École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen
Département de la formation préparatoire
Niveau deuxième année, 2019 - 2020

ANALYSE III

Série de Travaux Dirigés Numéro 1

Les Intégrales Doubles Et Triples

Responsable du module: M.HOUBAD

12 Novembre 2019

Exercice 1. Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ un domaine bornée régulier, et soit f une fonction continue définie sur $\mathcal{D}$ on note par

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy$$

Dessiner le domaine $\mathcal{D}$ et exprimer l'intégrale I avec des bornes dans les cas suivante

1. $\mathcal{D}$ est le triangle de sommets $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(-2, 1)$
2. $\mathcal{D}$ est la région comprise entre les deux courbes G_1 et G_2 tel que
$$G_1 : \ y = x^2, \quad G_2 : \ x = y^2.$$
3. $\mathcal{D}$ est le domaine définie par
$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \leq 1, \quad y \leq 1 \quad x + y \geq 1\right\}$$
4. $\mathcal{D}$ est le domaine définie par
$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \leq x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0\right\}$$
5. $\mathcal{D}$ est la région comprise en les deux graphe $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ et contient l'origine, avec
$$\mathcal{G}_1 : \ x^2 + y^2 = 9, \quad \mathcal{G}_2 : \ y^2 - x^2 = 1.$$
6. $\mathcal{D}$ est la partie formée par l'union des deux disque $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ avec
$$\mathscr{D}_1 : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 4, \quad \mathscr{D}_2 : \ (x+1)^2 + y^2 \leq 1.$$

Exercice 2. Calculer les intégrales doubles suivantes

$$\iint_{\mathcal{D}_1} \frac{1}{(x+y)^3} dxdy, \qquad \mathcal{D}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 1, \quad y \geq 1, \quad x + y \leq 3\right\}.$$

$$\iint_{\mathcal{D}_2} e^{x+y} dxdy, \qquad \mathcal{D}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |\, x \,| + |\, y \,| \leq 1\right\}$$

$$\iint_{\mathcal{D}_3} (x+y)e^{-x-y} dxdy, \qquad \mathcal{D}_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1\right\}$$

Exercice 3. On utiliser la méthode du changement des variables, calculer les intégrales suivantes

$$\iint_{\mathcal{D}_1} x^3 + y^3 dxdy, \qquad \mathcal{D}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$

$$\iint_{\mathcal{D}_2} \frac{y}{a^2 + x^2}, \qquad \mathcal{D}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq a^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\right\}$$

$$\iint_{\mathcal{D}_3} x^2+y^2dxdy, \qquad \mathcal{D}_3=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad 0\leq y\leq x^2+y^2\leq x\right\}$$

$$\iint_{\mathcal{D}_4} \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy, \quad \mathcal{D}_4=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad x\leq 1,\quad y\leq 1,\quad x^2+y^2\geq 1\right\}$$

Exercice 4. Soit $\mathcal{D}=[0,1]\times[0,1]$, on note par

$$J=\iint_{\mathcal{D}} \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dxdy, \quad I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

Déterminer une relation entre I et J et ensuite calculer la valeur de J et déduire celle de I.

Exercice 5. Soit $\mathcal{D}$ le domaine limité par les droites

$$x=0, \quad y=x+2, \quad y=-x$$

avec une densité surfacique de charge électrique $\rho(x,y)=x-y$. Calculer la charge complète du domaine $\mathcal{D}$.

Exercice 6. Soient $a,b,c,d\in\mathbb{R}^*$ tel que $0<a\leq b$ et $0<c\leq d$, soit le domaine $\mathcal{D}$ défini par

$$\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad ax^2\leq y\leq bx^2,\quad \frac{c}{x}\leq y\leq\frac{d}{x}\right\},$$

et soit φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(u,v)=\varphi(x,y)=(xy,y).$$

1. Montrer que φ est un changement de variable entre $\mathcal{D}$ et un domaine Δ à déterminé.
2. Utiliser le changement de variable précédent pour calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

Exercice 7. Soit $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ calculer l'intégrale suivante

$$\iiint_{\mathcal{D}} x^2+y^2+z^2dxdydz, \quad \mathcal{D}=\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3:\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\leq 1\right\}.$$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivante

$$\iiint_{\mathcal{D}_1} (x^2+y^2+z)dxdydz, \quad \mathcal{D}_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\quad x^2+y^2\leq 4,\quad -5\leq z\leq 5\right\}$$

$$\iiint_{\mathcal{D}_2} \frac{z}{x^2+y^2+z^2}dxdydz, \quad \mathcal{D}_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\quad 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 2,\quad z\geq 0\right\}$$

$$\iiint_{\mathcal{D}_3} z\cos(x^2+y^2)dxdydz, \quad \mathcal{D}_3=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\quad x^2+y^2+z^2\leq R^2,\quad z\geq 0\right\}$$

$$\iiint_{\mathcal{D}_4} ydxdydz, \qquad \mathcal{D}_4=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\quad x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad x^2+y^2\leq z\leq 1\right\}$$

Exercice 9.

1. Soit le domaine $\mathcal{D}$ délimité par les courbes d'équations

$$4x+2y=1, \quad 4x+2y=9, \quad y=x, \quad y=6x,$$

   (a) Montrer que φ définie par

$$(u,v)=\varphi(x,y)=\left(2x+y,\frac{y}{x}\right).$$

   est un changement de variable entre $\mathcal{D}$ est un domaine Δ à déterminé.

(b) Calculer la masse d'un solide délimité par $\mathcal{D}$ et dont la densité surfacique est

$$\rho(x, y) = \frac{1}{y}.$$

2. Trouver le moment d'inertie pa rapport à l'axe (OY) du domaine du plan (XOY) limité par l'ellipse d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

et avec une densité de masse surfacique qui vaut 1.

3. Calculer le volume de la partie délimitée par la sphère de centre zéro et de rayon 1 et le cylindre d'équation

$$x^2 + y^2 - y = 0.$$

4. Caclculer l'aire de la partie délimitée par l'intersection des deux cylindre

$$x^2 + y^2 \leq 9, \quad x^2 + z^2 \leq 9.$$

Indication : Utiliser la symétrie du domaine.

5. Calculer l'aire de la partie formée par l'intersection de la demie sphère

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},$$

et le cylindre elliptique

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1.$$

6. En utilisant les coordonnées sphériques, calculer le volume du corps limité par la sphère de centre zéro et de rayon un et l'extérieure du cône d'équation

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

7. Calculer l'air de la portion formé par l'intersection du plan

$$x + 2y + z = 4$$

et du cylindre d'équation

$$x^2 + y^2 = 4$$

8. Calculer le volume sous le plan d'équation

$$x + 2y + z = 4,$$

et à l'intérieure du cylindre d'équation

$$x^2 + y^2 = 16,$$

et à l'extérieure du cylindre d'équation

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Exercice 10. Soit le domaine $\mathcal{D}$ l'ensemble définit par

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y > 0, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad \frac{1}{2}y \leq x + 1 \leq y\right\}.$$

1. Soient $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ et $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ définies

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{y}{x + 1}, x^2 + y^2\right), \quad \psi(x, y) = x^2 + y^2 + x$$

(a) Tracer dans le même plan (XOY) le domaine $(\mathcal{D})$ et la courbe d'équation

$$\psi(x, y) = 0$$

(b) Déduire que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D} : \quad \psi(x, y) \neq 0.$$

(c) On note par $|\mathcal{J}_\Phi|$ la valeur absolute du déterminant de la matrice jacobienne de Φ. Montre que

$$|\mathcal{J}_\Phi| = 2\frac{|\psi(x, y)|}{(1 + x)^2}.$$

(d) Déduire que Φ est un changement de variable entre le domaine $\mathcal{D}$ et un domaine Δ à déterminer.

2. Déterminer la masse de $\mathcal{D}$ sachant que ca répartition surfacique de masse vaut

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D} : \quad \rho(x,y) = 2\frac{\left|x^2+y^2+x\right|}{(x+1)^2}.$$

3. Déterminer le moment d'inertie de $\mathcal{D}$ par rapport à l'origine.

Exercice 11. Soit $g \in \mathscr{C}([a,b]\,;\mathbb{R}^+)$ définie dans le plan (YOZ), considérons la courbe Φ d'équation

$$y = g(z).$$

En faisant tourner cette courbe autour de l'axe (OZ) en engendre une surface Σ.

1. Pour $z_0 \in [a,b]$ fixé, donner l'équation de la courbe formée par l'intersection du plan $z = z_0$ et la surface Σ.
2. Le plan (YOZ) coupe Σ selon la courbe Φ, soit V le volume de l'espace contenu à l'intérieure de la surface Σ et limité par les deux plans

$$z = a, \quad z = b.$$

   Exprimer le volume V sous forme

$$V = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(z,y)dzdy$$

3. Applications
   (a) Calculer le volume d'un cône de révolution d'axe (OZ) de sommet O de hauteur h et dans le cercle de base est de rayon r.
   (b) Calculer le volume de l'ellipsoide de révolution dont la section circulaire a pour rayon r et dont le grand axe a pour longueur $2a$.

Exercices Supplémentaires

Exercice 12. Changer l'ordre d'intégration dans les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_{a/2}^{a}\left(\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy\right)dx, \quad I_2 = \int_0^1\left(\int_0^{x^2} f(x,y)dy\right)dx + \int_1^2\left(\int_0^{2-x} f(x,y)dy\right)dx.$$

Exercice 13. Représenter les domaines suivantes

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad 0\le x\le y\le 1\right\}, \quad \mathcal{D}_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad |\,x-y\,|\le 1, \quad |\,x+y\,|\le 1\right\}\\
\mathcal{D}_3 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}\ge 1, \quad \sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}\ge 1\right\}, \quad \mathcal{D}_4 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad |\,x\,|\le x^2+y^2\le 1\right\}\\
\mathcal{D}_5 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2\le 1, \quad x+\sqrt{3}y\le 1\right\}, \quad \mathcal{D}_6 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad x^2\le 2y, \quad y^2\le 2x\right\}
\end{aligned}$$

Exercice 14.

1. Soit $\mathcal{D}_1$ la partie supérieure du disque de centre $(1,0)$ et de rayon 1. calculer

$$\iint\limits_{\mathcal{D}_1} x^2 y dxdy,$$

2. Soit $\mathcal{D}_2$ le carré de sommets $(1,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$ et $(0,1)$. Cacluler

$$\iint\limits_{\mathcal{D}_2} (x^2-y)dxdy,$$

Exercice 15. Soit les quatre points du plan $A(-1,1)$, $B(1,1)$, $C(1,3)$ et $O(0,0)$. Soit f la fonction définie par
$$f(x,y) = x^2(y-1).$$

1. Soit $\mathcal{D}$ le domaine limité par les droites AC et BC et le demi-cercle de diamètre AB contenant O. Calculer
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy.$$
2. Soit $\mathcal{D}'$ l'ensemble des points du disque de centre O et de rayon $\sqrt{10}$ qui n'appartiennent pas à D. Calculer
$$\iint_{\mathcal{D}'} f(x,y)dxdy.$$

Exercice 16. Calculer
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dxdydz$$
dans le cas suivants

1. $\mathcal{D}$ est le domaine limité par les plans d'équation
$$x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y+Z=1$$
et f la fonction définie par
$$f(x,y,z) = (x+y+z)^2.$$
2. $\mathcal{D}$ est l'ensemble des point (x,y,z) vérifiants
$$0 \le y \le 1-x^2, \quad |x+y+z| \le 1$$
et la fonction f définie par
$$f(x,y,z) = x^2y.$$

Exercice 17. Calculer les deux intégrales suivantes
$$\iiint_{\mathcal{D}} zdxdydz, \quad \iiint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz,$$
tel que $\mathcal{D}$ est la région de $\mathbb{R}^3$ comprise entre les deux plan $z=0$, $z=2$ et le paraboloide d'équation
$$z = x^2+y^2$$
et le cône d'équation
$$z^2 = x^2+y^2$$

Exercice 18. Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe (OZ) d'un solide limité par le domaine $\mathcal{D}$ défini par
$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 1 \le x^2+y^2 \le 9, \quad 1 \le z \le 2, \quad y \ge 0\right\}$$
et dont la densité volumique de la masse est donnée par
$$\rho(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice 19. Calculer l'intégrale suivantes
$$\iiint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2+z^2)dxdydz, \quad \mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z \ge 0, \quad x^2+y^2 \le z^2 \le 4-x^2-y^2\right\}.$$

Exercice 20. Calculer le centre d'inertie d'un objet délimité par le domaine $\mathcal{D}$ défini par

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad 4 \leq z \leq 9\right\}$$

et dont la densité volumique de la masse vaut

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}.$$

Exercice 21. Calculer les intégrales suivantes

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}_1} xydxdy, \qquad \mathcal{D}_1 = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 : \quad z \leq 4, \quad x^2 + y^2 \leq z^2\right\}$$

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}_2} zdxdydz, \qquad \mathcal{D}_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 0 \leq z \leq 2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z\right\}.$$

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}_3} xyzdxdydz, \qquad \mathcal{D}_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\right\}.$$

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}_4} \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)} dxdydz, \quad \mathcal{D}_4 = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 : \quad x + y + z \leq 1\right\}.$$

Exercice 22. Calculer le volume

$$\mathscr{V} = \iiint\limits_{\mathcal{D}} dxdydz$$

dans les cas suivants

1. $\mathcal{D}$ est la partie de la sphère de centre zéro et de rayon R, comprise entre les plans d'équation
$$z = h_1, \quad z = h_2, \quad R \geq h_1 > h_2 \geq -R.$$
2. $\mathcal{D}$ est le secteur sphérique, limité par la sphère de centre zéro et de rayon R et le demi-cône supérieure de somment O et d'angle 2α.
3. $\mathcal{D}$ est la partie limitée par la sphère de centre zéro et de rayon 1 et le cylindre d'équation
$$x^2 + y^2 - y = 0.$$
4. $\mathcal{D}$ est la partie limitée par la sphère de centre zéro et de rayon 5 et le demi-cône supérieure de sommet $(0, 0, 1)$ et d'angle $2\alpha = \pi/2$.
5. $\mathcal{D}$ est la partie limitée par le cylindre d'équation
$$x^2 + y^2 = a^2,$$
et l'hyperboloide d'équation
$$x^2 + y^2 - z^2 = -a^2, \quad a > 0$$
6. $\mathcal{D}$ est la partie limitée par la surface d'équation
$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$