Mekki HOUBAD

Intégrale Multiples

Chapitre I d'Analyse III et IV

Septembre 2017

Mekki HOUBAD
Département de Mathématiques
Université Abou Bekr Belkaid
Tlemcen 13000
Algérie
m.houbad@gmail.com

http://www.univ-tlemcen.dz

Table des matières

Chapitre 1

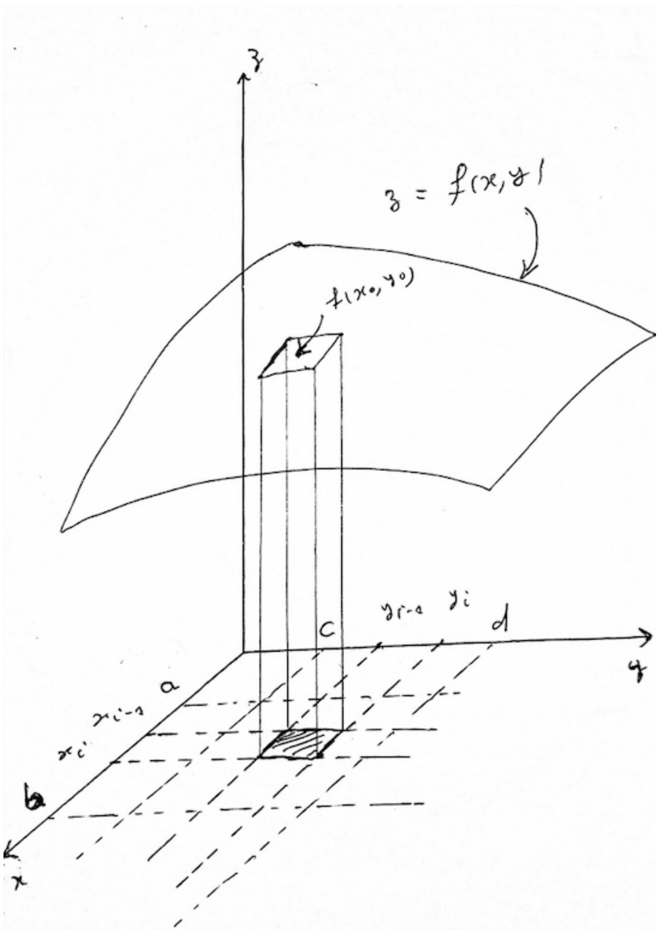
Intégrales multiples

1.1 Intégrale double

1.1.1 Principe des intégrales doubles sur un rectangle

Soit f une fonction de deux variables (x, y) continue dans le domaine $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Sa représentation graphique est une surface $\mathcal{S}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On partage $\mathcal{D}$ en sous rectangles, dans chaque rectangle $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$ on choisit un point $M(x, y)$ et on calcule l'image de (x, y) par la fonction f.



On considère maintenant le volume formé par le rectangle $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$ et du hauteur $f(x, y)$ qui vaut

$$f(x, y)(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$$

ceci représente une approximation du volume formée par le même rectangle et la surface $\mathcal{S}$ de f, ainsi si on considère une partition de n rectangle similaire cela revient à dire que

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \quad y_j = c + j\frac{d-c}{n}, \quad \forall i, j = 1, \cdots, n$$

et donc le volume limité par le graphe de f et le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ est approximé par la somme

$$\frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}, c + j\frac{d-c}{n}\right).$$

lorsque $n \to +\infty$ le volume précédent conside avec le volume formé par la courbe de f et le rectangle $\mathcal{D}$, ainsi on définie l'intégrale double de f sur le rectangle $\mathcal{D}$ comme étant la limite de cette somme lorsque $n \to +\infty$

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy = \operatorname*{Lim}_{n \to +\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}, c + j\frac{d-c}{n}\right).$$

Exemple 1. On veut calculer l'intégrale suivant par une partiton du domaine

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x + 2y)dxdy.$$

On pose

$$\forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \quad f(x, y) = x + 2y,$$

et

$$\forall i, j = 1, \cdots, n : \quad x_i = \frac{i}{n}, \quad y_j = \frac{j}{n}, \quad f(x_i, y_j) = f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{i}{n} + 2\frac{j}{n}.$$

et donc

$$\begin{aligned}
\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x + 2y)dxdy &= \operatorname*{Lim}_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{i}{n} + 2\frac{j}{n}\right) = \operatorname*{Lim}_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{i}{n} + 2\sum_{i,j=1}^{n} \frac{j}{n}\right) \\
&= \operatorname*{Lim}_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}\left(n\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} + 2n\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n}\right) = \operatorname*{Lim}_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}\left(3\sum_{i=1}^{n} i\right) \\
&= \operatorname*{Lim}_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}\frac{3}{2}n^2 \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.

1. Les intégrales doubles servent à calculé les volume de même que les intégrales simples qui servent à calculé les surface.
2. Dans une intégrale double les bornes de x et y doit être rangé dans un ordre croissant.

$\triangle$

Théorème 1 (Théorème de Fubini dans le cas d'un domaine bornée $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$)**.** *Soit f une fonction continue sur un rectangle $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ alors*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx\right] dy.$$

Remarque 2. Le théorème de Fubini explique que pour calculer une intégrale double sur un rectangle on ce ramène à calculer deux intégrales simples.

1. En intégrant d'abord par rapport à x entre a et b et en laissant y constante. Le résultat est une fonction de y.
2. En intégrant cette expression de y entre c et d.

De plus on peut intégrer d'abord par rapport à y entre c et d on obtient une expression en x qu'on integrant aprés entre a et b. △

Exemple 2.

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]} \sin(x+y)dxdy &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2} \sin(x+y)dx\right)dy = \int_0^{\pi/2}\left(-\cos(x+y)\mid_0^{\pi/2}\right)dy\\ &= \int_0^{\pi/2} \left(-\cos(\pi/2+y)+\cos(y)\right)dy = -\sin(\pi/2+y)+\sin(y)\mid_0^{\pi/2}\\ &= 2.\end{aligned}$$

Exemple 3.

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[0,1]\times[2,5]} \frac{1}{(1+x+2y)^2}dxdy &= \int_0^1\left(\int_2^5 \frac{1}{(1+x+2y)^2}dy\right)dx = \int_0^1\left(-\frac{1}{2(1+x+2y)}\Big|_2^5\right)dx\\ &= \int_0^1\left(-\frac{1}{2(11+x)}+\frac{1}{2(5+x)}\right)dx = -\frac{1}{2}\ln(11+x)+\frac{1}{2}\ln(5+x)\Big|_0^1\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{11}{10}\right)).\end{aligned}$$

Remarque 3. Si la fonction $f(x,y)$ peut être mise sous la forme $f(x,y) = h(x)g(y)$ alors par séparation des variables on a

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x)dxdy = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} h(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b h(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right).$$

△

Exemple 4.

$$\iint\limits_{[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]} \sin(x)\cos(y)dxdy = \left(\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos(y)dy\right) = [-\cos(x)]_0^{\pi/2}\,[\sin(y)]_0^{\pi/2} = 1.$$

1.1.2 Calcule des intégrales doubles sur un domaine bornée

Définition 1 (Domaine élémentaire)**.** *On dit que $\mathcal{E}$ est un domaine élémentaire si il est de l'un des deux forme suivante*

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad f_1(x)\le y\le f_2(x)\right\}, \quad ou \quad \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad g_1(y)\le x\le g_2(y)\right\},$$

avec f_1, f_2, g_1, g_2 sont des fonctions continue

Définition 2 (Domaine régulier dans $\mathbb{R}^2$)**.** *Soit $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ on dit qu'il est régulier si il est l'union fini des domaines élémentaires $\mathcal{E}_i$.*

Soit $\mathcal{D}$ un domaine régulier borné, soit $[a,b]\times[c,d]$ le plus petit rectangle qui contient $\mathcal{D}$, on décompose $[a,b]\times[c,d]$ en n^2 rectangle similaires, et soit

$$i,j=1,\cdots n,\quad M_{ij}=\left[a+(b-a)\frac{i-1}{n},a+(b-a)\frac{i}{n}\right]\times\left[c+(d-c)\frac{j-1}{n},c+(d-c)\frac{j}{n}\right]$$

et on note par c_{ij} le centre de chaque rectangle M_{ij}, soit le domaine suivante

$$\mathcal{D}'=\cup\left\{M_{ij}\quad : i,j=1,\cdots n,\quad M_{ij}\subset\mathcal{D}\right\}$$

On considère f une fonction de densité définie sur $\mathcal{D}$ et continue, alors la densité dans chaque rectangle M_{ij} est approché par

$$\frac{(b-a)(c-d)}{n^2}f(c_{ij})$$

et donc la densité globale de $\mathcal{D}$ est approchée par la valeur

$$\mathcal{S}_n=\frac{(b-a)(c-d)}{n^2}\sum_{c_{ij}\in\mathcal{D}'}f(c_{ij})$$

ainsi lorsque n tend ver $+\infty$ la valeur $\underset{n\longrightarrow+\infty}{\text{Lim}}\mathcal{S}_n$ coincide avec la densité du domaine $\mathcal{D}$

Définition 3 (Définition de l'intégrale double)**.** *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2$ on dit que f est intégrable sur $\mathcal{D}$ au sens de Riemann si la somme $\mathcal{S}_n$ converge quand n tend ver l'infinie et on note cette limite par*

$$\iint_{\mathcal{D}}f(x,y)dxdy=\underset{n\longrightarrow+\infty}{\text{Lim}}\mathcal{S}_n.$$

Théorème 2 (l'intégrale double d'une fonction continue)**.** *Soit $\mathcal{D}$ un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction continue sur $\mathcal{D}$, alors f est intégrable au sens de Riemann sur le domaine $\mathcal{D}$, autrement dit $\iint_{\mathcal{D}}f(x,y)dxdy$ existe et fini.*

Théorème 3. *Soit f une fonction continue sur un domaine borné $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. L'intégrale double*

$$\iint_{\mathcal{D}}f(x,y)dxdy,$$

peut être calculer l'une des facons suivante

1. *Si le domaine $\mathcal{D}$ est représenté sous la forme*

$$\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad f_1(x)\le y\le f_2(x),\quad a\le x\le b\right\},$$

tel que f_1 et f_2 sont deux fonctions continue sur $[a,b]$, alors

$$\iint_{\mathcal{D}}f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}f(x,y)dy\right)dx.$$

2. *Si le domaine $\mathcal{D}$ est représenté sous la forme*

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y), \quad c \leq y \leq d\right\},$$

tel que g_1 et g_2 sont deux fonctions continue sur $[c, d]$, alors

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)dx \right) dy.$$

Si les deux représentation sont possible alors les deux résultats sont égaux.

Proposition 1 (Propriétés des intégrales doubles)**.**

1. *L'intégrale double sur un domaine $\mathcal{D}$ est linéaire*

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} (\alpha f + \beta g)(x, y)dxdy = \alpha \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy + \beta \iint\limits_{\mathcal{D}} g(x, y)dxdy$$

2. *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux domaine tel que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ vaut le vide ou une courbe ou un ou plusieurs point isolé alors*

$$\iint\limits_{\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{\mathcal{D}'} f(x, y)dxdy$$

3. *Si $f(x, y) \geq 0$ sur le domaine $\mathcal{D}$ et f non identiquement nulle, alors*

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy > 0.$$

4. *Si pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ on a $f(x, y) \leq g(x, y)$ alors*

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy \leq \iint\limits_{\mathcal{D}} g(x, y)dxdy.$$

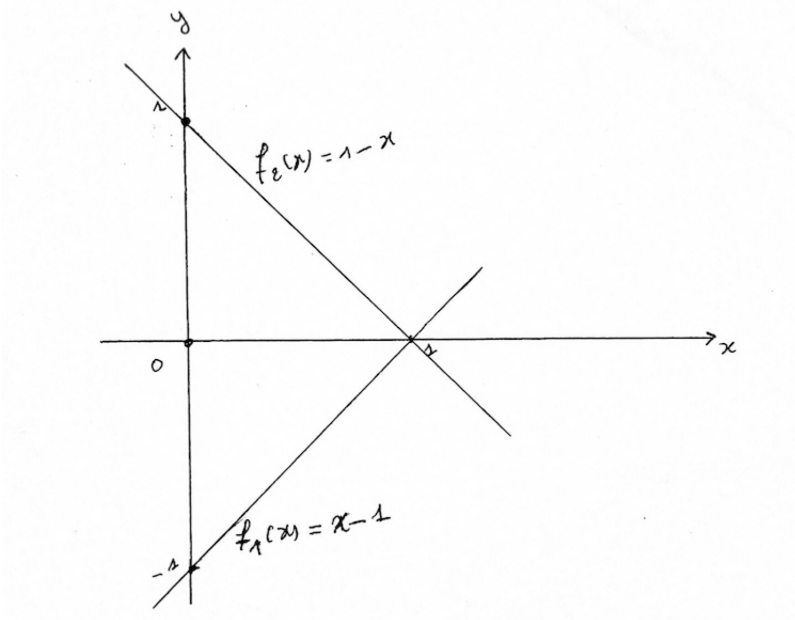
5. *Soit f une fonction continue sur un domaine bornée $\mathcal{D}$ alors*

$$\left| \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy \right| \leq \iint\limits_{\mathcal{D}} |f(x, y)|\, dxdy$$

Exemple 5.

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)dxdy,$$

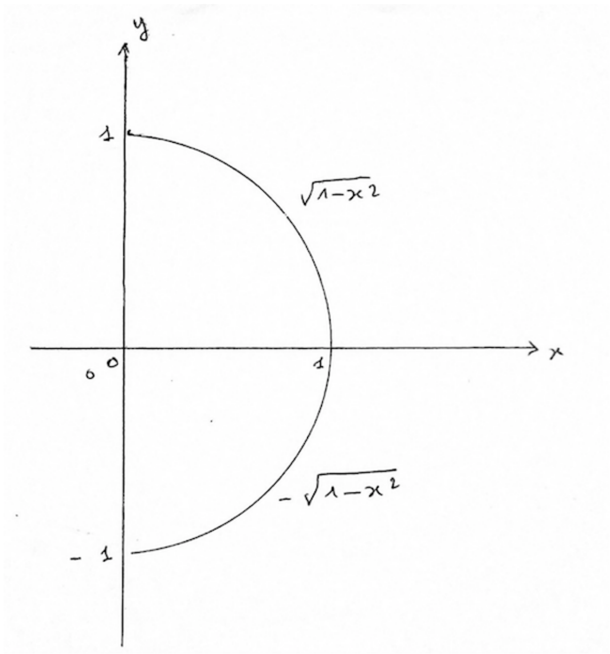
tel que $\mathcal{D}$ est le triangle du sommets $(0, 1)$, $(0, -1)$ et $(1, 0)$.



On pose $f_1(x) = -1 + x$ et $f_2(x) = 1 - x$ pour $x \in [0, 1]$ donc

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} (x^2 + y^2)dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} (x^2 + y^2)dy \right) dx \\
&= \int_0^1 x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \Big|_{x-1}^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 - x^2(x-1) - \frac{1}{3}(x-1)^3 dx \\
&= 2 \int_0^1 x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 dx = 2 \int_0^1 x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(1-x)^3 dx \\
&= 2 \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{12}(1-x)^4 \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Exemple 6. Soit $\mathcal{D}$ est le domaine formé par la partie droite de disque unité.



$$\iint\limits_{\mathcal{D}} (x+2y)dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x+2y)dy \right) dx = \int\limits_0^1 xy + y^2 \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= 2\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}\Big|_0^1$$
$$= \frac{2}{3}.$$

Exemple 7. Soit le domaine

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le y \le x \le 1\right\},$$

Alors

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} e^{x^2} dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x e^{x^2} dy \right) dx = \int\limits_0^1 ye^{x^2}\Big|_0^x dx = \int\limits_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

1.1.3 Changement des variables dans les intégrales doubles

Définition 4 (Matrice jacobienne et le jacobien)**.** *Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ définie par*

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_{d-1}(x) \\ \varphi_d(x) \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_{d-1}, x_d)$$

On appelle matrice jacobienne de φ et on la note $\mathcal{J}_\varphi$ la matrice de taille d définie par

$$\mathcal{J}_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1 & \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{d-1}}\varphi_1 & \frac{\partial}{\partial x_d}\varphi_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_2 & \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{d-1}}\varphi_2 & \frac{\partial}{\partial x_d}\varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_{d-1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_{d-1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{d-1}}\varphi_{d-1} & \frac{\partial}{\partial x_d}\varphi_{d-1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_d & \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_d & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{d-1}}\varphi_d & \frac{\partial}{\partial x_d}\varphi_d \end{pmatrix}$$

On appelle le jacobien le déterminant de la matrice jacobienne et on le note

$$\left|\mathcal{J}_\varphi\right| = \left|\det \mathcal{J}_\varphi\right|.$$

Définition 5 (changement de variable)**.** *On dit que φ est un changement de variable entre le domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ et le domaine $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ si φ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{D}$ dans Δ.*

Proposition 2 (Existence du changement de variable)**.** *Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ alors φ est un changement de variable entre le domaine $\mathcal{D}$ et le domaine $\Delta = \varphi(\mathcal{D})$ si et seulement si $\left|\mathcal{J}_\varphi\right| \neq 0$ pour tout point $x \in \mathcal{D}$.*

Exemple 8 (Changement de variable en coordonnées polaires)**.** On considère les coordonnées polaires définies par

$$(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta))$$

le calcule de la matrice jaconbienne donne

$$\mathcal{J}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

et le jaconbien vaut

$$\left|\mathcal{J}_\varphi\right| = r.$$

Théorème 4. *Soit φ une bijection d'un domaine $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$ dans un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ pour chaque $(u, v) \in \Delta$ associée $\varphi(u, v) \in \mathcal{D}$. Alors*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy = \iint_{\Delta} f\left(\varphi(u, v)\right) \left|\mathcal{J}_\varphi(u, v)\right| dudv.$$

Exemple 9. Calcule du

$$\iint_{\mathcal{D}} (x-1)^2 dxdy, \quad \mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -1 \le x + y \le 1, \quad -2 \le x - y \le 2\right\}.$$

On pose $u = x + y \in [-1, 1]$ et $v = x - y \in [-2, 2]$, donc

$$x = \frac{u+v}{2} = \varphi_1(u, v), \quad y = \frac{u-v}{2} = \varphi_2(u, v), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$$

ce qui donne que $\left|\mathcal{J}_\varphi\right| = \frac{1}{2}$ donc on a un changement de variable, et donc

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} (x-1)^2 dxdy &= \frac{1}{2} \iint_{[-1,1]\times[-2,2]} \left(\frac{u+v}{2} - 1\right)^2 dudv = \frac{1}{8} \int_{-1}^{1} \left(\int_{-2}^{2} (u + v - 2)^2 \, dv \right) du \\ &= \frac{1}{24} \int_{-1}^{1} (u + v - 2)^3 \Big|_{-2}^{2} du = \frac{1}{24} \int_{-1}^{1} u^3 - (u-4)^3 du = \frac{1}{96} \left[u^4 - (u-4)^4 \Big|_{-1}^{1} \right] \\ &= \frac{3^4 + 5^4}{96} \end{aligned}$$

Exemple 10.

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{1}{x^2+y^2}dxdy, \quad \mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0\right\}.$$

on fait le changement en coordonnées polaires alors

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

$$\begin{cases} 1 \le x^2+y^2 \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 \le r^2 \le 4 \\ r\cos\theta \ge 0 \\ r\sin\theta \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ \cos\theta \ge 0 \\ \sin\theta \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \end{cases}$$

et donc

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{1}{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 \frac{1}{r}drd\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 \frac{1}{r}dr = \frac{\ln(2)}{2}\pi.$$

Remarque 4.

1. Si $\left|\mathcal{J}_\varphi\right| = 1$, on obtient que

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} f\left(\varphi(u,v)\right)dudv.$$

2. Cela permet d'utiliser les symétries, si par exemple

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D} : \quad (-x,y) \in \mathcal{D}, \quad f(-x,y) = f(x,y)$$

alors

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy = 2\iint\limits_{\mathcal{D}'} f\left(x,y\right)dxdy, \quad \mathcal{D}' = \mathcal{D} \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}).$$

$\triangle$

Exemple 11.

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy, \quad \mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 \le R^2\right\}.$$

si $x, y \in \mathcal{D}$ alors $-x, -y \in \mathcal{D}$ et la fonction $f(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ elle est paire en x et en y donc

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy = 4\iint\limits_{\mathcal{D}'} \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy,$$

avec

$$\mathcal{D}' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 \le R^2, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0\right\}.$$

on utilise le changement en coordonnées polaires alors

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}rdrd\theta = 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2-r^2}rdr \\ &= -\frac{2\pi}{3}\left.(R^2-r^2)^{3/2}\right|_0^R \\ &= \frac{2\pi}{3}R^3. \end{aligned}$$

1.1.4 Applications des intégrales doubles

1. **Calcule du l'air d'un domaine** Soit $\mathcal{D}$ un domaine fermé bornée, alors Il suffit de prendre $f(x, y) = 1$ ce qui donne que
$$\text{Air}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dxdy.$$
2. **Calcule de l'aire d'une surface** Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ on pose Σ une partie du graphe de f et par $\mathcal{D}$ la projection orthogolae de Σ sur (XOY)selon OZ alors
$$\text{Air}(\Sigma) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dxdy$$
Exemple 12.
$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq h, \quad h > 0\right\}$$
$$\text{Air}(\Sigma) = \iint_{x^2+y^2\leq h} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{h}} r\sqrt{4r^2 + 1}\, drd\theta = \frac{(4h + 1)^{3/2} - 1}{6}\pi.$$
3. **Calcule de la masse** Soit $\mathcal{D}$ un domaine de densité surfacique $\rho(x, y)$ alors la masse situer dans $\mathcal{D}$ est donnée par
$$M = \iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y)dxdy$$
4. **Calcule du centre d'inertie**
$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} x\rho(x, y)dxdy \\ y_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} y\rho(x, y)dxdy \end{cases}$$
5. **Calcule du moment d'inertie** Le moment d'inertie d'une masse ponctuelle m par rapport à un axe est définie par mr^2 tel que r est la distance de cette masse par rapport à cet axe, ainsi pour une plaque fine de densité surfacique $\rho(x, y)$ pour un élément élémentaire $dxdy$ elle prend comme masse $\rho(x, y)dxdy$ et donc son moment d'inertie par rapport aux axes (OX) et (OY) et l'origine O est donnée par
$$y^2\rho(x, y)dxdy, \quad x^2\rho(x, y)dxdy, \quad (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy$$
ce qui donne que le moment d'inertie par rapport aux axes (OX) et (OY) et l'origine O de la plaque précédemment mentionnée est donné par
$$I_x = \iint_{\mathcal{D}} y^2\rho(x, y)dxdy, \quad I_y = \iint_{\mathcal{D}} x^2\rho(x, y)dxdy, \quad I_O = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy$$

1.2 Intégrale Triple

Définition 6 (Domaine élémentaire de $\mathbb{R}^3$). *On dit que $\mathcal{E}$ est un domaine élémentaire de $\mathbb{R}^3$ si il est de l'un des deux forme suivante*

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2/\,(x,y)\in\Delta_1,\ f_1(x,y)\le z\le f_2(x,y)\right\},\quad \Delta_1\subset\mathbb{R}^2\textit{réguliers},\quad f_1,f_2\in\mathscr{C}^0(\Delta_1;\mathbb{R})$$

ou

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2/\,(x,z)\in\Delta_2,\ g_1(x,z)\le y\le g_2(x,z)\right\},\quad \Delta_2\subset\mathbb{R}^2\textit{réguliers},\quad g_1,g_2\in\mathscr{C}^0(\Delta_2;\mathbb{R})$$

ou

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2/\,(y,z)\in\Delta_1,\ h_1(y,z)\le x\le h_2(y,z)\right\},\quad \Delta_3\subset\mathbb{R}^2\textit{réguliers},\quad h_1,h_2\in\mathscr{C}^0(\Delta_3;\mathbb{R})$$

Définition 7 (Domaine régulier dans $\mathbb{R}^3$). *Soit $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^3$ on dit qu'il est régulier si il est l'union fini des domaines élémentaires $\mathcal{E}_i$.*

Soit $\mathcal{D}$ un domaine régulier borné, soit $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ le plus petit parrallipipéde orthogonale qui contient $\mathcal{D}$, on décompose $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ en n^3 parralipipéde orthogonale similaire de la forme

$$\begin{aligned}\forall i,j,k=1,\cdots n,\quad M_{ijk}=&\left[a+(b-a)\frac{i-1}{n},a+(b-a)\frac{i}{n}\right]\\&\times\left[c+(d-c)\frac{j-1}{n},c+(d-c)\frac{j}{n}\right]\\&\times\left[e+(f-e)\frac{k-1}{n},e+(f-e)\frac{k}{n}\right]\end{aligned}$$

et on note par c_{ijk} le centre de chaque cube M_{ijk}, soit le domaine suivante

$$\mathcal{D}'=\cup\left\{M_{ijk}\quad: i,j,k=1,\cdots n,\quad M_{ijk}\subset\mathcal{D}\right\}$$

On considère f une fonction de densité définie sur $\mathcal{D}$ et continue, alors la densité de chaque parralipipéde M_{ijk} est approché par

$$\frac{(b-a)(c-d)(f-e)}{n^3}f(c_{ijk})$$

globale de $\mathcal{D}$ est approchée par la valeur

$$\mathcal{S}_n=\frac{(b-a)(c-d)(f-e)}{n^3}\sum_{c_{ijk}\in\mathcal{D}'}f(c_{ijk})$$

ainsi lorsque n tend ver $+\infty$ la valeur $\underset{n\longrightarrow+\infty}{\operatorname{Lim}}\mathcal{S}_n$ coincide avec la densité du domaine $\mathcal{D}$

Définition 8 (Définition de l'intégrale triple). *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^3$ on dit que f est intégrable sur $\mathcal{D}$ au sens de Riemann si la somme $\mathcal{S}_n$ converge quand n tend ver l'infinie et on note cette limite par*

$$\iiint_{\mathcal{D}}f(x,y,z)dxdydz=\underset{n\longrightarrow+\infty}{\operatorname{Lim}}\mathcal{S}_n.$$

Théorème 5 (l'intégrale triple d'une fonction continue). *Soit $\mathcal{D}$ un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^3$ et f une fonction continue sur $\mathcal{D}$, alors f est intégrable au sens de Riemann sur le domaine $\mathcal{D}$, autrement dit $\iiint_{\mathcal{D}}f(x,y,z)dxdyz$ existe et fini.*

Théorème 6 (Théorème de Fubini dans le cas d'un domaine bornée $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$)**.** *Soit f une fonction continue sur un rectangle $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ alors*

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x, yz)dxdydz = \int_a^b \left[\int_c^d \int_e^f f(x, y, z)dzdy \right] dx$$
$$= \int_c^d \int_e^f \left[\int_a^b f(x, y, z)ds \right] dydz$$

1.2.1 Calcule d'une intégrale triple

1.2.1.1 Calcul directe

Soit f une fonction continue sur un domaine borné $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$. Pour certain x fixé variant entre x_{min} et x_{max} on découpe dans $\mathcal{D}$ une surface $\mathcal{D}_x$, alors on peut représenter $\mathcal{D}_x$ dans le plan YOZ puis le traitement sur $\mathcal{D}_x$ ce fait de la même manière que dans le cas des intégrale double.

En particulier si le domaine $\mathcal{D}$ est représenté sous la forme

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad f_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y), \quad f_1(x) \leq y \leq f_2(x), \quad a \leq x \leq b\right\},$$

alors

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dy \right] dx.$$

bien sur on peut convertir le role de x, y, z

Exemple 13. On veut calculer l'intégrale suivante

$$\iiint_{\mathcal{D}} (x + y + 1)dxdydz$$

sur le domaine

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 1 \leq x - y \leq 4, \quad 0 \leq x + y + z \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\right\}$$

la contrainte qui définie le domaine $\mathcal{D}$ donne

$$\begin{cases} 1 \leq x - y \leq 4 \\ 0 \leq x + y + z \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 + y \leq x \leq 4 + y \\ -x - y \leq z \leq 1 - x - y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\iiint_{\mathcal{D}} (x+y+1)dxdydz = \int_0^1 \int_{1+y}^{4+y} \int_{-x-y}^{1-x-y} (x+y+1)dzdxdy$$
$$= \int_0^1 \int_{1+y}^{4+y} (x+y+1)z\Big|_{-x-y}^{1-x-y} dxdy$$
$$= \int_0^1 \int_{1+y}^{4+y} x+y+1dxdy$$
$$= \int_0^1 x^2+(y+1)x\Big|_{1+y}^{4+y} dy$$
$$= \int_0^1 18+9ydy = 18y+\frac{9}{2}y^2\Big|_0^1$$
$$= \frac{45}{2}.$$

Exemple 14. On veut calculer l'intégrale suivante

$$\iiint_{\mathcal{D}} xdxdydz$$

sur le domaine

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 1 \le x+y \le 4, \quad 1 \le y+z \le 2, \quad 1 \le x+z \le 3\right\}$$

la contrainte qui définie le domaine $\mathcal{D}$ donne

$$\begin{cases} 1 \le x+y \le 4 \\ 1 \le y+z \le 2 \\ 1 \le x+z \le 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 \le x+y \le 4 \\ -2 \le -y-z \le -1 \\ 1 \le x+z \le 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 1-x \le y \le 4-x \\ 1-x \le z \le 3-x \end{cases}$$

alors on a

$$\iiint_{\mathcal{D}} xdxdydz = \int_0^1 \int_{1-x}^{3-x} \int_{1-x}^{4-x} xdydzdx$$
$$= \int_0^1 x\left(\int_{1-x}^{3-x} dz\right)\left(\int_{1-x}^{4-x} dy\right) dx = 3$$

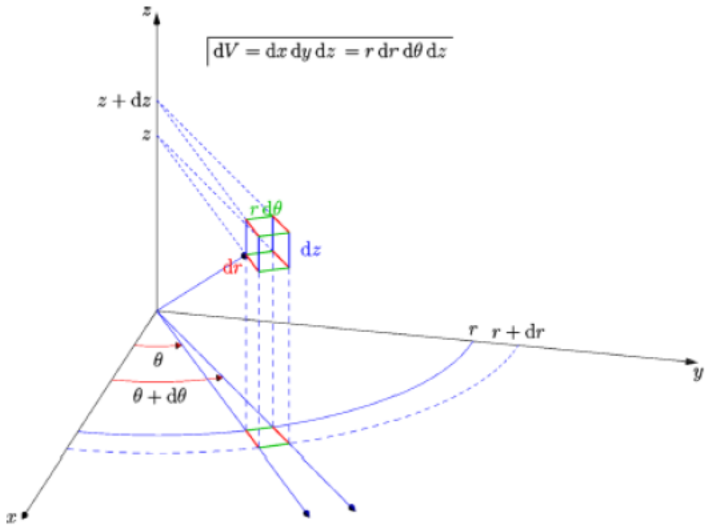
1.2.1.2 Calcule par un changement de variable

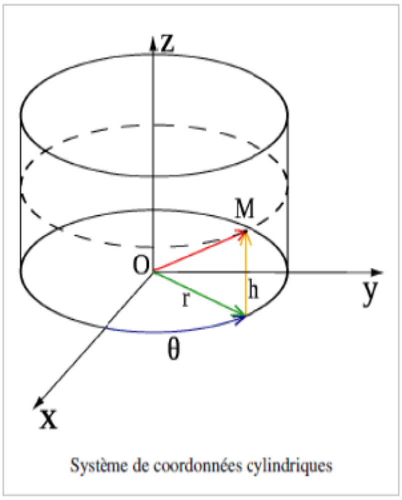
Dans cette partie on va donner la méthode pour calculer les intégrale triples on utilisant le changement des variables

Théorème 7. *Soit φ une bijection d'un domaine $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^1$ dans un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ pour chaque $(u,v,w) \in \Delta$ associée $\varphi(u,v,w) \in \mathcal{D}$. Alors*

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Delta} f\left(\varphi(u,v,w)\right)\left|\mathcal{J}_{\varphi}(u,v,w)\right| dudvdw.$$

Exemple 15 (Coordonnées cylindrique)**.**





Système de coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindrique sont définie par

$$(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z),$$

le jacobien associée est donnée par

$$\left|\mathcal{J}_\varphi\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r dr d\theta dz$$

Par exemple si on veut calculer l'intégrale suivante

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} z dx dy dz, \quad \mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0\right\}$$

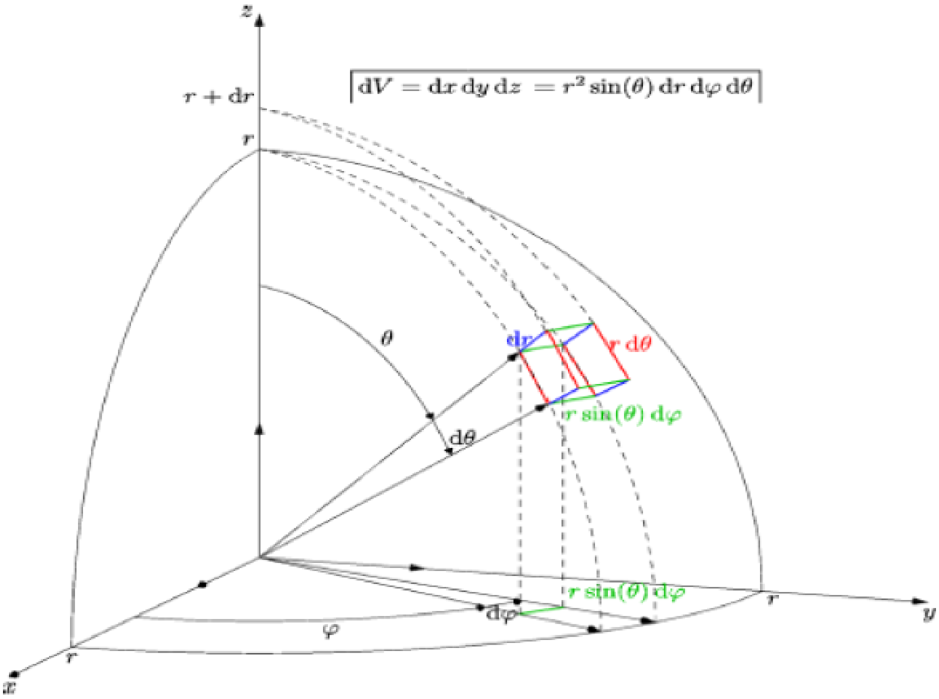
La contrainte qui définie le domaine $\mathcal{D}$ donne

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0 &\Longrightarrow 0 \leq z \leq r \leq 1, \quad \sin\theta \geq 0 \\ &\Longrightarrow 0 \leq z \leq r, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

ainsi on a

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} z dx dy dz = \int_0^\pi \int_0^1 \int_0^r z r dz dr d\theta = \left(\int_0^\pi d\theta\right)\left(\int_0^1 r \int_0^r z dz dr\right) = \pi\left(\int_0^1 \frac{r^3}{2} dr\right) = \frac{\pi}{8}$$

Exemple 16 (Coordonnées sphérique)**.**



Les coordonnées cylindrique sont définie par

$$(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

le jacobien associée est donnée par

$$\left|\mathcal{J}_\varphi\right| = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

par exemple si on veut calculer l'intégrale suivante

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2 + 1) dxdydz, \quad \mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0\right\}$$

la contrainte qui définie le domaine $\mathcal{D}$ donne

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0 \Longrightarrow 1 \leq r \leq 2, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi/2]$$

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2 + 1) dxdydz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 (r^2 + 1) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta\right) \left(\int_1^2 (r^2 + 1) r^2 dr\right) \\ &= \frac{28}{5}\pi. \end{aligned}$$

1.2.2 Applications des intégrales triples

1. **Calcule du volume** Soit $\mathcal{D}$ un domaine fermé bornée, alors Il suffit de prendre $f(x, y, z) = 1$ ce qui donne que
$$\text{Volume}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} dxdydz.$$
2. **Calcule de la masse** Soit $\mathcal{D}$ un domaine de densité volumique $\rho(x, y), z$ alors la masse situer dans $\mathcal{D}$ est donnée par
$$M = \iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y, z)dxdyz$$
3. **Calcule du centre d'inertie**
$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M} \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} x\rho(x, y, z)dxdydz \\ y_G = \dfrac{1}{M} \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} y\rho(x, y, z)dxdydz \\ z_G = \dfrac{1}{M} \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} z\rho(x, y, z)dxdydz \end{cases}$$
4. **Calcule du moment d'inertie** Le moment d'inertie d'une masse ponctuelle m par rapport à un axe est définie par mr^2 tel que r est la distance de cette masse par rapport à cet axe, ainsi pour un objet de densité volumique $\rho(x, y, z)$ pour un élément élémentaire $dxdydz$ elle prend comme masse $\rho(x, y, z)dxdydz$ et donc son moment d'inertie par rapport aux axes (OX), (OY) et (OZ) est donnée par
$$(y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz, \quad (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz, \quad (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz$$
ce qui donne que le moment d'inertie par rapport aux axes (OX) et (OY) et l'origine O de la plaque précédemment mentionnée est donné par
$$I_x = \iiint_{\mathcal{D}} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz,$$
$$I_y = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz,$$
$$I_z = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz.$$