École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen
Département de la classe préparatoire
Niveau deuxième année, 2016 - 2017

ANALYSE III

Série de Travaux Dirigés Numéro 3

L'Analyse Vectoriel

Responsable du module: M.HOUBAD

25 Novembre 2019

Exercice 1. Donner le vecteur qui dirige la tangente et calculer la longueur des courbes suivante

$$(\mathcal{C}_1): \quad y^2 + x^2 + 3x - 4 = 0.$$

$$(\mathcal{C}_2): \quad x - y\,\mathrm{tg}\left(\frac{z}{a}\right) = 0, \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad a > 0, \quad R > 0.$$

$$(\mathcal{C}_3): \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad a > 0.$$

Exercice 2. Donner une paramétrisation, les vecteur directeur du plan tangent, le vecteur normale à et l'aire de $(\mathcal{S})$ dans le cas suivants

— $(\mathcal{S})$ est la demi Sphère définie par

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z > 0.$$

— $(\mathcal{S})$ est le Tor définit par

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2, \quad R > r > 0.$$

Exercice 3. Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe (OZ) de la portion du paraboloide de révolution

$$x^2 + y^2 = 2cz, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Exercice 4. Calculer les coordonnées du centre de gravité de la partie de la surface conique

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad z \geq 0.$$

Exercice 5.

1. Soit f un champs scalaire et U un champs de vecteurs. Montrer que
$$\mathrm{rot}(fU) = f\,\mathrm{rot}(U) + \nabla f \wedge U.$$
2. Montrer que si un champs de vecteur V est en tout point colinéaire à un champ de gradient, alors
$$V \cdot \mathrm{rot}(V) = 0.$$

Exercice 6. Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tel que $f(1) = 1$, V un champs de vecteur définit par

$$V(x, y, z) = f(r)\left(\; x, y, 2z \;\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Déterminer f tel que V soit un champs de rotationelle (on dit aussi qu'il est a flux conservatif).
2. A quoi sert la formule suivante
$$\int_0^1 t f(tX) \wedge X dt + Cst.$$

3. On peut appliquer la formule précédente dans cette exercice ?
4. Déterminer U le potentiel vecteur de V sachant que la troisième composante de U est nul et que $U(x, y, 0) = 0$.

Exercice 7. Soit le champs de vecteur

$$V(x, y, z) = (y^2 + z^2, -xy, -xz)$$

soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ vérifiée $\varphi(1) = 1$

1. Déterminer φ pour que champs de vecteur $\varphi(z)V(x, y, z)$ soit un champs de rotationelle.
2. Une fois φ choisie déterminer le potentiel vecteur associée au champs vectoriel $\varphi(z)V(x, y, z)$.

Exercice 8. Soit le champs de vecteur F définit par

$$F(x, y, z) = \left(e^x + y, 2y + x, 2z\right)$$

Montrer que F est un champs conservatif et déterminer son potentiel.

Exercice 9. Calculer l' intégrale curviligne

$$\int_{(\mathcal{C})} y^2 dx + x^2 dy, \quad (\mathcal{C}): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x}{a} - 2\frac{y}{b} = 0, \quad (a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2.$$

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on considère $(\mathcal{C})$ le carré orienté de sommets

$$A = (a, a), \quad B = (-a, a), \quad C = (, -a, -a), \quad D = (a, -a),$$

calculer l'intégrale curviligne suivant

$$\int_{(\mathcal{C})} \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy.$$

Exercice 11. Soit la courbe $(\mathcal{C})$ parcouru dans le sens directe, calculer

$$\int_{(\mathcal{C})} xy dx + (x + y) dy, \quad (\mathcal{C}): \quad y = x^2, \quad -1 \leq x \leq 2.$$

Exercice 12. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(\mathcal{C})} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz, \quad (\mathcal{C}): \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \quad R > 0, \quad h > 0. \\ z = ht, \end{cases}$$

Exercice 13. Calculer le circulation du champs de vecteur $F(x, y) = (-y, x)$ le long de la demi-ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad y \geq 0$$

Exercice 14. Calculer le circulation du champs de vecteur

$$F(x, y, z) = (2xy^2 z, 2x^2 yz, x^2 y^2 - 2z).$$

le long de la courbe définie par

$$x^2 + \frac{4}{3}y^2 = 1, \quad z = \frac{1}{\sqrt{3}}y.$$

Exercice 15. On applique la formule de Green, calculer

$$\int_{(\partial\mathcal{D}_1)} -ydx + xdy, \qquad (\partial\mathcal{D}_1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1\right\}$$

$$\int_{(\partial\mathcal{D}_2)} (2xy - x^2)dx + (x^2 + y^2)dy, \qquad (\partial\mathcal{D}_2) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (y - x^2)(x - y^2) = 0\right\}$$

$$\int_{(\partial\mathcal{D}_3)} xy^2dx + 2xydy, \qquad (\partial\mathcal{D}_3) = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 : \quad x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$\iint_{(\mathcal{D}_4)} 2x^3 - ydxdy, \qquad (\mathcal{D}_4) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\right\}$$

Exercice 16. Calculer l'aire de la partie délimité par l'axe (OX), l'axe (OY) et la courbe paramétrée

$$(\mathcal{C}) : \quad x = a\cos(t)^3, \quad y = a\sin(t)^3, \quad \in [0, \pi].$$

Exercice 17. Soit $(\mathcal{S})$ une surface fermée, n la normale extérieure unitaire de $(\mathcal{S})$ calculer

$$\iint_{(\mathcal{S})} (\ x, y, z\ ) \cdot nds.$$

Exercice 18. Calculer

$$\iint_{(\mathcal{S})} zdxdy, \quad \iint_{(\mathcal{S})} x^2dydz + y^2dxdy + z^2dxdy,$$

ou $(\mathcal{S})$ est e coté extérieure de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Exercice 19. Calculer

$$\iint_{(\mathcal{S})} \sqrt{x^2 + y^2}ds, \quad (\mathcal{S}) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad (x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 = 0, \quad z \in [0, b]\right\}.$$

Exercice 20. On utilise la formule de Stokes calculer

$$\int_{(\mathcal{C})} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz, \quad (\mathcal{C}) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0\right\}$$

$$\int_{(\mathcal{C})} x^2y^3dx + dy + zdz, \qquad (\mathcal{C}) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0\right\}.$$

Exercice 21. On utilise la formule d'Osthrogradsky calculer

$$\iint_{(\mathcal{S})} (x, y, z) \cdot n ds, \qquad (\mathcal{S}) : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad n \text{ la normale extérieure}$$

$$\iint_{(\mathcal{S})} (x^2, y^2, z^2) \cdot n ds, \qquad (\mathcal{S}) : \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad n \text{ la normale extérieure}$$

$$\iint_{(\mathcal{S})} x^2 dxdy + ydxdz + zdxdy, \qquad (\mathcal{S}) : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, \quad 0 \leq z \leq b,$$

$$\iint_{(\mathcal{S})} xdydz + ydxdz + zdxdy, \qquad (\mathcal{S}) : \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad -h \leq z \leq h, \quad h > 0,$$

Exercices Supplémentaires

Exercice 22. Soit f,g deux champs scalaires et U, V deux champs de vecteurs. Montrer que

$$\operatorname{grad}(f + g) = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g), \qquad \operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad}(g) + g \operatorname{grad}(f),$$

$$\operatorname{rot}(fV) = f \operatorname{rot}(V) + \nabla f \wedge V, \qquad \operatorname{div}(U \wedge V) = V \cdot \operatorname{rot}(U) - U \cdot \operatorname{rot}(V),$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(V)) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(V)) - \Delta(V), \qquad \operatorname{div}(fV) = \operatorname{grad}(f) \cdot V + f \operatorname{div}(V).$$

On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, calculer

$$\operatorname{grad} r, \quad \operatorname{grad} r^2, \quad \operatorname{grad} \frac{1}{r}, \quad \operatorname{grad} f(r).$$

Exercice 23. Calculer les intégrales curvilignes suivantes

$$\int_{(\mathcal{C})} y^2 dx + 2xydy \qquad (\mathcal{C}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 = a^2\right\}$$

$$\int_{(\mathcal{C})} ydx - xdy \qquad (\mathcal{C}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\right\}$$

$$\int_{(\mathcal{C})} \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy \qquad (\mathcal{C}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 = R^2\right\}$$

$$\int_{(\mathcal{C})} \frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \qquad (\mathcal{C}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x - y = 0, \quad x \in [1, 2]\right\}$$

Exercice 24. Calculer les coordonnées du centre de gravité du segment de la surface sphérique

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

coupée par le plan $z = H$.

Exercice 25. Donner le vecteur qui dirige la tangente et calculer la longueur des courbes suivante

$$(\mathcal{C}_1) : \quad x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = ht, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$(\mathcal{C}_2) : \quad r = a(1 + \cos\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Exercice 26. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(\mathcal{C})} x^2 dx - xy dy,$$

dans le cas ou

— $(\mathcal{C})$ est le segment $[OB]$ avec $O(0,0)$ et $B(1,1)$.

— $(\mathcal{C})$ est la courbe d'équation

$$x = y^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Exercice 27. Soit le segment $[OA]$ avec $A(1,1)$ et $O(0,0)$, calculer

$$\int_{[OA]} y \sin x dx + x \cos y dy.$$

Exercice 28. Soit le champs de vecteur

$$F(x,y,z) = \left(x + z, -3xy, x^2\right).$$

1. Calculer la circulation de F entre les deux points $O(0,0,0)$ et $P(1,2,-1)$ le long des chemins suivantes

$$(\mathcal{C}_1) : \quad (x,y,z) = (t^2, 2t, -t), \quad (\mathcal{C}_2) : \quad [OP].$$

2. Que peut on remarquer ? Pourquoi ?

Exercice 29. Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe (OZ) de la demi sphère

$$(\mathcal{S}) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0\right\},$$

avec une densité superficielle $\rho(x,y,z) = 1$.

Exercice 30. Calculer l' intégrale curviligne

$$\int_{(\mathcal{C})} y^2 dx + x^2 dy,$$

tel que la courbe $(\mathcal{C})$ est définie par

$$(\mathcal{C}) : \quad x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Exercice 31. Soit le demi-cardioide $(\mathcal{C})$ d'équation

$$r = a(1 + \cos\theta), \quad a > 0, \quad \theta \in [0, \pi],$$

calculer

$$\int_{(\mathcal{C})} (x + y) dx + (x - y) dy.$$

Exercice 32. Calculer le circulation du champs de vecteur

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}\right).$$

le long deu cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 2x = 1$$

parcouru dans le sens directe.

Exercice 33. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on considère $(\mathcal{C})$ le carré orienté de sommets

$$A = (a, a), \quad B = (-a, a), \quad C = (, -a, -a), \quad D = (a, -a),$$

calculer les deux intégrales curvilignes

$$\int_{(\mathcal{C})} \frac{x-y}{x^2+y^2} dx - \frac{x+y}{x^2+y^2} dy.$$

Exercice 34. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(\mathcal{C})} yzdx + xzdy + xydz,$$

$$(\mathcal{C}): \quad x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad z = ht, \quad t \in [0, 2\pi], \quad R > 0, \quad h > 0.$$

Exercice 35. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(\mathcal{C})} zdx + xdy + ydz, \quad (\mathcal{C}): \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + z = 1.$$

Exercice 36. Calculer l'aire de la partie délimitée par l'axe (OX) et l'arc paramétré

$$x = a(t - \sin(t)), \quad y = a(1 - \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Exercice 37. Soit (S) une surface fermée qui enferme un volume V. On utilise la formule d'Osthrogradsky montrer que

$$\oiint_{(\mathcal{S})} xydxdy + yzdydz + zxdzdx = 0$$

$$\oiint_{(\mathcal{S})} \frac{\partial u}{\partial x} dydx + \frac{\partial u}{\partial y} dydz + \frac{\partial u}{\partial z} dxdy = \iiint_V \Delta u dxdydz$$

$$\oiint_{(\mathcal{S})} (x, y, z) \cdot n ds = \iiint_V 3dxdydz, \quad n \text{ la normale extérieure}$$

$$\oiint_{(\mathcal{S})} (x^2 + y^2 + z^2)(dydz + dxdz + dxdy) = 2 \iiint_V (x + y + z) dxdydz$$

Exercice 38. On utilise la formule de stokes montrer que

$$\oint_{(\partial\mathcal{S})} ydx + zdy + xdz = -\iint_{(\mathcal{S})} n \cdot ds, \quad n \text{ la normale extérieure}$$

Exercice 39. Soit le champs de vecteur

$$V(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

1. Calculer la circulation de V le long du cercle de centre O et de rayon R.
2. Déduire que le champs de vecteur V ne dérive pas d'un potentiel.