour $\alpha = 1$ la série converge si et seulement si $\beta > 1$.

$\square$

Exemple 12. Soit la série $\sum u_n$ avec

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k\left(n^2\mathrm{Ln}(n)\right)^k},$$

alors

$$u_n \leq \frac{1}{n^2\mathrm{Ln}(n)}$$

or $\sum \frac{1}{n^2\mathrm{Ln}(n)}$ est une série de Bertrand convergente ($\alpha = 2 > 1$) donc on applique le critère de comparaison la série $\sum u_n$ est une série convergente.

Proposition 16 (Critère de Guass)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à terme positive tel que*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1. *Si $\lambda > 1$ alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\lambda < 1$ alors $\sum u_n$ diverge.*
3. *Si $\lambda = 1$ et $\mu < 1$ alors $\sum u_n$ diverge.*
4. *Si $\lambda = 1$ et $\mu > 1$ alors $\sum u_n$ converge.*

Proposition 17 (Raabe-Duhamel)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à terme positive tel que*

$$\underset{n\to+\infty}{\mathrm{Lim}}\ n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = \alpha$$

1. *Si $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\alpha < 1$ alors $\sum u_n$ diverge.*
3. *Si $\alpha = 1$ alors on a un doute sur la nature de la série $\sum u_n$.*

Théorème 4 (Racine n$^{\text{eme}}$ de Cauchy)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à terme positive*

1. *Si il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que*

$$\exists N \in \mathbb{N};\quad \forall n \geq n:\quad \sqrt[n]{u_n} \leq \alpha,$$

   alors $\sum u_n$ converge.
2. *Si il existe $\alpha > 1$ tel que*

$$\exists N \in \mathbb{N};\quad \forall n \geq n:\quad \sqrt[n]{u_n} \geq \alpha,$$

   alors $\sum u_n$ diverge.

Proposition 18 (Racine n$^{\text{eme}}$ de Cauchy)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à terme positive tel que*

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lim}}\ \sqrt[n]{u_n} = l.$$

1. *Si* $l < 1$ *alors* $\sum u_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$ *alors* $\sum u_n$ *diverge.*
3. *Si* $l = 1$ *on a un doute sur la nature de* $\sum u_n$.

Exemple 13. Soit la série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$, on pose $u_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$ on a alors

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2} < 1,$$

donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série convergente.

Proposition 19 (Critère logarithmique)**.** *Soit* $\sum u_n$ *une série à terme positive tel que*

$$\operatorname*{Lim}_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\ln(n)} = l$$

alors

1. *Si* $l < 1$ *la série* $\sum u_n$ *diverge.*
2. *Si* $l > 1$ *la série* $\sum u_n$ *converge.*
3. *Si* $l = 1$ *on a un doute sur la nature de la série* $\sum u_n$.

3.4 Séries A Terme Quelconque

Définition 9. *On dit que* $\sum u_n$ *est une série à terme quelconque si le terme générale* u_n *change de signe au voisinage de* $+\infty$.

Exemple 14. la série $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ est une série à terme quelconque.

Théorème 5 (Critère D'Abel)**.** *Soit la série* $\sum u_n$ *tel que le terme générale* u_n *ce décompose sous la forme*

$$u_n = v_n w_n$$

on pose

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Alors si

1. *La suite* U_n *est bornée*
2. *La suite* v_n *à variation bornée autrement dit*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* : \quad \sum_{n\geq 0} |v_{n+1} - v_n| \leq M$$

3. *La suite* v_n *tend ver zéro quand* n *tend ver l'infinie.*

Alors la série $\sum u_n$ *est une série convergente.*

Théorème 6 (Critère Dirichlet-Abel)**.** *Soit la série* $\sum u_n$ *tel que le terme générale* u_n *ce décompose sous la forme*

$$u_n = v_n w_n$$

on pose

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Alors si

1. *La suite* U_n *est bornée*
2. *La suite* v_n *est croissante ou décroissante*
3. *La suite* v_n *tend ver zéro quand n tend ver l'infinie.*

Alors la série $\sum u_n$ *est une série convergente.*

Théorème 7 (Critère de Liebniz)**.** *Les deux série*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\theta n)}{n^{\alpha}},$$
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\beta n)}{n^{\alpha}}, \quad \beta \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Définition 10 (Séries Alternées)**.** *On appelle une série alterné une série de la forme* $\sum (-1)^n v_n$ *avec* $v_n \geq 0$.

Théorème 8 (Liebniz)**.** *Soit* v_n *une suite décroissante au voisinage de l'infinie avec* $\operatorname*{Lim}_{n\to+\infty} v_n = 0$ *alors la série*

$$\sum (-1)^n v_n$$

converge et de plus

$$|S_n - S| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k \right| \leq V_{n+1}.$$

3.4.1 Utilisation du développement asymptotique :

On utilisée pour les séries à termes quelconques pour lesquelles les critères précédents ne s'appliquent pas. Dans de nombreuses situations, on conclut sur la nature d'une série en se ramenant à une série plus simple.
En utilisant le développement asymptotique ; il faut développer à un ordre suffisamment élevé pour obtenir un reste absolument convergent.

Exemple 15. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ avec le terme générale

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}}$$

vu que $(-1)^n/n \to 0$ on fait le développement limité de $1/(1+u)$ au voisinage de zéro ce qui donne

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2),$$

donc

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\left[1 - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

ce qui peut être mise sous la forme

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

la série $\sum(-1)^n/n$ est une série alternée convergente, $\sum 1/n^2$ est une série de Riemann convergente et $\sum(-1)^n/n^3$ est une série absolument convergente donc $\sum u_n$ converge.