Mekki HOUBAD

Analyse Vectorielle

Chapitre II d'Analyse III et IV

Septembre 2016

©Mekki HOUBAD
Département de Mathématiques
Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen 13000
Algérie
m.houbad@gmail.com

http://www.univ-tlemcen.dz

Table des matières

Chapitre 2

Analyse Vectorielle

2.1 Les courbes et les surfaces

Définition 1 (Courbe)**.** *Une courbe dans l'espace est un ensemble de points dont les trois coordonnées cartésiennes peuvent être définies par trois fonctions scalaires dépendent d'une variable réelle*

$$(C) = \left\{(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 : \quad t \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R}\right\}.$$

la fonction

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) : \quad t \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R}$$

est appelé paramétrage ou chemin de la courbe (C).

Exemple 1. Soit la courbe suivante

$$(C) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z - x^2 - y^2 = 0, \quad z - y = 0\right\}$$

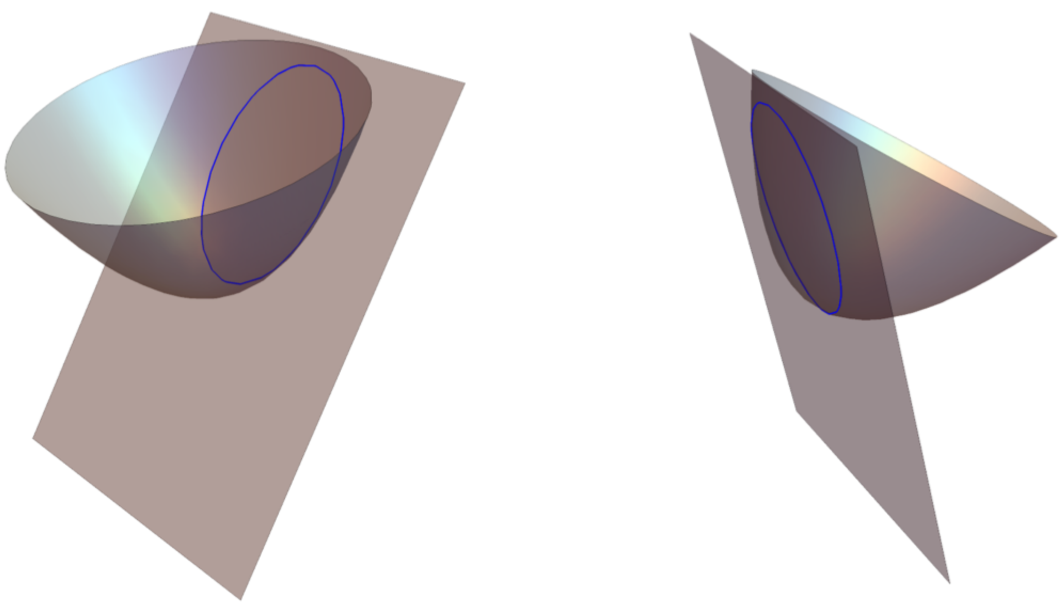


Fig 2.1.1 *Deux vues de la courbe (C)*

pour paramétrie la courbe e utilise les coordonnées cylindrique

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} z - x^2 - y^2 = 0 \\ z - y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = r^2 \\ z = r\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = r^2 \\ r = \sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \sin\theta\,\cos\theta, \\ y = (\sin\theta)^2, \\ z = (\sin\theta)^2, \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

donc

$$\gamma(\theta) = \left(\sin\theta\,\cos\theta, (\sin\theta)^2, (\sin\theta)^2\right), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Proposition 1 (Longueur d'une courbe). *Soit (C) une courbe avec un paramètrage γ alors la longueur de la courbe est donnée par*

$$\int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt.$$

Preuve.

— La valeur :

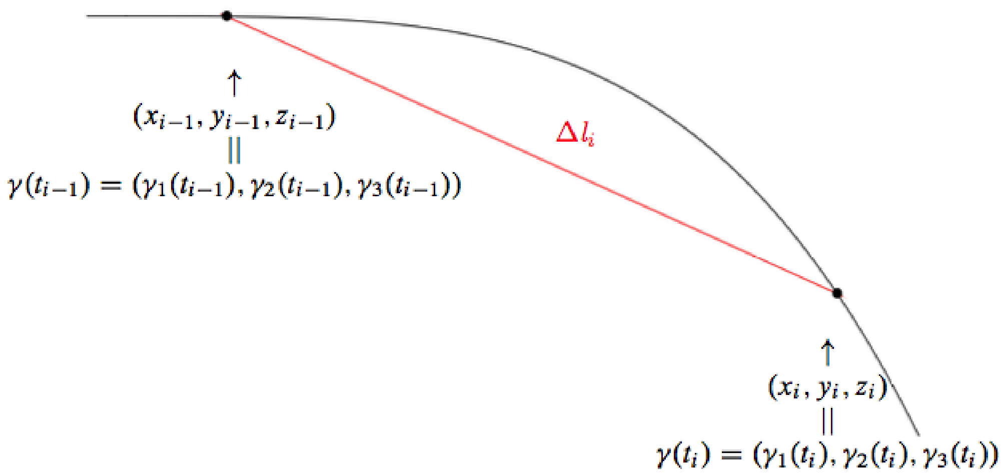


Fig 2.1.2 *Découpage de la courbe (C).*

On utilise le théorème des accroissements finie en on déduit que les longueurs élémentaires Δx_i, Δy_i et Δz_i sont exprimés par

$$\begin{cases} \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \gamma_1'(t_{1,i})(t_i - t_{i-1}), & t_{1,i} \in [t_i, t_{i-1}] \\ \Delta y_i = y_i - y_{i-1} = \gamma_2'(t_{2,i})(t_i - t_{i-1}), & t_{2,i} \in [t_i, t_{i-1}] \\ \Delta z_i = z_i - z_{i-1} = \gamma_3'(t_{3,i})(t_i - t_{i-1}), & t_{2,i} \in [t_i, t_{i-1}] \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned} \Delta l_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2} \\ &= \sqrt{(\gamma_1'(t_{1,i}))^2 + (\gamma_2'(t_{2,i}))^2 + (\gamma_3'(t_{3,i}))^2}\,(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

et donc la longueur de (C) est approchée par

$$L \backsimeq \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\gamma_1'(t_{1,i}))^2 + (\gamma_2'(t_{2,i}))^2 + (\gamma_3'(t_{3,i}))^2}\,(t_i - t_{i-1})$$

quand n tend ver l'infinie on obtient l'intégrale d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vaut

$$L = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2 + (\gamma_3'(t))^2} dt = \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt$$

— Indépendance du paramètrage : Soit γ_1 et γ_2 deux paramétrage de la même courbe (C)

$$\gamma_1 : [a, b] \to (C), \quad \gamma_2 : [a', b'] \to (C),$$

soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\gamma_0 = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 : [a', b'] \to [a, b]$$

on remarque qu'elle est croissante bijective et $\gamma_0(a') = a$ et $\gamma_0(b') = b$ ainsi

$$\int_{a'}^{b'} \|\gamma_2'(t)\| \, dt = \int_{a'}^{b'} \|[\gamma_1(\gamma_0(t))]'\| \, dt = \int_{a'}^{b'} \|\gamma_0'(t)\gamma_1'(\gamma_0(t))\| \, dt,$$

Or γ_0 est croissante, donc : $\forall t \in [a', b'] : \quad \gamma_0'(t) \geq 0$

$$\begin{aligned}\int_{a'}^{b'} \|\gamma_2'(t)\| \, dt &= \int_{a'}^{b'} \|\gamma_1'(\gamma_0(t))\| \, \gamma_0'(t) dt = \left\langle \begin{matrix} s = \gamma_0(t), & ds = \gamma_0'(t) dt \\ \gamma_0(a') = a, & \gamma_0(b') = b \end{matrix} \right\rangle \\ &= \int_a^b \|\gamma_1'(s)\| \, ds\end{aligned}$$

□

Exemple 2. Soit la courbe suivante

$$(C) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z = x^2 + y^2\right\}$$

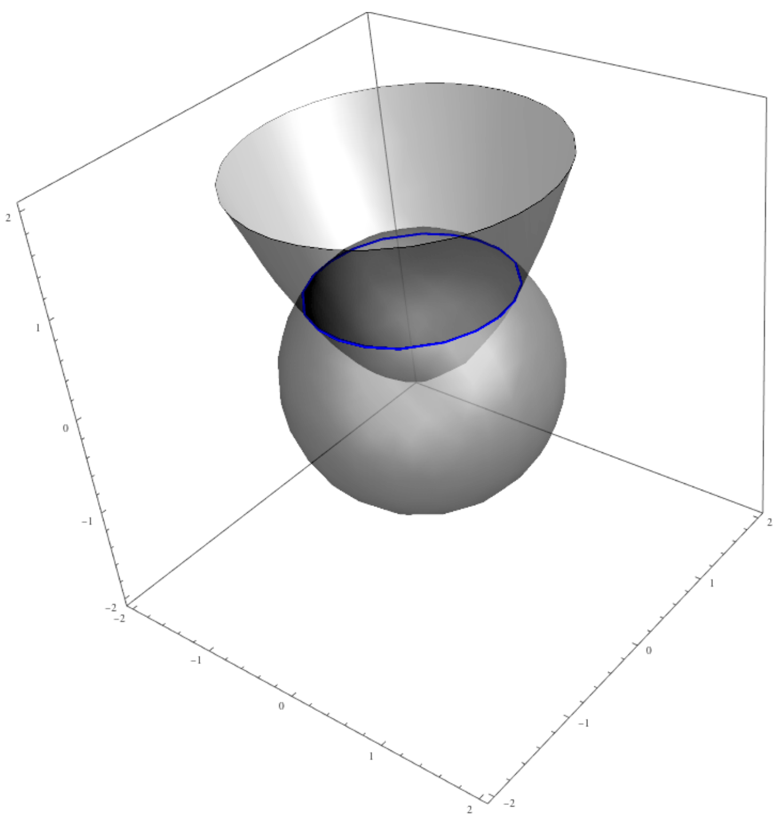


Fig 2.1.3 *Représentation de la courbe (C).*

— Paramétrisation de la courbe : en utilise les coordonnées cylindrique

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta, \quad z = h$$

ce qui donne alors

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} h^2 = 1 - r^2, \\ h = r^2 \end{cases} \Longrightarrow h^2 + h - 1 = 0 \Longrightarrow h = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

vu que $h = r^2$ donc

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\cos\theta, \quad y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\sin\theta, \quad z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

et donc

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cos(t), \frac{1+\sqrt{5}}{2}\sin(t), \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

— Calculer de la longeur

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left\|\gamma'(t)\right\| dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\gamma_1'(t)\right)^2 + \left(\gamma_2'(t)\right)^2 + \left(\gamma_3'(t)\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sqrt{(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} dt \\ &= \left(1+\sqrt{5}\right)\pi. \end{aligned}$$

Définition 2 (Surface). *Une surface est un ensemble de point dans l'espace décrit à l'aide d'un paramétrage qui dépend de deux variables réelles*

$$(S) = \left\{\Gamma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3 : \quad (u, v) \in \mathrm{K} \subset \mathbb{R}^2\right\}$$

Exemple 3. Soit la surface (S) définie apr

$$(S) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z = x^2 + y^2\right\}.$$

on utilise les coordonnées cylindrique à savoir

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r^2 + z^2 \leq 1 \\ z = r^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq r \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z = r^2 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r^2 \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in \left[0, \sqrt{2}/2\right].$$

et donc la paramétrisation est

$$\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v)) = \left(u\cos v, u\sin v, u^2\right), \quad u \in \left[0, \sqrt{2}/2\right], \quad v \in [0, 2\pi].$$

Définition 3 (Tangent d'un courbe)**.** *Soit (C) une courbe donnée par le paramétrage γ alors le vecteur tangent à la courbe (C) est la dérivée de γ*

Définition 4 (Tangente d'une surface)**.** *On dit que v est un vecteur tangent à la surface (S) en un point P si il est tangent à n'importe qu'elle courbe qui passe par ce point et qui est inclus dans la surface. L'ensemble des vecteurs tangent à une surface en un point forment le plan tangent à cette surface en ce point.*

Proposition 2. *Soit (S) une surface avec un paramétrage ϕ alors le plan tangent à cette surface c'est le plan vectoriel engendré par les deux vecteur*

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial v}.$$

Preuve. Soit $p = (x_0, y_0, z_0) \in (S)$ et soit $(C) \subset (S)$ une courbe passe par p paramètre par le paramétrage γ donc

$$\begin{cases} x = \phi_1(u,v) = \gamma_1(t) \\ y = \phi_2(u,v) = \gamma_2(t) \\ z = \phi_3(u,v) = \gamma_3(t) \end{cases}$$

donc u, v dépendent de t et donc

$$\begin{cases} x = \phi_1(u(t),v(t)) = \gamma_1(t) \\ y = \phi_2(u(t),v(t)) = \gamma_2(t) \\ z = \phi_3(u(t),v(t)) = \gamma_3(t) \end{cases}$$

ainsi la tangent à la courbe (C) est la dérivée de γ donc

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \gamma_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial u} u'(t) + \dfrac{\partial \phi_1}{\partial v} v'(t) \\ \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial u} u'(t) + \dfrac{\partial \phi_2}{\partial v} v'(t) \\ \\ \dfrac{\partial \phi_3}{\partial u} u'(t) + \dfrac{\partial \phi_3}{\partial v} v'(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial \phi}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial v} v'(t)$$

donc n'importe qu'elle courbe qui passe par p sont tangent est combinaison linéaire de $\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}$, vu que le plan tangent est l'union des tangents de ces courbes donc

$$\text{le plan tangent} = \text{span}\left\{\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}\right\}.$$

□

Exemple 4. Soit la surface (S) définie par

$$(S) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1, \quad z \geq \frac{1}{2}\right\}$$

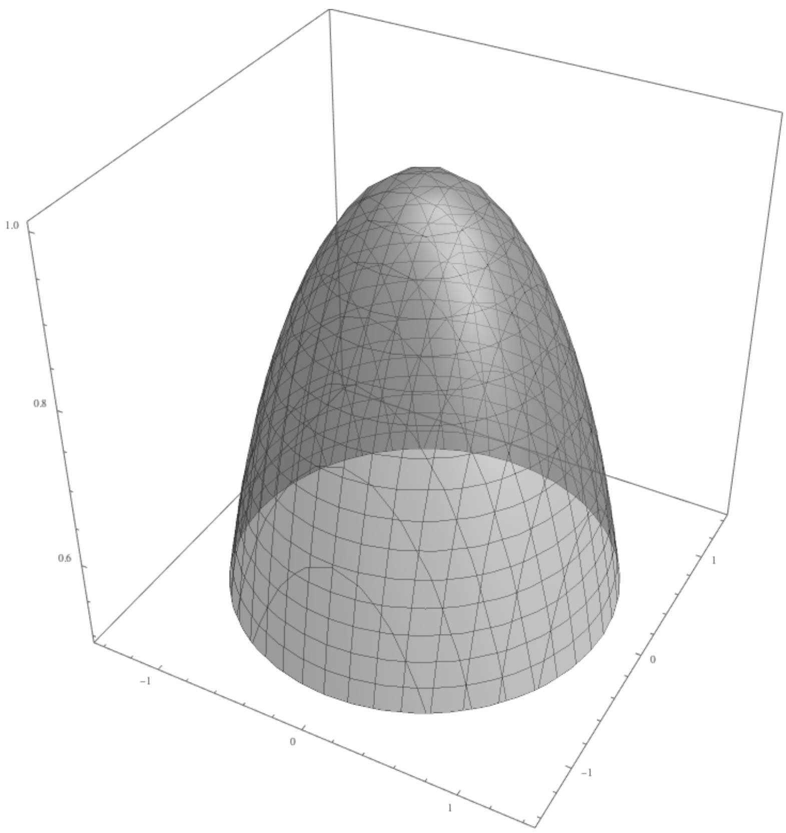


Fig 2.1.4 *Représentation de la surface* (S).

on pose

$$x = \sqrt{2}\, r\, \cos\theta, \quad y = \sqrt{2}\, r\, \sin\theta, \quad z = z$$

donc

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + z^2 = 1 \\ z \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r^2 + z^2 = 1 \\ z \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{1 - r^2} \\ \sqrt{1 - r^2} \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

d'après la première égalité on remarque que $r \in [0, 1]$ et on utilise la seconde inégalité on a

$$1 - r^2 \geq \frac{1}{4} \Longrightarrow 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$$

et donc

$$(x, y, z) = \left(\sqrt{2}\, r\, \cos\theta, \sqrt{2}\, r\, \sin\theta, \sqrt{1 - r^2}\right), \quad r \in \left[0, \sqrt{3}/4\right], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

et donc

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= (\phi_1(r, \theta), \phi_2(r, \theta), \phi_3(r, \theta)) \\ &= \left(\sqrt{2}\, r\, \cos\theta, \sqrt{2}\, r\, \sin\theta, \sqrt{1 - r^2}\right), \quad r \in \left[0, \sqrt{3}/4\right], \quad \theta \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\theta \\ \sqrt{2}\ \sin\theta \\ -\dfrac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(r, \theta) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\ r\ \sin\theta \\ \sqrt{2}\ \ r\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Définition 5. *On dit qu'un vecteur est orthogonale à une surface si il est orthogonal à son plan tangent, ainsi on appelle le vecteur normale*

$$N(u,v) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\phi}{\partial v}\right)(u,v)$$

le vecteur qui est orthogonale à la surface (S)*, et le vecteur normale unitaire est donné par*

$$\eta(u,v) = \frac{N(u,v)}{\|N(u,v)\|}.$$

Exemple 5. Soit la surface (S) définie par

$$(S) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1, \quad z \geq \frac{1}{2}\right\}$$

On a déjà trouvé que

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\theta \\ \sqrt{2}\ \sin\theta \\ -\dfrac{r}{\sqrt{1-r^2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\theta}(r,\theta) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\ r\ \sin\theta \\ \sqrt{2}\ \ r\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$N(r,\theta) = \frac{\partial\phi}{\partial r}(r,\theta) \wedge \frac{\partial\phi}{\partial\theta}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}\,r^2}{\sqrt{1-r^2}}\cos\theta \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2}\,r^2}{\sqrt{1-r^2}}\sin\theta \\[2ex] 2\,r \end{pmatrix}, \quad r \in \left[0, \sqrt{3}/4\right], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

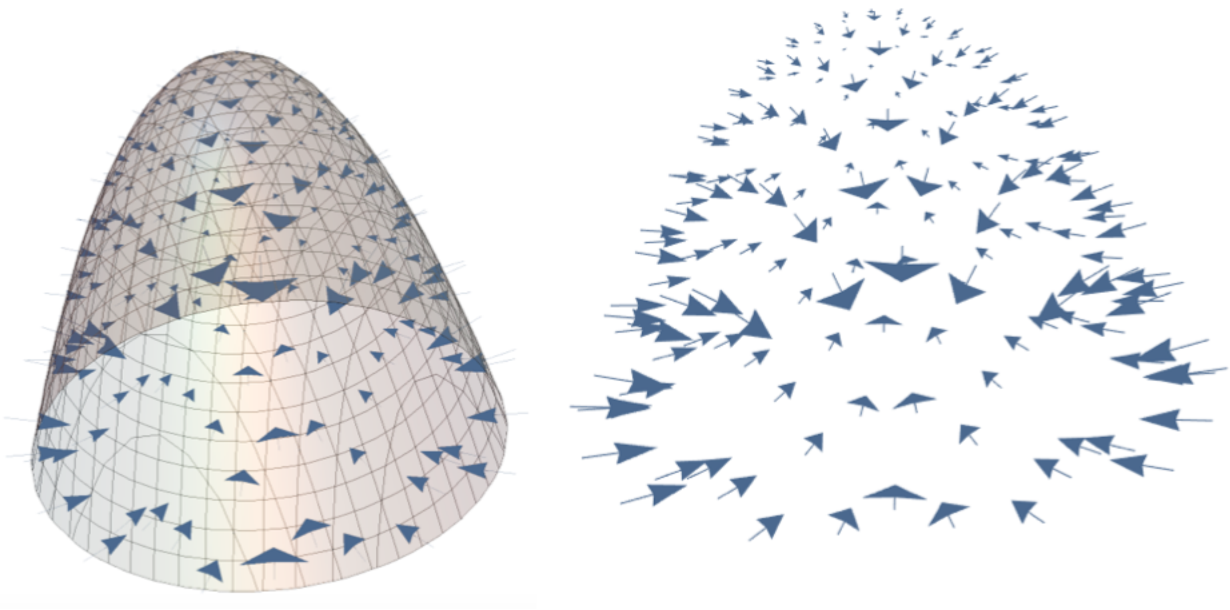


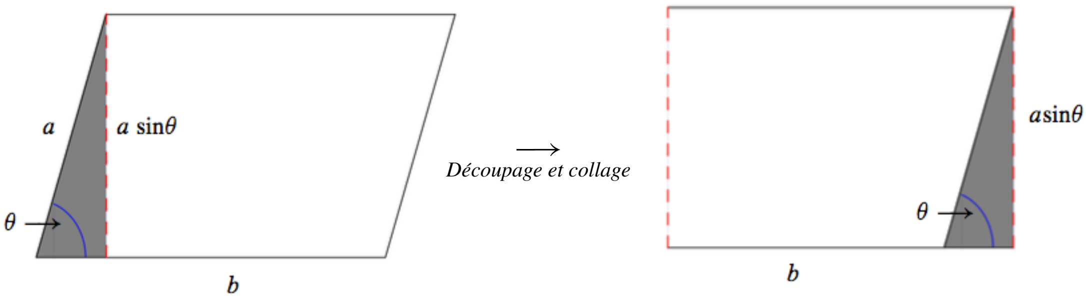
Fig 2.1.5 *Représentation du champs du vecteur normal à* (S)

Proposition 3 (L'aire d'une surface). *Soit* (S) *une surface de paramétrage* Γ *alors l'air de cette surface est donnée par*

$$\iint_K \left\| \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)(u,v) \right\| dudv.$$

Preuve.

— La valeur : On commence par donner un rappelle de la manière avec laquelle on calculer l'aire d'un paralilogramme

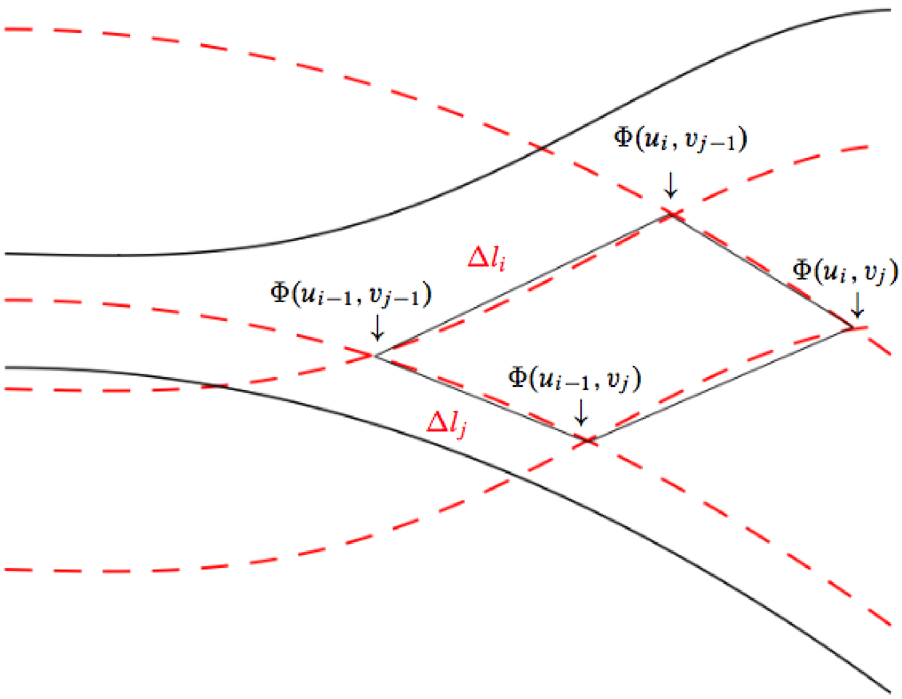


$$\text{Aire} = \left\| \vec{a} \wedge \vec{b} \right\| = |ab\cos\theta|$$

Maintenant on considère un paramètrage de (S) par $\phi(u,v)$ avec $(u,v) \in K = [a,b] \times [c,d]$, on considére une décomposition du pavé $[a,b] \times [c,d]$ sous la forme

$$u_i = a + i\frac{b-a}{n}, \quad v_j = c + j\frac{d-c}{n},$$

ce qui correspond à une décomposition de la surface (S) selon la figure suivante



donc

$$\begin{aligned}
\Delta S_{ij} &= \left|\Delta l_i \wedge \Delta l_j\right| = \left|\left(\phi(u_{i-1}, v_j) - \phi(u_{i-1}, v_{j-1})\right) \wedge \left(\phi(u_i, v_{j-1}) - \phi(u_{i-1}, v_{j-1})\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{\partial \phi}{\partial v}(u_i, v_j')(v_j - v_{j-1})\right) \wedge \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}(u_i', v_{j-1})(u_i - u_{i-1})\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{\partial \phi}{\partial v}(u_i, v_j')\right) \wedge \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}(u_i', v_{j-1})\right)\right| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}) \\
&= \left|\left(\frac{\partial \phi}{\partial v}(u_i, v_j')\right) \wedge \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}(u_i', v_{j-1})\right)\right| \Delta u_i \Delta v_j
\end{aligned}$$

donc l'aire de la surface est approximé par

$$\text{Aire}(S) \backsimeq \sum_{i,j=1}^{n} \left|\left(\frac{\partial \phi}{\partial v}(u_i, v_j')\right) \wedge \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}(u_i', v_{j-1})\right)\right| \Delta u_i \Delta v_j$$

et donc par passage à la limite quand n tend ver l'infinie on a

$$\text{Aire}(S) = \iint\limits_K \left\|\left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}\right)(u, v)\right\| du dv.$$

— Indépendance du paramètrage : Soit $\phi_1(t, s)$ définie sur K_1 et $\phi_2(u, v)$ définie sur K_2 deux paramétrage de (S) et soit γ une bijection de K_1 dans K_2 donc

$$\phi_2(u, v) = \phi_1(\gamma(u, v)), \quad \gamma(u, v) = (t, s)$$

on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial u}\right)(u, v) &= \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\gamma(u, v))\frac{\partial \gamma_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial \phi_1}{\partial s}(\gamma(u, v))\frac{\partial \gamma_2}{\partial u}(u, v) \\
\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial v}\right)(u, v) &= \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\gamma(u, v))\frac{\partial \gamma_1}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial \phi_1}{\partial s}(\gamma(u, v))\frac{\partial \gamma_2}{\partial v}(u, v)
\end{aligned}$$

et donc le calcule du produit vectoriel donne

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi_2}{\partial v}\right)(u, v) &= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \wedge \frac{\partial \phi_1}{\partial s}\right)(\gamma(u, v))\frac{\partial \gamma_1}{\partial u}(u, v)\frac{\partial \gamma_2}{\partial v}(u, v) \\
&\quad + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial s} \wedge \frac{\partial \phi_1}{\partial t}\right)(\gamma(u, v))\frac{\partial \gamma_2}{\partial u}(u, v)\frac{\partial \gamma_1}{\partial v}(u, v) \\
&= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \wedge \frac{\partial \phi_1}{\partial s}\right)(\gamma(u, v)) \\
&\qquad \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial u}(u, v)\frac{\partial \gamma_2}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial \gamma_2}{\partial u}(u, v)\frac{\partial \gamma_1}{\partial v}\right)(u, v) \\
&= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \wedge \frac{\partial \phi_1}{\partial s}\right)(\gamma(u, v)) \det \mathcal{J}_\gamma(u, v)
\end{aligned}$$

ainsi on a

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{K_2} \left\|\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi_2}{\partial v}\right)(u, v)\right\| du dv &= \iint\limits_{K_2} \left\|\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \wedge \frac{\partial \phi_1}{\partial s}\right)(\gamma(u, v))\right\| \left|\mathcal{J}_\gamma(u, v)\right| du dv \\
&= \iint\limits_{K_1} \left\|\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \wedge \frac{\partial \phi_1}{\partial s}\right)(t, s)\right\| dt ds.
\end{aligned}$$

□

Exemple 6. Soit la surface (S) définie par

$$(S) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1, \quad z \geq \frac{1}{2}\right\}$$

On a déjà trouvé que

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(r,\theta) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\, r^2 \cos\theta / \sqrt{1-r^2} \\ \sqrt{2}\, r^2 \sin\theta / \sqrt{1-r^2} \\ 2\, r \end{pmatrix}, \quad r \in \left[0, \sqrt{3}/4\right], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

alors

$$\iint\limits_{[0,\sqrt{3}/4]\times[0,2\pi]} \left\| \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)(r,\theta) \right\| dr d\theta = \iint\limits_{[0,\sqrt{3}/4]\times[0,2\pi]} \sqrt{\frac{4\, r^4}{1-r^2} + 4r^2}\, dr d\theta$$

$$= -4\pi \int_0^{\sqrt{3}/4} \frac{-\, r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr = -4\pi \sqrt{1-r^2}\Big|_0^{\sqrt{3}/4} = 3\pi.$$

2.2 Champs des scalaires et champs des vecteurs

Définition 6 (Champ de scalaires)**.** *On appelle un champs scalaire toute fonction de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, qui associée à tout point du plan ou de l'espace un scalaire.*

Exemple 7. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ définie par $f(x,y) = 1/(x^2+y^2+1)$. Les deux figures suivantes représente la répartition de la valeur de f sur le plan en tout point (x, y)

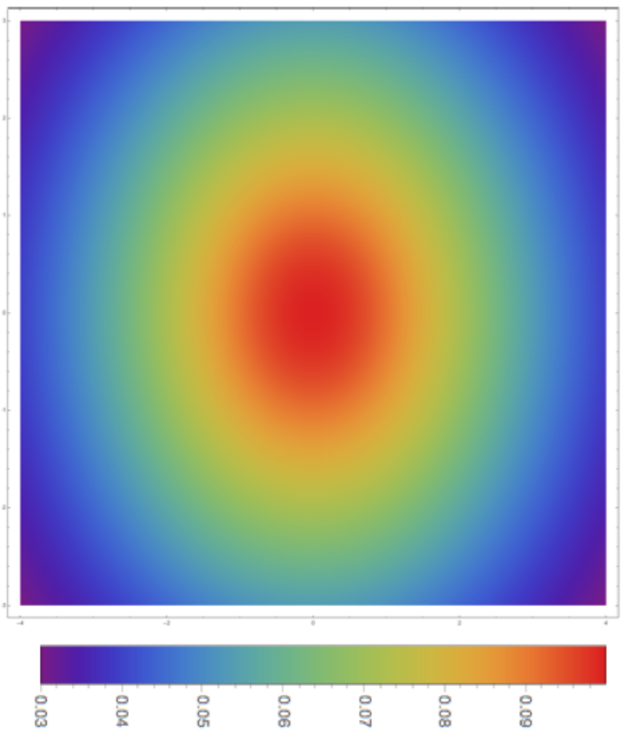


Fig 2.2.6 *Champs scalaire* f_1

Exemple 8. Soit le champs scalaire de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$$

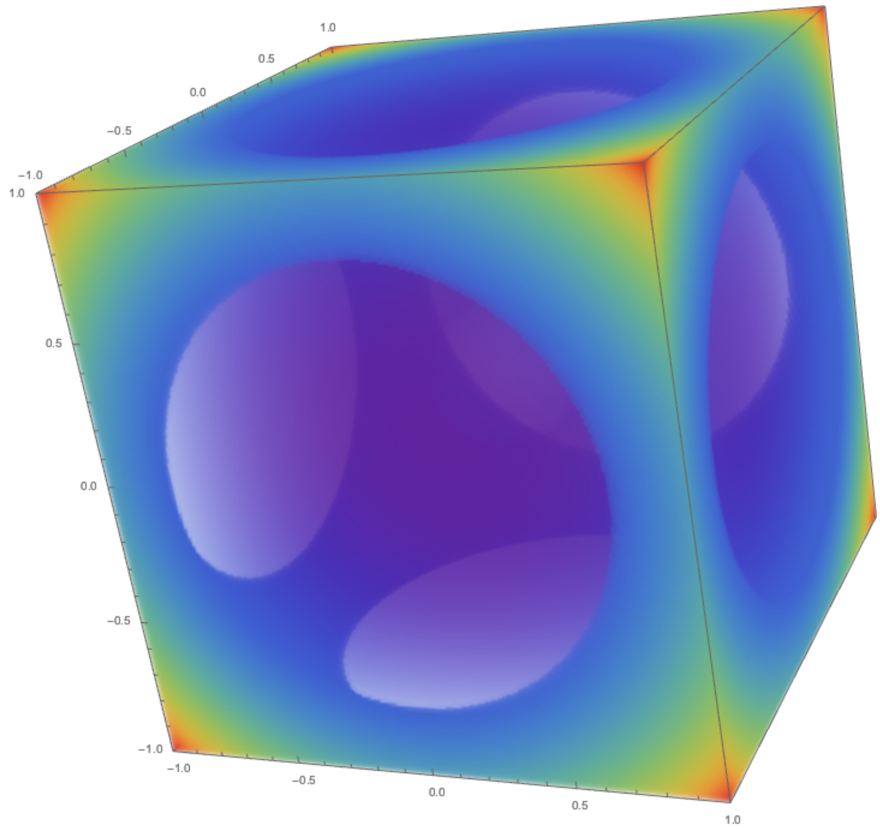
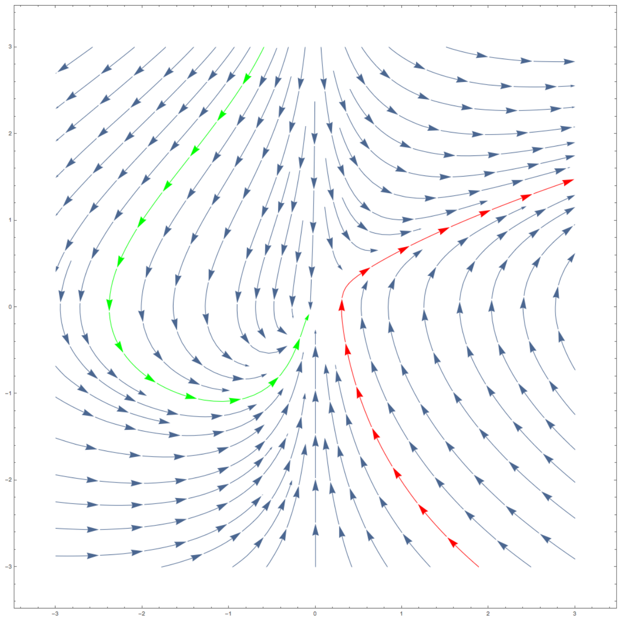


Fig 2.2.7 *Le champs scalaire f sur* $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$

Définition 7 (Champ de vecteurs)**.** *On appelle un champs vectoriel toute fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui associée à chaque vecteur un autre vecteur.*

Exemple 9. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ définie par $f(x,y) = (xy, x-y)$



2.3 Gradient, divergence, rotationnel, laplacien et opérateur nabla

Définition 8 (Gradient d'un champ de scalaires)**.** *On appelle gradient d'un champs de scalaire* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ *et on le note* grad f *le vecteur suivant*

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Proposition 4. *Soit* (S) *une surface dans* $\mathbb{R}^3$ *définie par l'équation*

$$f(x, y, z) = 0$$

alors la gradient de f *est orthogonale à la surface*

Preuve. soit $(x_0, y_0, z_0) \in (S)$ et soit (C) la courbe qui passe pa ce point et telque $(C) \subset (S)$, on considère une paramétrisation de cette courbe par le paramètre t, on a donc

$$\forall t : \quad F(t) = f\,(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$

et donc

$$F'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$$

qui peut être mise sous la forme

$$\nabla f(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = 0$$

donc me gradient est orthogonal à la tangente de n'importe qu'elle courbe qui passe par le point (x_0, y_0, z_0) donc il est orthogonal au plan tangent de (S) et donc il est orthogonale à (S). □

Définition 9 (Champs de gradient)**.** *Soit* f *un champs vectoriel on dit que c'est un champs de gradient ou encore dérive d'un potentiel, si il existe un champs scalaire g appelé le potentiel tel que*

$$f = \text{grad } g.$$

Dans le plan on appelle ligne de niveau de g les courbes sur lesquelles g est constante, alors si le champ de vecteurs f *dérive d'un potentiel g, les lignes de niveau de g sont appelées courbes équipotentielles pour le champ de vecteurs* f.

Exemple 10. Soit la fonction f définie par

$$f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2},$$

donc

$$\text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2\,x\; e^{x^2+y^2+z^2} \\ 2\,ye^{\,x^2+y^2+z^2} \\ 2\,z\; e^{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

Définition 10 (Divergence d'un champ de vecteurs)**.** *Soit* f *un champs vectoriel, on défini la divergence de* f *par*

$$\text{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

Exemple 11. Soit le champs vectoriel f définie par

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + \cos(y) \\ \sin(xy) + \cos(zx^2) \\ xy \end{pmatrix}.$$

ce qui donne que

$$\operatorname{div} f(x,y,z) = 2x + y\cos(xy)$$

Définition 11 (Rotationnel d'un champ de vecteurs). *Soit f un champs vectoriel, on défini le rotationnel de f par*

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial y} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial f_1}{\partial z} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Exemple 12. Soit le champs vectoriel f définie par

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + \cos(y) \\ \sin(xy) + \cos(zx^2) \\ xy \end{pmatrix}.$$

alors

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} x - x^2\sin(zx^2) \\ y \\ y\cos(xy) - 2xy\sin(zx^2) - \sin(y) \end{pmatrix}.$$

Définition 12 (Champs de Rotationnels). *Soit f un champs vectoriel on dit que c'est un champs rotationel s'il existe un champs vectoriel g tel que*

$$f = \operatorname{rot} g.$$

Définition 13 (Laplacien scalaire d'un champ de scalaires). *On appelle le laplacien scalaire d'un champs de vecteur scalaire*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Exemple 13. Soit le champs scalaire

$$f(x,y,z) = x^2 + x^2\cos(y) + \sin(z)$$

alors

$$\Delta f(x,y,z) = 2 + 2\cos(y) - x^2\sin(y) - \sin(z).$$

Définition 14 (Laplacien vectoriel d'un champ de vecteur). *On appelle le laplacien vectoriel d'un champs de vecteur vectoriel*

$$\vec{\Delta} f = \operatorname{grad}(\operatorname{div} f) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} f) = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix}$$

Exemple 14. Soit le champs vectoriel f définie par

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + e^{2y} \\ x + ye^z \\ \sin(x+y+z) \end{pmatrix},$$

alors

$$\overrightarrow{\Delta} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \Delta(x^2 + e^{2y}) \\ \Delta(x + ye^z) \\ \Delta(\sin(x+y+z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 4e^{2y} \\ ye^z \\ -3\sin(x+y+z) \end{pmatrix}.$$

Définition 15 (Opérateur)**.** *On appelle un opérateur une application d'un ensemble de fonctions dans un autre ensemble de fonctions.*

Définition 16 (Opérateur nabla)**.** *On appelle opérateur nabla et on le note ∇ l'opérateur de $\mathcal{C}^1$ dans $\mathcal{C}^0$ défini par*

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Proposition 5 (Opérateur nabla, divergence, laplacien et rotationnel)**.**

1. *Soit f un champs scalaire alors :* $\operatorname{grad} f = \nabla f$.
2. *Soit f un champs vectoriel alors :* $\operatorname{div} f = \nabla \cdot f$.
3. *Soit f un champs vectoriel alors :* $\operatorname{rot} f = \nabla \wedge f$.
4. *Soit f un champs vectoriel alors :* $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$.
5. *Soit f un champs scalaire alors :* $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$.
6. *Soit f un champs scalaire alors :* $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \wedge (\nabla f) = 0$.
7. *Soit f un champs vectoriel alors :* $\overrightarrow{\Delta} f = \nabla(\nabla \cdot f) - \nabla \wedge (\nabla \wedge f)$.

2.4 Potentiels scalaires et potentiels vecteurs

Définition 17 (Domaine étoilé)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, on dit que Ω est un domaine étoilé par rapport à un point $x_0 \in \Omega$ si*

$$\forall x \in \Omega : \quad \{(1-t)x_0 + tx, \quad t \in [0,1]\} \subset \Omega.$$

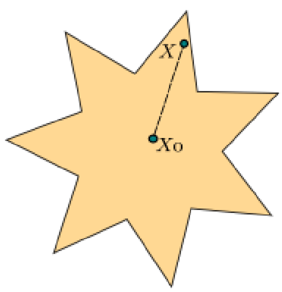


Fig 2.4.8 *Domaine étoilé*

Définition 18 (Champs conservatif)**.** *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ un domaine étoilé, et f un champs de vecteur, alors f est dit conservatif ou découle d'un potentiel si il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^1(S;\mathbb{R})$ tel que*

$$f = -\nabla g.$$

Proposition 6. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le champ de vecteurs f dérive d'un potentiel scalaire est que*

$$\mathrm{rot} f = \nabla \wedge f = 0.$$

et dans ce cas le potentiel g associée à f est défini par

$$V(X) = -\int_0^1 X \cdot f(tX)dt + Cst.$$

Preuve.
$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que f dérive d'un champs potentielle, donc il existe un champs scalaire g tel que

$$f = \nabla g$$

ce qui donne que

$$\nabla \wedge f = \nabla \wedge (\nabla\, g) = 0$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose maintenant que le champs de vecteur f satisfait

$$\mathrm{rot} f = \nabla \wedge f = 0$$

donc

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y},$$

on va montrer qu'il existe une fonction g scalaire tel que

$$f_1 = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad f_3 = \frac{\partial g}{\partial z},$$

On suppose que Ω est étoilé par rapport à 0, on pose $X = {}^t(x,y,z)$ et on note par

$$g(X) = \int_0^1 X \cdot f(tX)dt$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(X) &= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 X \cdot f(tX)dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(X \cdot f(tX)\right)dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}X\right) \cdot f(tX) + X \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(f(tX)\right)dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot f(tX) + X \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(f(tX)\right)dt
\end{aligned}$$

de plus

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(tX)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} f_1(tX) \\ f_2(tX) \\ f_3(tX) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1(tX) \\ \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(tX) \\ \\ \frac{\partial}{\partial x} f_3(tX) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1(tX) \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} f_1(tX) \\ \\ \frac{\partial}{\partial z} f_1(tX) \end{pmatrix}$$

donc

$$X \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(f(tX)\right) = \left(x\frac{\partial}{\partial x}\left(f_1(tX)\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1(tX)\right) + z\frac{\partial}{\partial z}\left(f_1(tX)\right) \right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(f_1(tX)\right),$$

alors

$$\frac{\partial g}{\partial x}(X) = \int_0^1 f_1(tX) + \frac{\partial}{\partial t}\left(f_1(tX)\right) dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(tf_1(tX)\right) dt = tf_1(tX)|_0^1 = f_1(X).$$

de la même manière on trouve que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(X) = f_2(X), \quad \frac{\partial g}{\partial z}(X) = f_3(X).$$

□

Exemple 15. Soit le champs vectoriel

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + z^2 y \\ \dfrac{1}{(y+1)^2} + xz^2 \\ 2xyz \end{pmatrix},$$

le calcule donne $\mathrm{rot} f(x, y, z) = 0$ donc il existe un champs scalaire g dit potentiel tel que

$$f \equiv -\nabla V$$

ce qui donne que

$$\begin{aligned} V(X) &= -\int_0^1 X \cdot f(tX) dt + Cst \\ &= -\int_0^1 x\left(x^2t^2 + z^2yt^3\right) + y\left(\frac{1}{(yt+1)^2} + z^2xt^3\right) + z\left(2xyzt^3\right) dt + Cst \\ &= -\, x\left(\frac{1}{3}x^2t^3 + \frac{1}{4}z^2yt^4\right) + y\left(-\frac{1}{y(yt+1)} + \frac{1}{4}z^2xt^4\right) + z\left(\frac{1}{2}xyzt^4\right)\Bigg|_0^1 + Cst \\ &= -x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}z^2y\right) - y\left(-\frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{4}z^2x\right) - z\left(\frac{1}{2}xyz\right) + Cst \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{y+1} - xyz^2 + Cst \end{aligned}$$

Définition 19 (Champs vecteur dérive d'un potentiel vecteur). *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ un domaine étoilé, et f un champs de vecteur, alors on dit que f dérive d'un potentiel vecteur si il existe un champ de vecteurs $g \in \mathcal{C}^2(S; \mathbb{R}^3)$ tel que*

$$f = \mathrm{rot} g.$$

Proposition 7. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le champ de vecteurs f dérive d'un potentiel vecteur est que*

$$\mathrm{div} f = 0.$$

De plus le potentiel vecteur est donné par

$$g(X) = \int_0^1 t\ f(tX) \wedge X dt + Cst.$$

Preuve.
$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que f dérive d'un champs potentielle vecteur, donc il existe un champs vectoriel g tel que

$$f = \operatorname{rot} g,$$

ce qui donne que

$$\operatorname{div} f = \operatorname{div}(\operatorname{rot} g) = 0.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose maintenant que le champs de vecteur f satisfait

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0.$$

On considère Ω un domaine étoilé par rapport à 0, on note par $X = {}^t(x, y, z)$ et on pose

$$\begin{aligned}
g(X) &= \int_0^1 t\ f(tX) \wedge X dt = \int_0^1 t \begin{pmatrix} zf_2(tX) - yf_3(tX) \\ xf_3(tX) - zf_1(tX) \\ yf_1(tX) - xf_2(tX) \end{pmatrix} dt \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^1 t\,(zf_2(tX) - yf_3(tX))\,dt \\ \displaystyle\int_0^1 t\,(xf_3(tX) - zf_1(tX))\,dt \\ \displaystyle\int_0^1 t\,(yf_1(tX) - xf_2(tX))\,dt \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_3}{\partial y} &= \frac{1}{\partial y}\int_0^1 t\,(yf_1(tX) - xf_2(tX))\,dt = \int_0^1 t\frac{1}{\partial y}\,(yf_1(tX) - xf_2(tX))\,dt \\
&= \int_0^1 t\left(f_1(tX) + ty\frac{\partial f_1}{\partial y}(tX) - tx\frac{\partial f_2}{\partial y}(tX)\right) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_2}{\partial z} &= \frac{1}{\partial z}\int_0^1 t\,(xf_3(tX) - zf_1(tX))\,dt = \int_0^1 t\frac{1}{\partial z}\,(xf_3(tX) - zf_1(tX))\,dt \\
&= \int_0^1 t\left(tx\frac{\partial f_3}{\partial z}(tX) - tf_1(tX) - tz\frac{\partial f_1}{\partial z}(tX)\right) dt
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} &= \int_0^1 t\left(2f_1(tX) + ty\frac{\partial f_1}{\partial y}(tX) + tx\left[-\frac{\partial f_2}{\partial y}(tX) - \frac{\partial f_3}{\partial z}(tX)\right] + tz\frac{\partial f_1}{\partial z}(tX)\right) dt \\
&= \int_0^1 t\left(2f_1(tX) + t\left[x\frac{\partial f_1}{\partial x}(tX) + y\frac{\partial f_1}{\partial y}(tX) + z\frac{\partial f_1}{\partial z}(tX)\right]\right) dt \\
&= \int_0^1 2tf_1(tX) + t^2\frac{\partial}{\partial t}\,(f_1(tX))\,dt \\
&= \int_0^1 2tf_1(tX)dt + \int_0^1 t^2\frac{\partial}{\partial t}\,(f_1(tX))\,dt \\
&= t^2 f_1(tX)\big|_0^1 - \int_0^1 t^2\frac{\partial}{\partial t}\,(f_1(tX))\,dt + \int_0^1 t^2\frac{\partial}{\partial t}\,(f_1(tX))\,dt \\
&= f_1(X).
\end{aligned}$$

de la même manière on trouve que

$$\frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial z} = f_2(X), \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial x} = f_3(X).$$

□

Exemple 16. Soit le champs de vecteur f défini par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -xz \\ x^2 + yz \\ xy \end{pmatrix},$$

le calcule donne

$$\operatorname{div} f \equiv 0$$

donc il existe un potentiel vecteur donnée par

$$\begin{aligned} g(X) &= \int_0^1 t f(tX) \wedge X dt + Cst = \int_0^1 t \begin{pmatrix} -t^2xz \\ t^2x^2 + t^2yz \\ t^2xy \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt + Cst \\ &= \int_0^1 t^3 \begin{pmatrix} -xz \\ x^2 + yz \\ xy \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt + Cst = \int_0^1 t^3 \begin{pmatrix} x^2z + yz^2 - xy^2 \\ x^2 + xz^2 \\ -x^3 - 2xyz \end{pmatrix} dt + Cst \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x^2z + yz^2 - xy^2 \\ x^2 + xz^2 \\ -x^3 - 2xyz \end{pmatrix} + Cst. \end{aligned}$$

2.5 Intégrale curviligne

2.5.1 Définition et théorème

Définition 20 (Intégrale le long d'un chemin)**.** *Soit (C) une courbe dans $\mathbb{R}^3$, $\{\gamma(t), \quad t \in [a, b]\}$ un paramétrage de (C) et $f = (f_1, f_2, f_3)$ un champs de vecteur de $\mathbb{R}^3$. On défini l'intégrale curviligne de f sur le long de la courbe (C) par*

$$\int_{(C)} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

si la courbe est fermée il est noté

$$\oint_{(C)} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Remarque 1. si $f_3 \equiv 0$ et si

$$(C) \subset \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad z = 0\right\},$$

cela permet de définir l'intégrale curviligne dans $\mathbb{R}^2$ par

$$\int_{(C)} f_1 dx + f_2 dy = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

et si la courbe est fermée

$$\oint_{(C)} f_1 dx + f_2 dy = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

△

Théorème 1 (Indépendance de paramètrage)**.** *L'intégrale curviligne est indépendant du paramétrage et ne dépend que de la courbe sur laquelle on fait l'intégration.*

Preuve. Soit γ_1 et γ_2 deux paramétrage de (C) et φ une bijection de $[a, b]$ dans $[c, d]$ définie par

$$\varphi = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1,$$

ainsi

$$\gamma_2(\varphi(t)) = \gamma_1(t)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)dt &= \int_a^b f(\gamma_2(\varphi(t))) \cdot \nabla(\gamma_2(\varphi(t)))dt \\
&= \int_a^b f(\gamma_2(\varphi(t))) \cdot (\gamma_2')(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\
&= \langle s = \varphi(t), \quad ds = \varphi'(t)dt \rangle \\
&= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\gamma_2(s)) \cdot (\gamma_2')(s)ds \\
&= \int_c^d f(\gamma_2(s)) \cdot (\gamma_2')(s)ds
\end{aligned}$$

□

Exemple 17. Soit le champs de vecteur f défini par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ xy \\ x^2 + y^2 + z \end{pmatrix},$$

et soit la courbe (C) définie par

$$(C) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x = \cos(z/3), \quad z \in [0, 3\pi]\right\},$$

on pose

$$x = \cos(t), \quad y = \sin(t)$$

vu que cos est bijetive sur $[0, \pi]$ donc

$$x = \cos(z/3) \Longrightarrow \cos(t) = \cos(z/3) \Longrightarrow z = 3t, \quad t \in [0, \pi]$$

donc

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 3t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi]$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int_{(\gamma)} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz &= \int_0^\pi \sin(t)(\cos(t))^2 + \cos(t)(\sin(t))^2 + 1 + 3t dt \\
&= -\frac{1}{3}(\cos(t))^3 + \frac{1}{3}(\sin(t))^3 + t + \frac{3}{2}t^2 \Big|_0^\pi \\
&= \frac{2}{3} + \pi + \frac{3}{2}\pi^2.
\end{aligned}$$

Définition 21 (Intégrale sur une courbe)**.** *Soit* (C) *une courbe et* g *une fonction scalaire*

$$\int_{(C)} g dl := \int_a^b g(\gamma(t)) \left\|\gamma'(t)\right\| dt.$$

Définition 22 (Circulation d'un champ de vecteurs)**.** *On définit la circulation d'un vecteur* v *le long d'un contour (ou une courbe)* (C) *par l'intégrale curviligne suivant*

$$\mathscr{C}_C(v) = \int_{(C)} v \cdot dl.$$

La circulation le long d'un contour fermé est notée

$$\mathscr{C}_C(v) = \oint_{(C)} v \cdot dl.$$

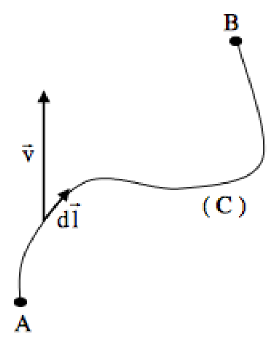


Fig 2.5.9 *Circulation d'un vecteur le long d'une courbe*

2.5.2 Conditions pour qu'une intégrale curviligne ne dépende pas du chemin d'intégration

Définition 23 (Indépendance du chemin)**.** *Soit* f *un champ de vecteurs défini et continu sur un domaine* $\mathcal{D}$ *de* $\mathbb{R}^3$*,* $a, b \in \mathbb{R}^3$ *et* C *une courbe reliée* a *et* b*. On dira que* f *a la propriété d'indépendance du chemin si la valeur de*

$$\oint_{(C)} f \cdot dl$$

est indépendante du choix de la courbe C *joignant* a *et* b*.*

Proposition 8 (Propriété d'indépendance du chemin)**.** *Un champ de vecteurs* f *défini et continu sur un domaine* $\mathcal{D}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *a la propriété d'indépendance du chemin si et seulement si*

$$\oint_{(C)} f \cdot dl = 0,$$

pour toutes les courbes fermées C *contenues dans* $\mathcal{D}$*.*

Preuve.
$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que f satisfait la propriété d'un dépendance du chemin et soit (C) une courbe fermée, soit a et b deux point sur la courbe (C) et onn note par (C_1) la partie de la courbe relié a et b et (C_2) la partie de la courbe relié b et a

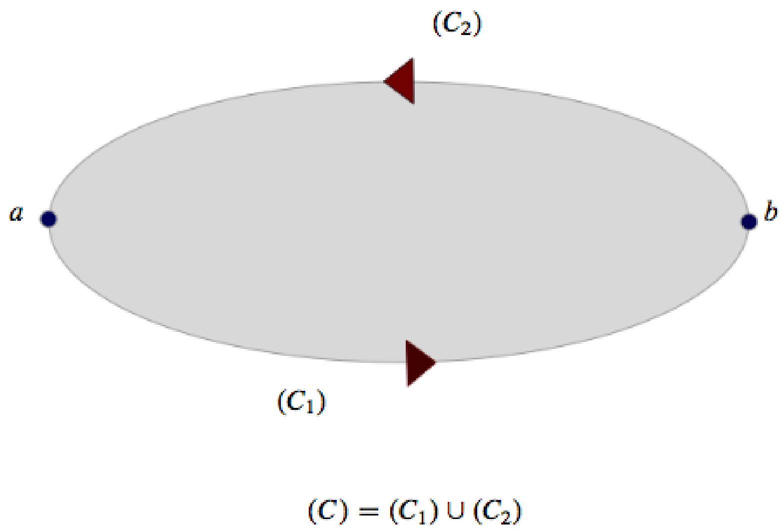


Fig 2.5.10 *Circulation sur une courbe fermée entre a et b*

alors

$$\oint_{(C)} f \cdot dl = \int_{(C_1)} f \cdot dl + \int_{(C_2)} f \cdot dl$$

on note par $(-C_2)$ la courbe sui reliée a et b donc

$$\oint_{(C)} f \cdot dl = \int_{(C_1)} f \cdot dl - \int_{(-C_2)} f \cdot dl$$

on utilise la propriété de l'indépendance de chemins on en déduit que

$$\int_{(C_1)} f \cdot dl = \int_{(-C_2)} f \cdot dl$$

et donc

$$\oint_{(C)} f \cdot dl = 0$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que l'intégrale curviligne de f sur toute courbe fermée est nulle, soit (C) une courbe fermée quelconque et a, b deux point quelconque sur la même courbe, on note par (C_1) la courbe qui reliée a et b et (C_2) la courbe qui reliée b et a donc $(C) = (C_1) \cup (C_2)$, donc

$$\oint_{(C)} f \cdot dl = \int_{(C_1)} f \cdot dl + \int_{(C_2)} f \cdot dl$$

ce qui donne

$$\oint_{(C)} f \cdot dl = \int_{C_1} f \cdot dl - \int_{(-C_2)} f \cdot dl$$

vu que (C) est fermée donc

$$\int_{C_1} f \cdot dl = \int_{(-C_2)} f \cdot dl.$$

$\square$

Corollaire 1 (Indépendance du chemin pour champs de gradient). *Soit f un champ scalaire défini et continu sur un domaine ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$, alors $F = \nabla f$ a la propriété d'indépendance du chemin.*

Preuve. soit p et q deux point, (C) une courbe reliée p et q et soit γ une paramétrisation de (C) alors

$$\int_{(C)} F \cdot dl = \int_{(C)} \nabla f \cdot dl = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

ce qui donne

$$\int_{(C)} F \cdot dl = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\gamma_2'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))\gamma_3'(t) dt$$

ainsi

$$\int_{(C)} F \cdot dl = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left(f(\gamma(t))\right) dt \; = \; f(\gamma(t))|_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(q) - f(p).$$

vu que l'intégrale ne dépend que des extrémités p et q, alors on a la propriété de l'indépendance du chemin. □

Théorème 2. *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ un champs de vecteur alors f est indépendant du chemin si et seulement si f est un champs découle d'un potentielle (champs conservatif) autrement dit*

$$\operatorname{div} f = 0.$$

Preuve. On sais deja que si on a un qu'un champs conservatif est indépendant du chemin, inversement on suppose que l'intégrale de f est indépendant du chemin et soit

$$g(X) = \int_{X_0}^{X} f \cdot dl$$

soit (C) une courbe relié X_0 à X avec un paramétrage γ donc

$$g(\gamma(s)) = \int_a^s f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

on dérive en s alors

$$(\nabla g)(\gamma(s)) = f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) \Longrightarrow [(\nabla g)(\gamma(s)) - f(\gamma(s))] \cdot \gamma'(s) = 0$$

ce qui donne

$$[(\nabla g)(X) - f(X)] \cdot \gamma'(s) = 0$$

vu que γ est quelconque donc γ' est quelconque ce qui donne que

$$f \equiv \nabla g.$$

□

2.5.3 Formule de Green, Formule de Gausse

Définition 24 (Type de domaine)**.** *Soit $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$, on dit que $\mathcal{D}$ est de*

1. *Type I : si il existe deux fonctions $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tel que*

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x) \leq y \leq g(x)\right\}.$$

2. *Type II : si il existe deux fonctions $\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ tel que*

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\right\}.$$

3. *Type III : si il est de Type I ou Type II.*

Définition 25 (Orientation de la frantière)**.** *Soit $\mathcal{D}$ un domaine et soit $\partial\mathcal{D}$ sa frontière. Nous dirons que $\partial\mathcal{D}$ est orientée positivement par rapport à $\mathcal{D}$ si en parcourant le long de $\partial\mathcal{D}$, l'intérieur est à gauche.*

Théorème 3 (Dans le plan)**.** *Soit $\mathcal{D}$ un domaine qui est une union finie de domaines de Type III qui s'interceptent le long de leur frontière, et soit $f : (P, Q) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}; \mathbb{R})$. Alors*

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right) dxdy = \oint_{\partial\mathcal{D}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Preuve. Soit a et b la plus petite valeur de x tel que $(x, y) \in \mathcal{D}$. On découpe la courbe (C) en deux courbe (l_1) paramétrie par $\{(x, y_1(x)), \quad x \in [a, b]\}$ et (l_2) paramétrie par $\{(x, y_2(x)), \quad x \in [a, b]\}$ selon la figure suivante

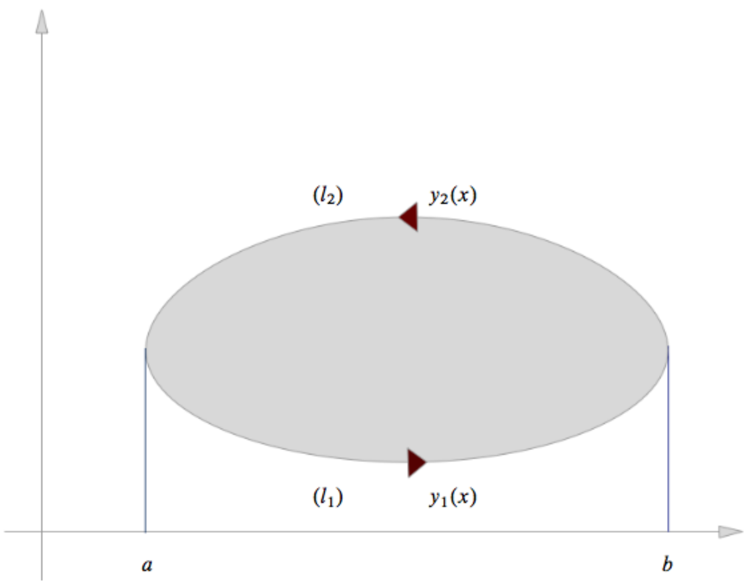


Fig 2.5.11 *Première paramétrisation de la courbe*

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy &= \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dydx = \int_a^b P(x,y)|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}dx \\
&= \int_a^b P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))dx \\
&= \int_a^b P(x,y_2(x))dx - \int_a^b P(x,y_1(x))dx \\
&= \int_{(-l_2)} P(x,y(x))dx - \int_{(l_1)} P(x,y(x))dx \\
&= -\int_{(l_2)} P(x,y(x))dx - \int_{(l_1)} P(x,y(x))dx \\
&= -\int_{\partial\mathcal{D}} P(x,y(x))dx
\end{aligned}$$

Soit α et β la plus petite valeur de y tel que $(x,y) \in \mathcal{D}$. On découpe la courbe (C) en deux courbe (C_1) paramétrie par $\{(x_1(y),y), \quad y \in [\alpha,\beta]\}$ et (C_2) paramétrie par $\{(x_2(x),y), \quad x \in [\alpha,\beta]\}$ selon la figure suivante

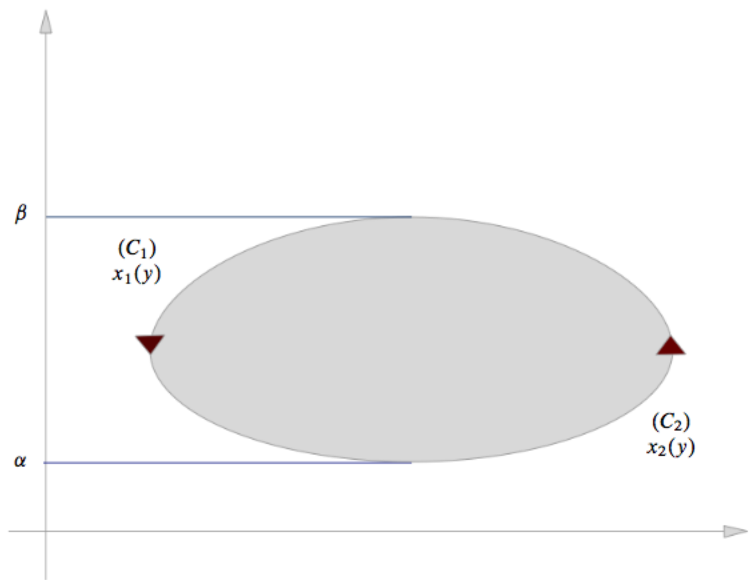


Fig 2.5.12 *Seconde paramétrisation de la courbe*

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy &= \int_\alpha^\beta \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta Q(x,y)|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)}dy \\
&= \int_\alpha^\beta Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)dy \\
&= \int_\alpha^\beta Q(x_2(y),y)dx - \int_\alpha^\beta Q(x_1(y),y)dy \\
&= \int_{(C_2)} Q(x(y),y)dy - \int_{(-C_1)} Q(x(y),y)dy \\
&= \int_{(C_2)} Q(x(y),y)dy + \int_{(C_1)} Q(x(y),y)dy \\
&= \int_{\partial\mathcal{D}} Q(x(y),y)dy
\end{aligned}$$

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int_{\partial\mathcal{D}} P(x,y(x))dx + Q(x(y),y)dy.$$

□

Théorème 4 (Gauss (ou de la divergence) dans le plan). *Soit $f = (P, Q)$ un champ de classe $\mathcal{C}^1$ sur une courbe fermée $\partial\mathcal{D}$ et son intérieur $\mathcal{D}$. Si n désigne la normale extérieure à $\mathcal{D}$ en chaque point de $\partial\mathcal{D}$, on a*

$$\oint\limits_{\partial\mathcal{D}} f \cdot ndl = \iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}dxdy.$$

Preuve.

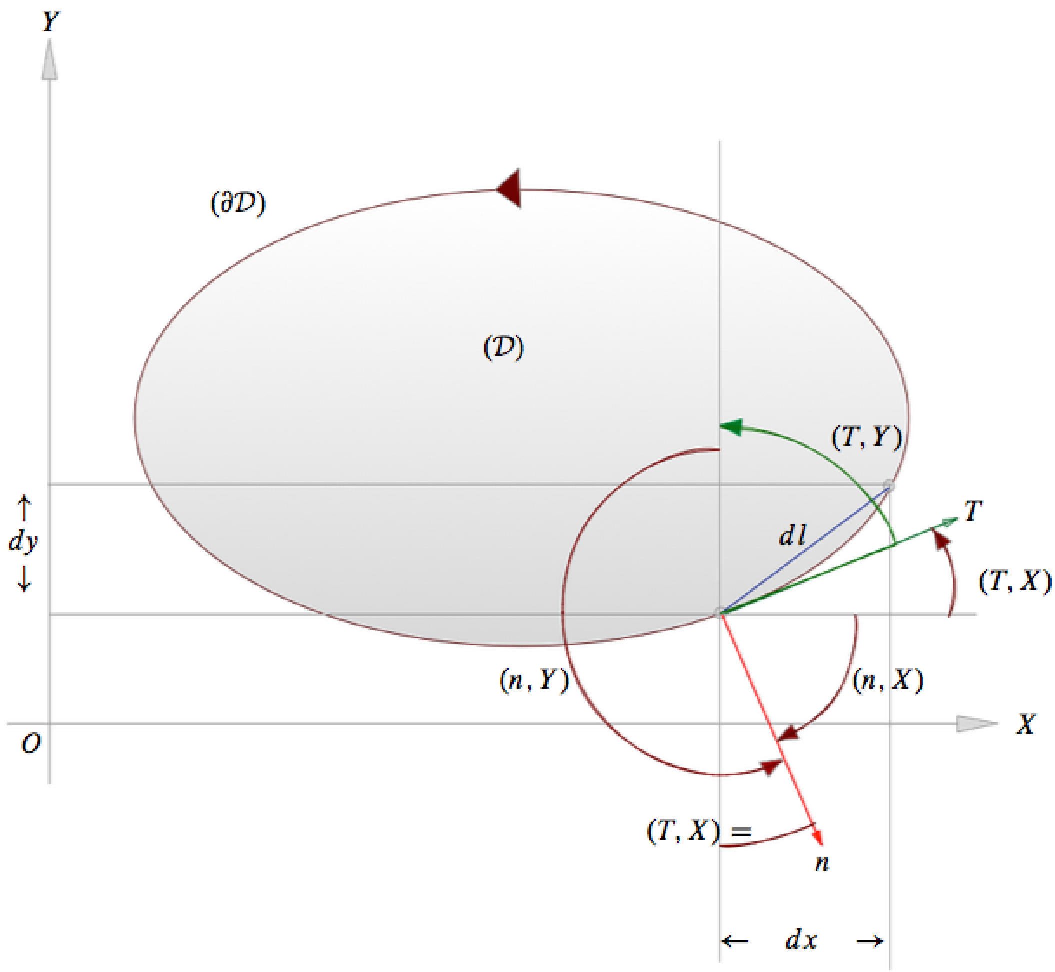


Fig 2.5.13 *Représentation des angles*

Soit T le vecteur tangent à $\partial\mathcal{D}$ et dans la même direction et n la normale extérieure ansi

$$(n, Y) = \pi + (T, X), \quad (n, X) = (T, Y)$$

or

$$dx = \cos(T, X)dl, \quad dy = \cos(t, Y)dl$$

donc

$$dx = -\cos(n, Y)dl, \quad dy = \cos(n, X)dl$$

la formule de Green pour le champs de vecteur $h = (-Q, P)$ donne

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} dxdy &= \oint\limits_{\partial \mathcal{D}} Qdx + Pdy \\ &= \oint\limits_{\partial \mathcal{D}} (Q\cos(n,Y) + P\cos(n,X))\, dl \\ &= \oint\limits_{\partial \mathcal{D}} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(n,X) \\ \cos(n,Y) \end{pmatrix} dl \\ &= \oint\limits_{\partial \mathcal{D}} f \cdot n dl.\end{aligned}$$

□

2.6 Intégrales de surface

Définition 26 (Flux d'un champs vectoriel)**.** *On définie le flux d'un champs de vecteur v à travers une surface (S) par l'intégrale double suivant*

$$\phi_{(S)}(v) = \iint_S v \cdot n ds.$$

Le flux à travers une surface fermée (S) est notée

$$\phi_{(S)}(v) = \oiint_S v \cdot n ds.$$

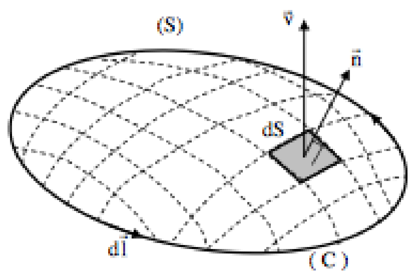


Fig 2.6.14 *Flux d'un champs de vecteur à travers une surface*

2.6.1 Définition et théorèmes

Définition 27 (Intégrale superficielle)**.** *Soit (S) une surface avec un paramétrage*

$$\{\phi(u,v), \quad (u,v) \in K\},$$

et un vecteur normale

$$N(u,v) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} N_1(u,v) \\ N_2(u,v) \\ N_3(u,v) \end{pmatrix}.$$

Les intégrale de superficielles sont des intégrale de type

$$\iint_{\phi} f_3 dx \wedge dy = \iint_{k} f_3(\phi(u,v)) N_3(u,v) du dv$$
$$\iint_{\phi} f_2 dx \wedge dz = \iint_{k} f_2(\phi(u,v)) N_2(u,v) du dv$$
$$\iint_{\phi} f_1 dy \wedge dz = \iint_{k} f_1(\phi(u,v)) N_1(u,v) du dv$$

Définition 28 (Inétgrale d'un champs de vecteur sur une surface). *Les intégrales de surface sont données par*

$$\iint_{(S)} f_3 n_3 ds = \iint_{\phi} f_3 dx \wedge dy$$
$$\iint_{(S)} f_2 n_2 ds = \iint_{\phi} f_2 dx \wedge dz$$
$$\iint_{(S)} f_1 n_1 ds = \iint_{\phi} f_1 dy \wedge dz$$
$$\iint_{(S)} f \cdot n ds = \iint_{(S)} f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3 ds$$

tel que n est le vecteur normale unitaire sortant à la surface (S).

Théorème 5 (Indépendance du paramétrage dans le cas d'un champs de vecteur). *Soit (S) une surface alors la valeur de*

$$\iint_{(S)} f \cdot n ds = \iint_{K} f(\phi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)(u,v) du dv$$

est indépendante du paramétrage choisie.

Preuve. Soit (S) une surface paramétrée par deux paramétrage qui préservent la même direction d'orientation

$$\{\phi(u,v), \quad (u,v) \in K\}, \quad \{\psi(r,t), \quad (r,t) \in K'\},$$

ainsi il existe une application bijective φ de K dans K' tel que

$$\phi(u,v) = \psi(\varphi(u,v)), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \quad \mathcal{J}_{\varphi}(u,v) > 0,$$

donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}(\psi(\varphi(u,v))) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \frac{\partial \psi}{\partial r}(\varphi(u,v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) \frac{\partial \psi}{\partial t}(\varphi(u,v))$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}(\psi(\varphi(u,v))) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \frac{\partial \psi}{\partial r}(\varphi(u,v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) \frac{\partial \psi}{\partial t}(\varphi(u,v))$$

et donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)(u,v) &= \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \right] \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)(\varphi(u,v)) \\ &= \mathcal{J}_{\varphi}(u,v) \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)(\varphi(u,v)) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\iint_K f(\phi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)(u,v) du dv =$$
$$= \iint_K f(\psi(\varphi(u,v))) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)(\varphi(u,v)) \mathcal{J}_\varphi(u,v) du dv$$
$$= \iint_K f(\psi(r,t)) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)(r,t) dr dt.$$

□

Définition 29 (Intégrale d'un champs scalaire sur une surface)**.** *Soit* (S) *une surface et* g *une fonction scalaire*

$$\int_{(S)} g ds := \iint_K g(\phi(u,v)) \left\| \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)(u,v) \right\| du dv.$$

Théorème 6 (Indépendance du paramétrage dans le cas d'un champs scalaire)**.** *Soit* (S) *une surface alors la valeur de*

$$\iint_{(S)} g ds = \iint_K g(\phi(u,v)) \left\| \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)(u,v) \right\| du dv$$

est indépendante du paramétrage choisie.

Preuve. Soit (S) une surface paramétrée par deux paramétrage

$$\{\phi(u,v), \quad (u,v) \in K\}, \quad \{\psi(r,t), \quad (r,t) \in K'\},$$

ainsi il existe une application bijective φ de K dans K' tel que

$$\phi(u,v) = \psi(\varphi(u,v)), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2),$$

donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}(\psi(\varphi(u,v))) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v)\frac{\partial \psi}{\partial r}(\varphi(u,v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v)\frac{\partial \psi}{\partial t}(\varphi(u,v))$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}(\psi(\varphi(u,v))) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v)\frac{\partial \psi}{\partial r}(\varphi(u,v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v)\frac{\partial \psi}{\partial t}(\varphi(u,v))$$

et donc

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)(u,v) = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v)\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v)\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \right] \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)(\varphi(u,v))$$
$$= \mathcal{J}_\varphi(u,v) \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)(\varphi(u,v))$$

ce qui donne

$$\iint_K g(\phi(u,v)) \left\| \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)(u,v) \right\| du dv =$$
$$= \iint_K g(\psi(\varphi(u,v))) \left\| \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)(\varphi(u,v)) \right\| \left| \mathcal{J}_\varphi(u,v) \right| du dv$$
$$= \iint_K g(\psi(r,t)) \left\| \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)(r,t) \right\| dr dt.$$

□

2.6.2 Formule de Stockes

Théorème 7 (Stokes)**.** *Soit (S) une surface non fermée. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D};\mathbb{R})$ un champ. Si ∂S est orientée positivement par rapport à (S), la circulation de f autour de ∂S est égale au flux de* rot f *à travers (S)*

$$\oint_{(\partial S)} f \cdot dl = \iint_{(S)} \operatorname{rot} f \cdot n \, dS.$$

avec n le vecteur unitaire de (S).

Preuve. Soit (S) une surface non fermée de contour (l) tel que les axes parallèles à (OZ) coupent la surface (S) en un seul point.
La projection de (l) sur le plan (XOY) donne un contour (C) qui enferme une un domaine (σ).
Soit n la normal extérieure à (S) anssi

$$(S): \quad h(x,y,z) = z - s(x,y) = 0$$

et don n est parallèle au gradient de de h donnée par

$$\nabla h = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial s}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial s}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

donc les cosinus directeur de n sont

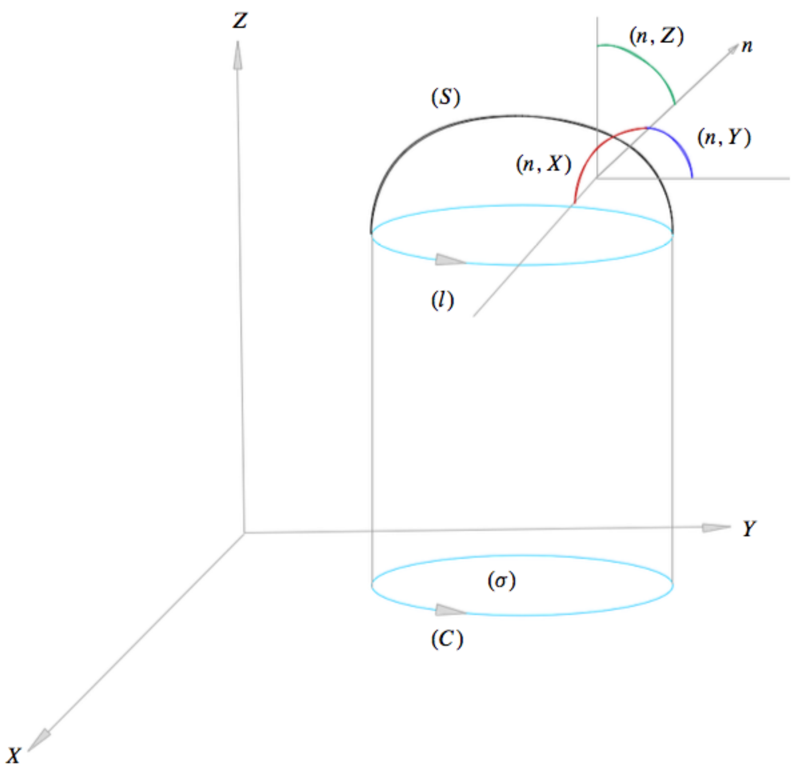


Fig 2.6.15 *Représentation des angles directeurs*

$$\cos(n,X) = -\frac{\partial s/\partial x}{\| \nabla h \|}, \quad \cos(n,Y) = -\frac{\partial s/\partial y}{\| \nabla h \|}, \quad \cos(n,Z) = \frac{1}{\| \nabla h \|},$$

Soit $f = (P, Q, R)$, alors

$$\begin{aligned}\oint_{(l)} P(x,y,z)dx &= \oint_{(l)} P(x,y,s(x,y))dx \\ &= -\iint_{(\sigma)} \frac{\partial}{\partial y}\left(P(x,y,s(x,y))\right) d\sigma \\ &= -\iint_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial y} d\sigma\end{aligned}$$

vu que

$$d\sigma = \cos(n,Z)dS$$

on a

$$\oint_{(l)} P(x,y,z)dx = -\iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial y}\cos(n,Z) + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial y}\cos(n,Z)dS$$

vu que

$$\frac{\partial s}{\partial y}\cos(n,Z) = -\cos(n,Y)$$

donc

$$\oint_{(l)} P(x,y,z)dx = \iint_{(S)} -\frac{\partial P}{\partial y}\cos(n,Z) + \frac{\partial P}{\partial z}\cos(n,Y)dS$$

de la même manière on trouve

$$\oint_{(l)} Q(x,y,z)dy = \iint_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x}\cos(n,Z) - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos(n,X)dS$$

$$\oint_{(l)} R(x,y,z)dz = \iint_{(S)} \frac{\partial R}{\partial y}\cos(n,X) - \frac{\partial R}{\partial x}\cos(n,Y)dS$$

donc

$$\begin{aligned}\oint_{(l)} f\cdot dl &= \iint_{(S)} \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right]\cos(n,X) + \left[\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right]\cos(n,Y) + \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]\cos(n,Z)dS \\ &= \iint_{(S)} \mathrm{rot} f\cdot n dS.\end{aligned}$$

□

2.6.3 Formule d'Ostrogradsky

Théorème 8. *Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale de sa divergence dans le volume $\mathcal{D}$ limité par la surface fermée (S)*

$$\oiint_{(S)} f\cdot n ds = \iiint_{\mathcal{D}} \mathrm{div} f dxdydz.$$

avec n le vecteur normale unitaire sortant de la surface (S).

Preuve. Soit $f = (P, Q, R)$ un champs vectoriel et (S) une surface enferme un domaine $\mathcal{D}$, on note par
— (σ_{xy}) la projection de (S) sur le plan (XOY)

— (S_2) la partie supérieure de (S) et par (S_1) la partie inférieure de (S) relativement à un plan parallèle au plan (XOY)qui coupe la surface (S) en deux partie tel que

$$(S_2): \quad z = z_2(x, y), \quad (S_1): \quad z = z_1(x, y), \quad \forall (x, y) \in \sigma_{xy}.$$

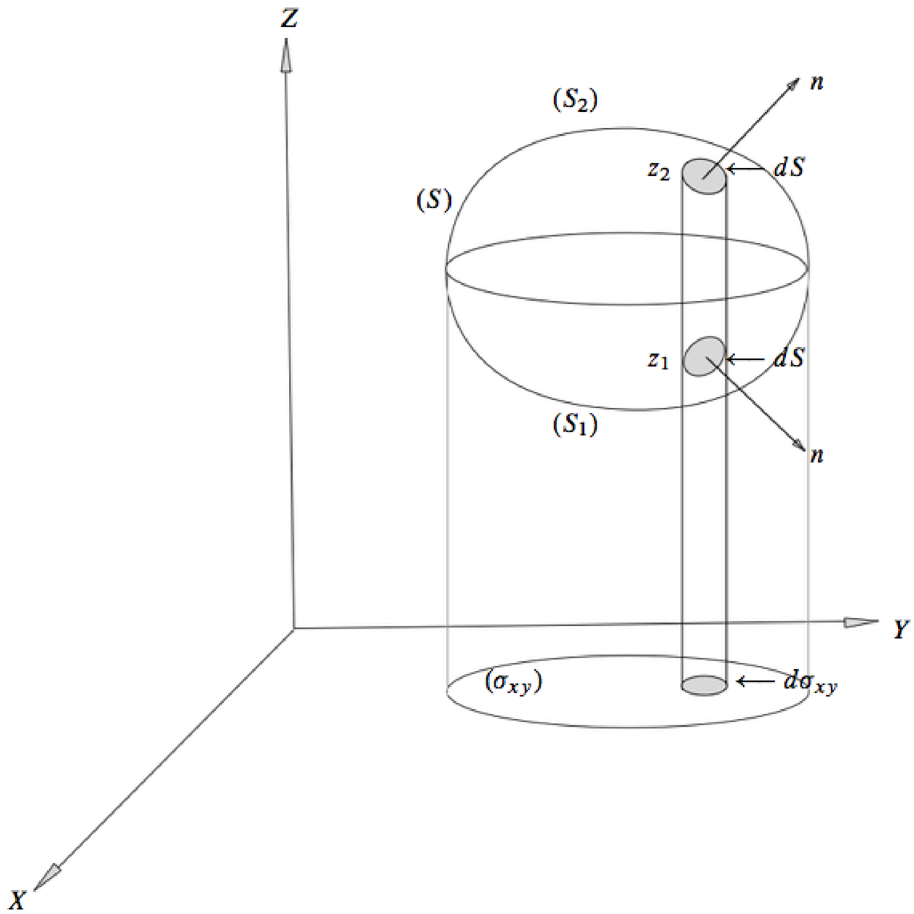


Fig 2.6.16 *Représentation des projection*

Ainsi

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)dxdydz &= \iint_{(\sigma_{x,y})} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)dzd\sigma_{xy} \\ &= \iint_{(\sigma_{x,y})} R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)d\sigma_{xy} \\ &= \iint_{(\sigma_{x,y})} R(x, y, z_2)d\sigma_{xy} - \iint_{(\sigma_{xy})} R(x, y, z_1)d\sigma_{xy}\end{aligned}$$

dans la partie (S_2) on a

$$d\sigma_{xy} = \cos(n, Z)ds$$

et dans la partie (S_1) on a

$$d\sigma_{xy} = -\cos(n, Z)ds$$

donc

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)dxdydz &= \iint_{(S_2)} R(x, y, z)\cos(n, Z)dS + \iint_{(S_1)} R(x, y, z)\cos(n, Z)ds \\ &= \iint_{(S)} R(x, y, z)\cos(n, Z)ds\end{aligned}$$

de la même manière on trouve que

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z)dxdydz = \iint_{(S)} Q(x, y, z)\cos(n, Y)ds$$

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z)dxdydz = \iint_{(S)} P(x, y, z)\cos(n, X)ds$$

ce qui donne que

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} f dxdydz &= \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial Z}dxdydz \\ &= \iint_{(S)} P\cos(n, X) + Q\cos(n, Y) + R\cos(n, Z)ds \\ &= \iint_{(S)} f \cdot n ds\end{aligned}$$

□