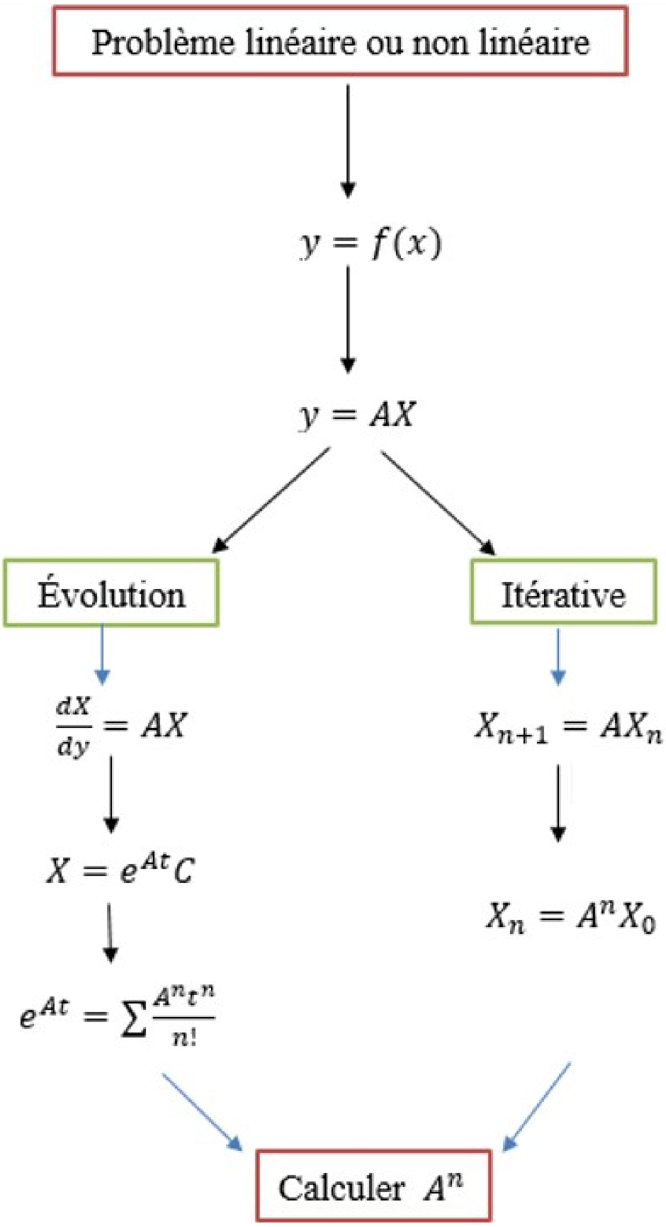
Table des matières

Introduction

L'algèbre linéaire permet de résoudre tout un ensemble d'équations linéaires ou non linéaires (qui peuvent être linéarisés) utilisées non seulement en mathématiques ou en mécanique, mais aussi dans de nombreuses autres branches, comme les sciences naturelles ou les sciences sociales (par exemple en économie).
Les systèmes sont présentés par le schéma suivant :



Chapitre 1

Réduction des endomorphismes

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Les endomorphismes sont des applications linéaires de E dans E .

Soit f un endomorphisme de E. , on peut toujours présenter f par une matrice carrée dite matrice associée, sa détermination fait intervenir une base de E. Le but de ce chapitre est de trouver une base telle que cette matrice soit la plus "simple"' possible (pleine de zéros). Les matrices les plus adaptées aux calcul sont les matrices diagonales ou triangulaires supérieures.

1.1 Rappel

1.1.1 Matrices associées

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et f un endomorphisme de E.

On pose

$$f(e_j) = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \cdots + a_{nj}e_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_j$$

Les coordonnées a_{ij} de ces vecteurs dans la base B, rangés en n colonnes, forment la matrice de l'application f, relative à la base considérée

$$M = \begin{array}{cc} f(e_1)\ f(e_2) \cdots f(e_n) & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array}$$

Exemple 1 *Soit l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = (x + 2y + z, x - y, y + z)$$

et soit B la base de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On veut déterminer la matrice associée à f dans la base B, alors on a

$$f(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

Alors

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 - e_3$$

De la même manière on obtient que

$$f(e_2) = e_1 + e_2 \text{ et } f(e_3) = 3e_2 - e_3$$

Donc

$$\mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Matrice de passage

Maintenant si on considère une autre base $\{e'_i\}$ du même espace, on peut définir une autre matrice associée au même endomorphisme par rapport à cette nouvelle, les deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes sont liées entre eux par la relation

$$\mathcal{M}_{\{e'_i\}}(f) = P^{-1}\mathcal{M}_{\{e_i\}}(f)P$$

tel que P est une matrice carrée inversible appelée matrice de passage de la base $\{e_i\}$ à la base $\{e'_i\}$.
Technique : dans $\mathbb{R}^3$
On décompose les vecteurs e'_i sur les éléments de la base $\{e_i\}$ pour avoir l'expression

$$\begin{cases} e'_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 e_3 \\ e'_2 = \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 + \gamma_2 e_3 \\ e'_3 = \alpha_3 e_1 + \beta_3 e_2 + \gamma_3 e_3 \end{cases}$$

Alors

$$P_{e_i \longrightarrow e'_i} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$f(x) = (x - z, 2x - 3y + z, y - 2z)$$

Soient

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$B' = \left\{ e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

on a

$$\mathcal{M}_B(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} e'_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 e_3 \\ e'_2 = \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 + \gamma_2 e_3 \\ e'_3 = \alpha_3 e_1 + \beta_3 e_2 + \gamma_3 e_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \\ \beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1 \\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1 \end{cases}$$

par suite, on a

$$P_{B \longrightarrow B'} = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathcal{M}_{B'}(f) = P^{-1}\mathcal{M}_B(f)P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque 1 *Si on a deux matrices A et B vérifiant pour certaine matrice inverse P la relation $B = P^{-1}AP$, cela est équivaut à dire que les deux matrices représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes et on dit qu'elle sont semblables.*

1.1.3 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 1 *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. λ est une valeur propre de f s'il existe (au moins) un vecteur $v \neq 0$ de E tel que*

$$f(v) = \lambda v$$

Un tel vecteur est appelé vecteur propre associé à λ.

Remarque 2 — *Les valeurs propres peuvent être nulles.*

— *les vecteurs propres sont non nuls.*

— *Si v est vecteur propre de f, alors par linéarité de f, αv est aussi vecteur propre de f pour tout $\alpha \neq 0$.*

Détermination des valeurs propres

Définition 2 *(polynôme caractéristique) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E de dimension finie. On appel polynôme caractéristique de f le polynôme*

$$P_f(\lambda) = \det(f - \lambda Id) = \det(A - \lambda I)$$

tel que A est la matrice associée à f dans n'importe quelle base de E.

Remarque 3 *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique mais la réciproque est fausse.*

Proposition 1 *Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique $P_f(\lambda)$.*

Définition 3 *L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé le spectre de f et il est noté par $Sp(f)$.*

Définition 4 *(multiplicité) On dit qu'une valeur propre λ_0 de f est de multiplicité α si elle est racine d'ordre α du polynôme caractéristique de f, c'est-à-dire :*

$$P_f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{\alpha} Q(\lambda),\ Q(\lambda_0) \neq 0$$

et on la note par

$$\alpha = mult(\lambda_0)$$

Détermination des vecteurs propres

Une fois les valeurs propres sont déterminées, on détermine l'espace des vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs en résolvant le système linéaire

$$(A - \lambda I)(v) = 0$$

où A est la matrice de f dans une certaine base.
Exemple 3 *Soit la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Cherchons les vecteurs propres de B. Pour cela on doit d'abord calculer les valeurs propres de f.

Valeurs propres :

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Les valeurs propres de B sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0,\ mult(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = 1,\ mult(\lambda_2) = 1 \\ \lambda_3 = 2,\ mult(\lambda_3) = 1 \end{cases}$$

Vecteurs propres :
On va résoudre le système $(B-\lambda I)v=0$ *et* $v=(x_1\ x_2\ x_3)^t$.
Pour $\lambda_1=0$ *:*

$$(B-\lambda_1 I)\,v=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x_1+4x_3=0\\ 3x_1-4x_2+12x_3=0\\ x_1-2x_2+5x_3=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=-2x_3\\ x_2=\frac{3}{2}x_3\\ x_3 \textit{ quelconque}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\ v=x_3\begin{pmatrix}-2\\ \frac{3}{2}\\ 1\end{pmatrix}\right.$$

On peut prendre $x_3=1$, *et on obtient le vecteur propre*

$$v_1=\begin{pmatrix}-2\\ \frac{3}{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2=1$ *:*

$$(B-\lambda_2 I)\,v=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1+4x_3=0\\ 3x_1-5x_2+12x_3=0\\ x_1-2x_2+4x_3=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=-4x_3\\ x_2=0\\ x_3 \textit{ quelconque}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\ v=x_3\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right.$$

On peut prendre $x_3=1$, *et on obtient le vecteur propre*

$$v_2=\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_3=2$ *:*

$$(B-\lambda_3 I)\,v=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x_3=0\\ 3x_1-6x_2+12x_3=0\\ x_1-2x_2+3x_3=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x_3=0\\ x_1=2x_2\\ x_2 \textit{ quelconque}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\ v=x_2\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right.$$

On peut prendre $x_2=1$, *et on obtient le vecteur propre*

$$v_3=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

1.2 Diagonalisation d'une matrice

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1.2.1 Définitions et exemple

Définition 5 *On dit que* f *est diagonalisable, s'il existe une base* $\{e'_i\}$ *de* E *(resp. une matrice inversible* P*) telle que* $\mathcal{M}_{\{e'_i\}}$ *(resp.* $P^{-1}AP$*) est diagonale.*

Théorème 1 *Soit* f *un endomorphisme de* E. *Alors* f *est diagonalisable s'il existe une base de* E *formée par les vecteurs propres de* f.

Remarque 4 *Si* f *est diagonalisable, les termes qui apparaissent sur la diagonale de la matrice associée à* f *dans une base de vecteurs propres sont les valeurs propres.*

Définition 6 *(polynôme scindé) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, on dit qu'il est scindé dans $\mathbb{K}$ s'il est de degré n et admet n racines dans $\mathbb{K}$.*

Exemple 4
- *Le polynôme $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ est scindé dans $\mathbb{C}$ mais non pas dans $\mathbb{R}$.*
- *Le polynôme x^2 est scindé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.*

Remarque 5 *Un polynôme est scindé s'il peut s'écrire sous la forme*

$$P(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - x_k)^{\alpha_k}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = \text{degré de } P$$

où x_k sont les racines de P et α_k la multiplicité de x_k.

Théorème 2 *(Caractérisation) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, alors f est diagonalisable si et seulement si*

1. *P_f est scindé dans $\mathbb{K}$.*
2. *Pour toute valeur propre λ de f on a*

$$\dim E_\lambda = \text{ mult } (\alpha)$$

Corollaire 1 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, si f admet n valeurs propres distinctes (de multiplicité une) alors f est diagonalisable.*

Matrice réduite et matrice de passage :

Pour déterminer la matrice de passage et la matrice réduite d'un endomorphisme on suit les étapes suivantes :

1. On détermine les valeurs propres de f et on les notes λ_i et les vecteurs propres qu'on les notes v_i. Si

$$\forall \lambda \in \text{ Sp } (f) : \dim E_\lambda = \text{ mult } (\lambda)$$

alors f est diagonalisable.

2. La matrice associée à f dans la base $\{v_i\}$ est diagonale de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

3. La matrice de passage correspondantes est

$$P = (v_1 \, | v_2 | \cdots | v_n \,)$$

de telle sorte que l'ordre des valeurs propres dans A' correspond à l'ordre de leurs vecteurs propres dans la matrice P.

Exemple 5 *Si on prend l'exemple 3, on a trouvé les valeurs et les vecteurs propres suivants :*

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 1 \longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 = 2 \longrightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

alors la matrice réduite et la matrice de passage sont

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Applications de la diagonalisation

Puissance d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est diagonalisable, il existe deux matrices, A' diagonale et P inversible tel que $A' = P^{-1}AP$. On a

$$A^k = \underbrace{\left(PA'P^{-1}\right) \times \left(PA'P^{-1}\right) \times \cdots \times \left(PA'P^{-1}\right)}_{k \textbf{ fois}}$$

De plus, on a $PP^{-1} = I$, alors on obtient

$$A^k = P\left(A'\right)^k P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Donc A^k se calcule par la formule suivante :

$$A^k = PA'^kP^{-1}$$

Systèmes de suites récurrentes

On suppose qu'on a un système de suites récurrentes dans lequel on cherche à déterminer le terme générale en fonction des premiers termes de chaque suite. Soit

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n, v_n) = a_{11}u_n + a_{12}v_n \\ v_{n+1} = g(u_n, v_n) = a_{21}u_n + a_{22}v_n \end{cases}$$

avec u_0 et v_0 donnés.
On pose
$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$
Le système précédent s'écrit $X_{n+1} = AX_n$, avec
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
d'où par récurrence
$$X_n = A^n X_0$$
on est donc ramené au calcul de A^n puis de X_n en fonction de n.
Dans le cas où la matrice est diagonalisable, alors
$$A^n = P{A'}^n P^{-1}$$

Systèmes d'équations différentielles

On cherche à résoudre le système d'équations différentielles suivant :
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \dfrac{d}{dt}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{1.2.1}$$
avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ et $x_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables.
Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :
$\dfrac{d}{dt}X = AX$, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $X = (x_1\ x_2 \cdots x_n)^t$.

Pour résoudre ce système, on passe par les étapes suivantes :

1. On réduit la matrice A sous la forme diagonale et on détermine la matrice de passage P.
2. On résout le système
$$\frac{d}{dt}Y = A'Y$$
3. La solution du système 1.2.1 est
$$X = PY$$

Exemple 6 *Soit le système d'équations différentielles suivant :*
$$\begin{cases} x' = 5x - y + 9z \\ y' = 3x + 4y \\ z' = x + y + z \end{cases} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\dfrac{dX}{dt}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}$$
Après calcul on trouve
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On résout maintenant le système

$$\frac{dY}{dt} = A'Y \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = 7y_3 \end{cases}$$

avec

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^t \\ y_2 = C_2 e^{2t} \\ y_3 = C_3 e^{7t} \end{cases}$$

avec $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
La solution de notre système est

$$X = PY \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} 9C_1e^t - 2C_2e^{2t} + 3C_3e^{7t} \\ -9C_1e^t + 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{7t} \\ 5C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{7t} \end{pmatrix}$$

1.3 Trigonalisation d'une matrice

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1.3.1 Définitions et exemple

Définition 7 *On dit que f est triangularisable (ou trigonalisable) s'il existe une base $\{e_i'\}$ de E (resp. une matrice inversible P) telle que $\mathcal{M}_{\{e_i'\}}(f)$ (resp. $P^{-1}AP$) soit triangulaire supérieure.*

Théorème 3 *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou un endomorphisme f est triangularisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.*

Remarque 6
- *Si la matrice A est triangularisable, les éléments diagonaux de la matrice réduite triangulaire supérieure sont les valeurs propres de A.*
- *La forme réduite triangulaire n'est pas unique.*

Technique :
Soit A une matrice carrée, pour déterminer la matrice réduite triangulaire et la matrice de passage correspondante on a les étapes suivantes :

1. On détermine les valeurs propres et les vecteurs propres. Si

$$\exists \lambda \in \text{ Sp } (A), \dim \mathbb{E}_\lambda \neq \text{mult}(\lambda)$$

   alors la matrice n'est pas diagonalisable mais trigonalisable.
2. Dans ce cas, cette matrice dans une base $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ s'écrit sous la forme

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

3. On résout le système suivant :

$$\begin{aligned}
&Av_1 = \lambda_1 v_1\\
&Av_2 = a_{12} v_1 + \lambda_2 v_2\\
&\vdots\\
&Av_n = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + \lambda_n v_n
\end{aligned}$$

   dont les inconnus sont v_k et les paramètres a_{ij}, avec la contrainte

$$\det\left(v_1 \,|v_2|\cdots|v_n\right) \neq 0$$

4. Une fois les coefficients a_{ij} et les vecteurs v_k sont déterminés, la matrice réduite triangulaire et la matrice de passage sont données par

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } P = \left(v_1 \,|v_2|\cdots|v_n\right)$$

Exemple 7 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculons les valeurs et les vecteurs propres de A.

Valeurs propres :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$$

$P_A(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{R}$.
$\lambda_1 = 1$ de multiplicité 2.
$\lambda_2 = -1$ de multiplicité 1.
Vecteurs propres

Pour $\lambda_1 = 1$

$$(A - \lambda_1 I)\, v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

On obtient

$$v_1 = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec x_3 quelconque, on prend alors $x_3 = 1$, donc

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = vect\left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Longrightarrow \ dim\ E_1 \neq \ mult\ (1) = 2$$

Donc la matrice A est trigonalisable.

<u>*Pour $\lambda_2 = -1$*</u>

$$(A - \lambda_1 I)\, v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_3 = 2x_1 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

On obtient

$$v_2 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

avec x_1 quelconque, on prend alors $x_1 = 1$, ce qui donne

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = vect\left\langle v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \Longrightarrow dim\ E_{-1} = \ mult\ (-1) = 1$$

Forme réduite et matrice de passage :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les composantes des colonnes de A' sont les composantes des images des vecteurs Ae_i dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, c'est-à-dire :

$$Ae_1 = e_1 \quad (1.3.1)$$
$$Ae_2 = ae_1 + e_2 \quad (1.3.2)$$
$$Ae_3 = be_1 + ce_2 - e_3 \quad (1.3.3)$$

la relation 1.3.1 affirme que le vecteur propre de A qui correspond à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, alors on prend

$$e_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans la relation 1.3.2, on ne peut pas prendre $a = 0$ sinon le vecteur e_2 sera un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = 1$, ce qui est absurde car cette valeur possède qu'un seul vecteur propre. Alors on prend $a = 1$ et on obtient

$$(A - I)\,e_2 = v_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

On peut prendre alors

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans la relation 1.3.3 , on peut prendre e_3 le vecteur propre de A qui correspond à la valeur propre $\lambda_2 = -1$, ce qui donne

$$e_3 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Finalement la matrice réduite et la matrice de passage sont

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = (e_1\,|e_2|\,e_3\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3.2 Décomposition de Dunford

Définition 8 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E . On dit que f est nilpotente si et seulement si*

$$\exists p \in \mathbb{N} : f^p \equiv 0$$

Une matrice carrée A est dite nilpotente si et seulement si

$$\exists p \in \mathbb{N} : A^p = 0$$

Si A est de taille n, alors $A^n = 0$.

Théorème 4 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors f se décompose d'une manière unique sous la forme*

$$f \equiv D + N$$

avec D un endomorphisme diagonalisable et N un endomorphisme nilpotent, tel que

$$D \circ N = N \circ D$$

Proposition 2 *Soit A une matrice carrée dont le polynôme caractéristique est scindé.*

1. *Si A admet une seule valeur propre λ_0, la décomposition de Dunford est de la forme*

$$A = D + N,\ \ N = A - D,\ \ D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

2. *Si A admet au moins deux valeurs propres distinctes, alors la décomposition de Dunford se fait selon les étapes suivantes :*
   — *On détermine la matrice réduite A' et la matrice de passage P.*
   — *On décompose la matrice A' sous la forme*
   $$A' = D' + N'$$
   tels que D' une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A et $N' = A' - D'$ matrice nilpotente.
   — *Alors la décomposition de Dunford de la matrice A vaut*
   $$A = \underbrace{PD'P^{-1}}_{D} + \underbrace{PN'P^{-1}}_{N}$$

Exemple 8 *Si on prend l'exemple 7, on a la matrice A est trigonalisable et sa forme réduite est*
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N'}$$
Alors
$$A = PA'P^{-1} = \underbrace{P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}}_{D} + \underbrace{P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}}_{N}$$
avec D diagonalisable et $N = D - A$ nilpotente.

1.3.3 Puissance d'une matrice

Définition 9 *(formule de binôme de Newton) Soit A et B deux matrices qui commutent (c'est-à-dire $AB = BA$) alors*
$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^{p-k} B^k$$

Proposition 3 *Soit A une matrice carrée dont le polynôme caractéristique est scindé. On a*
$$A = D + N$$
donc
$$\begin{aligned} A^k = (D+N)^k &= P\left(D' + N'\right)^k p^{-1} \\ &= p\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k D'^{n-k} N'^k\right) P^{-1} \\ &= p\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k D'^{n-k} N'^k\right) P^{-1} (\text{ car } N'^n = 0) \end{aligned}$$

1.3.4 Résolution des équations différentielles

Exponentiel d'une matrice

Définition 10 *On définit l'exponentiel d'une matrice carrée A par la formule*

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Remarque 7 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

1. *Si A et B sont deux matrices qui commutent alors $e^{A+B} = e^A e^B$*
2. *Si A est nilpotente alors*
$$e^A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!}$$
3. *Si A est diagonale alors*
$$e^A = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn}} \end{pmatrix}$$
4. *Si A et A' sont semblables alors*
$$e^A = P e^{A'} P^{-1}$$

Proposition 4 *La résolution du système*

$$\frac{d}{dt} X = Ax$$

se fait par la méthode suivante :

1. *On détermine la matrice réduite et la matrice de passage de A, et on décompose A sous la forme*
$$A = D + N$$
2. *La solution X vaut*
$$\begin{aligned} X = e^{At} C &= e^{D\mathrm{t}} e^{N\mathrm{t}} C \\ &= P e^{D't} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{N'^k}{k!} t^k \right) p^{-1} C \\ &= P e^{D't} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{N'^k}{k!} t^k \right) C_1 \end{aligned}$$
avec $C_1 \in \mathbb{R}^n$.

Équations différentielles ordinaires

On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

ce qui nous donne le système

$$\begin{cases} y'' = -2y' - y \\ y' = y' \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y'' \\ y' \end{pmatrix}}_{\frac{dX}{dt}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix}}_{X}$$

Donc y est la dernière composante du vecteur X.
On sait que la solution du système

$$\frac{d}{dt}X = AX$$

est

$$X = e^{At}C$$

pour cela on va déterminer la matrice réduite et la matrice de passage de A.
Valeurs et vecteurs propres :

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)^2$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
Les vecteurs propres sont :

$$E_1 = \text{ vect } \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \ \dim E_1 = 1 \neq \text{ mult } (1) = 2$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc A est trigonalisable et on a

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N'}$$

par suite

$$\begin{aligned} X = e^{At} &= e^{(D+N)t} \\ &= Pe^{D't}\left(\sum_{k=0}^{1} \frac{N'^k}{k!}t^k\right)P^{-1}C \\ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}&\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\left[I + \begin{pmatrix} /0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]P^{-1}C \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (c_1 + (t-1)c_2)\, e^{-t} \\ -\,(c_1 + c_2 t)\, e^{-t} \end{pmatrix}$$

Au final,

$$y = -\,(c_1 + c_2 t)\, e^{-t}$$

Remarque 8 *Lorsqu'on a une seule valeur propre , on a pas besoin de calculer la matrice P car, on a*

$$A = PA'P^{-1}$$
$$= P \left[\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \right] P^{-1}$$
$$= P \left[I\lambda + N' \right] P^{-1}$$

Donc

$$A = [\lambda I + N]$$

avec

$$N = A - \lambda I$$

1.4 Réduction de Jordan

Polynôme annulateur et minimale

Définition 11 ***(Polynôme annulateur)*** *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E et P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, on dit qu'il est annulateur de f si*

$$P(f) \equiv 0$$

avec

$$P(f) = \sum_{k=1}^{m} a_k f^k, \quad \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}} = f^k, \quad f^0 = Id$$

Dans le cas d'une matrice carrée A on a

$$P(A) = 0$$

avec

$$P(A) = \sum_{k=1}^{m} a_k A^k, \quad A^0 = I$$

Proposition 5 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E et P un polynôme annulateur de f. Alors les valeurs propres de f figurent parmi les racines de P. (la réciproque est fausse).*

Théorème 5 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie. Alors f est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme scindé qui admet des racines simples et qui annule f.*

Théorème 6 *(Cayley-Hamilton) Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie net P_f son polynôme caractéristique.On a*

$$P_f(f) = 0$$

Définition 12 ***(Polynôme minimal)*** *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. On appel un polynôme minimal de f et on le note m_f, le polynôme annulateur de f qui est*

1. *Normalisé dans le sens où le coefficient du monôme du plus haut degré de ce polynôme vaut 1.*
2. *C'est le polynôme de degré le plus petit parmi tous les polynômes annulateurs de f.*

Théorème 7 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie. Alors f est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé dans $\mathbb{K}$ et n'admet que des racines simples.*

Remarque 9 — *Le polynôme minimal d'un endomorphisme f est unique.*
— *Les racines du polynôme minimal m_f sont exactement les racines du polynôme caractéristique mais avec des multiplicités généralement différentes.*

Exemple 9 *Soit l'endomorphisme f dans $\mathbb{R}^3$ définit par*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y+z \\ x-y+z \\ x+y-z \end{pmatrix}$$

Après calcul on trouve

$$P_f(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

d'après la remarque 9 on conclut qu'il y a deux possibilités pour le polynôme minimal

$$m_f(\lambda) = \begin{cases} Q_1(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2)^2 \\ \text{ou} \\ Q_2(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2) \end{cases}$$

On va tester ces deux polynômes en calculant $Q_i(f)$ en commençant par celui du plus petit degré. Pour faciliter les calculs on va calculer $Q_i(A)$ avec A la matrice associée à f dans n'importe qu'elle base. Dans notre cas, on prend la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$Q_2(A) = (A-I)(A+2I) = 0$$

Alors

$$m_f(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2)$$

qui est le polynôme minimal de f.

Définition 13 *On appelle un bloc de Jordan associé à la valeur propre λ d'ordre n la matrice carrée de taille n de la forme*

$$\mathcal{J}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Théorème 8 ***(Le cas d'une seule valeur propre)*** *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie n tels que*

1. *Le polynôme caractéristique de f est scindé et admet une seule valeur propre λ*

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda)^n$$

2. *Le polynôme minimal de f est de la forme*

$$m_f(X) = (X - \lambda)^\beta$$

3. $$\dim E_\lambda = \gamma$$

Dans ce cas il existe une base B de E tel que la matrice associée à f est de la forme

$$\tilde{\mathcal{J}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1(\lambda) & & 0 \\ & \mathcal{J}_2(\lambda) & \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_\gamma(\lambda) \end{pmatrix}$$

où

- *$\mathcal{J}_k(\lambda)$ sont les blocs de Jordan.*
- *L'ordre du plus grand bloc est β (la taille du bloc).*
- *Le nombre de bloc est γ.*

Théorème 9 ***(Le cas de plusieurs valeurs propres)*** *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie n tel que son polynôme caractéristique est scindé et f admet p valeurs propres distinctes λ_k.*

$$P_f(\lambda) = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (x - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

Alors il existe une base B de E tel que la matrice associée à f est de la forme

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{J}}_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \tilde{\mathcal{J}}_2(\lambda_2) & \\ 0 & & \tilde{\mathcal{J}}\gamma(\lambda) \end{pmatrix}$$

où les blocs $\tilde{\mathcal{J}}$ sont donnés par le théorème 8.

Exemple 10 1. *Le cas de plusieurs valeurs propres :*

si on prend l'exemple 7, on a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$$

et

$$\dim E_1 = 1, \dim E_{-1} = 1$$

Alors

$$\tilde{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. *Le cas d'une seule valeur propre :*
Soient

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$
$$m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$$

et

$$\dim E_1 = 2$$

Alors

$$\tilde{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.5 Algorithme de Fadeev

Cet algorithme permet de calculer entre autre le polynôme minimal d'une matrice. Écrivons le polynôme caractéristique sous la forme suivante :

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \cdots - p_{n-1}\lambda - p_n = \lambda^n - \sum_{j=1}^{n} p_j\lambda^{n-j}$$

et $B(\lambda)$ la transposée de la comatrice de $\lambda I_n - A$ sous la forme

$$B(\lambda) = \lambda^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda^{n-1-j} B_j$$

L'algorithme de Fadeev permet de calculer les coefficients p_j et les matrices B_j par le schéma suivant :

$A_1 = A$	$p_1 = tr(A_1)$	$B_1 = A_1 - p_1 I_n$
$A_2 = AB_1$	$p_2 = \frac{1}{2} tr(A_2)$	$B_2 = A_2 - p_2 I_n$
$A_3 = AB_3$	$p_3 = \frac{1}{3} tr(A_3)$	$B_3 = A_3 - p_3 I_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_{n-1} = AB_{n-2}$	$p_{n-1} = \frac{1}{n-1} tr(A_{n-1})$	$B_{n-1} = A_{n-1} - p_{n-1} I_n$
$A_n = AB_{n-1}$	$p_n = \frac{1}{n} tr(A_n)$	$B_n = A_n - p_n I_n = 0$

où $tr(X)$ désigne la trace d'une matrice carrée X, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.
Notons $D(\lambda)$ le PGCD des coefficients de la matrice $B(\lambda)$, alors le polynôme minimal de A est donné par :

$$m_A(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{D(\lambda)}$$

Exemple 11 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{2018} et e^A.

Solution :
Appliquons l'algorithme de Fadeev. Pour cela cherchons les coefficients p_j et B_j. Alors

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$B_A(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda^2 - \lambda & -\lambda + 1 \\ 0 & -\lambda + 1 & \lambda^2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{PGCD}(B_{ij}) = \lambda - 1$$

Alors

$$m_A(\lambda) = \frac{\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda - 1} = \lambda^2 - 1 = \underbrace{(\lambda - 1)}_{\varphi_1}\underbrace{(\lambda + 1)}_{\varphi_2}$$

Soit f une fonction quelconque.

$$f(A) = f(1)\varphi_1(A) + f(-1)\varphi_2(A)$$

$A_1 = A$	$p_1 = 1$	$B_1 = A_1 - p_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
$A_2 = AB_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$p_2 = 1$	$B_2 = A_2 - p_2 I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$A_3 = AB_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$p_3 = -1$	$B_3 = A_3 - p_3 I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Prenons
$f(x) = x - 1$, alors $f(A) = A - I = -2\varphi_2(A) \Longrightarrow \varphi_2(A) = -\dfrac{1}{2}(A - I)$
$f(x) = x + 1$, alors $f(A) = A + I = 2\varphi_1(A) \Longrightarrow \varphi_1(A) = \dfrac{1}{2}(A + I)$
Donc

$$f(A) = \frac{1}{2}f(1)(A+I) - \frac{1}{2}f(-1)(A-I)$$
$$\Longrightarrow f(A) = \left(\frac{f(1) - f(-1)}{2}\right) A + \left(\frac{f(1) + f(-1)}{2}\right) I$$

Par suite

$$A^{2018} = I$$

et

$$e^A = \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right) A + \left(\frac{e + e^{-1}}{2}\right) I$$

Devoir maison :
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Programmer l'algorithme de Fadeev sur Matlab pour calculer A^{1000} et e^A.

1.6 Exercices corrigés

Exercice 1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :*

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha + 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

-I-

1. *Factoriser le polynôme caractéristique P_{A_α} en produit de facteurs du premier degré.*
2. *Déterminer selon la valeur de α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.*
3. *Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.*
4. *Déterminer selon les valeurs de α le polynôme minimal de A_α.*

-II-

On suppose que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A.

1. *Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
2. *Écrire la décomposition de Dunford de B.*
3. *Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{Bt} et exprimer e^{At} à l'aide de P et e^{Bt}.*

Solution

-I-

1.

$$P_{A_\alpha} = \det(A_\alpha - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -\left(1+\lambda\right)^2\left(\lambda - \alpha + 1\right)$$

2. **Les valeurs propres de A_α :**
   Si $\alpha \neq 0$, on a :
$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = -1, mult = 2 \\ \lambda_3 = \alpha - 1, mult = 1. \end{cases}$$
   Si $\alpha = 0$, on a :
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, mult = 3$$

3. Pourque la matrice A_α soit diagonalisable il faut que
$$\dim(E_\lambda) = mult(\lambda)$$

   Les vecteurs propres :
   Si $\alpha \neq 0$:
   Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
$$(A_\alpha + I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + y + (\alpha+1)z = 0 \end{cases}$$
$$(\alpha+1)z = 0 \Longleftrightarrow (\alpha+1) = 0 \vee (z = 0)$$

Si $\alpha \neq -1$, alors $z = 0$ et $x = y$, donc

$$E_{-1} = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On a

$$\dim E_{-1} = 1 \neq 2$$

Alors A_α n'est pas diagonalisable.
Si $\alpha = -1$, alors $z \in \mathbb{R}$ et $x = y$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$E_{-1} = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Alors A_α est diagonalisable.

Si $\alpha = 0$:
Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$:

$$(A_\alpha + I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On a

$$\dim E_{-1} = 1 \neq 2$$

Alors A_α n'est pas diagonalisable.
Conclusion : A_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha = -1$.

4. On a

$$\alpha = -1 \Longrightarrow \begin{cases} P_{A_{-1}} = -(\lambda + 1)^2 (\lambda + 2) \\ m_{A_{-1}}(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) \end{cases}$$

$$\alpha \neq -1 \Longrightarrow \begin{cases} P_{A_\alpha} = -(\lambda + 1)^2 (\lambda - \alpha + 1) \\ m_{A_\alpha}(\lambda) = (\lambda + 1)^2 (\lambda - \alpha + 1) \end{cases}$$

$$\alpha = 0 \Longrightarrow \begin{cases} P_{A_0} = -(\lambda + 1)^3 \\ m_{A_0}(\lambda) = (\lambda + 1)^3 \end{cases}$$

-II-

On suppose que $\alpha = 0$, et on a

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Cherchons une base $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} Ae_1 = -e_1 \\ Ae_2 = e_1 - e_2 \\ Ae_3 = e_2 - e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} (A+I)e_1 = 0 \\ (A+I)e_2 = e_1 \\ (A+I)e_3 = e_2 \end{cases}$$

Pour $\lambda = -1$, on prend $e_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre, donc

$$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x - y = 1 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x - y = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N'}$$

avec $N'^3 = 0$.

3.
$$e^{Bt} = e^{(D'+N')t} = e^{D't} + e^{N't}$$

où

$$e^{D't} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

et

$$e^{N't} = \sum_{k=0}^{2} \frac{N'^k t^k}{k!} = I + N't + \frac{N'^2 t^2}{2}$$

avec

$$N'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$e^{N't} = \begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par suite

$$e^{Bt} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$e^{At} = e^{PBP^{-1}} = Pe^{Bt}P^{-1}$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix} 1-\dfrac{t^2}{2} & \dfrac{t^2}{2} & t+\dfrac{t^2}{2} \\ t-\dfrac{t^2}{2} & 1-t+\dfrac{t^2}{2} & \dfrac{t^2}{2} \\ -t & t & t+1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 *Soit l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^4$ *définit par :*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-2y+t \\ 4x-2y-2z \\ 4x-4y+2z+2t \\ 4x-4y+4t \end{pmatrix}$$

1. *Écrire la matrice A de f par rapport à la base canonique.*
2. *f est-elle diagonalisable ou trigonalisable ?*
3. *Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$, puis e^{At}.*
4. *En utilisant l'exponentielle d'une matrice, résoudre le système*

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

.

Solution

1.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Calculons les valeurs propres et les vecteurs propres de A
Valeurs propres :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -2-\lambda & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 2-\lambda & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 (6-\lambda)(-2-\lambda)$$

$$(C_1 + C_2), (L_2 - L1), (L_4 - L3)$$

On a

$$\begin{cases} P_A(\lambda) \text{ scindé} \\ \lambda = 2, \ \text{mult } (\lambda) = 2 \\ \lambda = -2, \ \text{mult } (\lambda) = 1 \\ \lambda = 6, \ \text{mult } (\lambda) = 1 \end{cases}$$

Vecteurs propres :

$$(A - 2I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + t = 0 \\ 4x - 4y - 2z = 0 \\ 4x - 4y + 2t = 0 \\ 4x - 4y + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z = -t \\ x = y - \dfrac{1}{2}t \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} y - \dfrac{1}{2}t \\ y \\ -t \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On prend $y = 1$ et $t = 2$, on obtient

$$E_2 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On a

$$\dim E_2 = 2 \neq \ \text{mult } \lambda = 2$$

Alors f est diagonalisable.

$$(A - 6I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y + t = 0 \\ 4x - 8y - 2z = 0 \\ 4x - 4y - 4z + 2t = 0 \\ 4x - 4y - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On prend, $t = 2$ et on obtient

$$E_6 = \left\langle v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(A + 2I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y + t = 0 \\ 4x - 2z = 0 \\ 4x - 4y + 4z + 2t = 0 \\ 4x - 4y + 6t = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x = \frac{1}{2}z \\ t = z \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On prend, $z = 2$ et on obtient

$$E_{-2} = \left\langle v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3. On a

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

donc

$$A^n = PA'^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \times 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \times 2^{n-2} \end{pmatrix}$$

avec

$$A'^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

et

$$e^{At} = Pe^{A't}P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \frac{e^{6t}}{2} & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-2t}}{4} \end{pmatrix}$$

avec

$$e^{A't} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

4.

$$\frac{dX}{dt} = Ax \Longrightarrow X = Ce^{At}$$

Exercice 3 *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, trois suites numériques réelles vérifiant :*

$$\begin{cases} U_n = 8U_{n-1} + 9Z_{n-1} \\ V_n = -3U_{n-1} - V_{n-1} - 3Z_{n-1} \\ Z_n = -6U_{n-1} - 7Z_{n-1} \end{cases} \tag{1.6.1}$$

Déterminer les termes U_n,V_n et Z_n en fonction de n, avec $U_0 = a$,$V_0 = b$ et $Z_0 = c$..

Solution

Le système 3 peut s'écrire comme suit

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n-1} \\ V_{n-1} \\ Z_{n-1} \end{pmatrix}$$

On sait que

$$X_n = A^n X_0$$

avec

$$X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

donc il faut calculer A^n, pour cela cherchons les valeurs et les vecteurs propres de A.
Valeurs propres :

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 8-\lambda & 0 & 9 \\ -3 & -1-\lambda & -3 \\ -6 & 0 & -7-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)^2 (2-\lambda)$$

On a

$$\begin{cases} P_A(\lambda) \text{ scindé} \\ \lambda_1 = -1, \text{ mult } (\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = 2, \text{ mult } (\lambda_2) = 1 \end{cases}$$

Vecteurs propres :

$$(A+I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 9x + 9z = 0 \\ -3x - 3z = 0 \\ -6x - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On prend, $x = y = 1$ et on obtient

$$E_1 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim E_1 = 2 = \text{ mult } \lambda_1$$

$$(A - 2I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 6x + 9z = 0 \\ -3x - 3y - 3z = 0 \\ 4x - 4y + 4z + 2t = 0 \\ -6x - 9z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{2}z \\ x = \frac{3}{2}z \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}z \\ \\ -\frac{5}{2}z \\ \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \\ -\frac{5}{2} \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

On prend $z = 2$, on obtient

$$E_2 = \left\langle v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim E_2 = 1 = \text{ mult } \lambda_2$$

Alors A est diagonalisable. on a

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donc

$$A^n = PA'^n P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}(-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2^{n+1}}{5} \end{pmatrix}$$

avec

$$A'^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Par suite

$$X_n = A^n X_0$$

Exercice 4 *Soit le système différentiel d'ordre 1 à coefficients constants*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y + 2z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + y + 2z \end{cases} \tag{1.6.2}$$

1. *Écrire ce système sous la forme*

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

2. *Écrire la réduction de Jordan de la matrice A.*
3. *Résoudre le système*

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

Solution

1.

$$4 \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \\ \frac{dy}{dt} \\ \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}}_{\frac{dX}{dt}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}$$

2. Pour écrire la réduction de Jordan de A, il faut trouver la matrice réduite de A, pour cela calculons les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
Valeurs propres :

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3$$

On remarque qu'on a une seule valeur propre donc

$$A = 2I + N$$

avec

$$N = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où

$$N^3 = 0$$

Exercice 5 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f un endomorphisme de E.*

$$\forall P \in E, f(P) = (2X+1)\,P - \left(X^2-1\right)\,P'$$

1. *Écrire la matrice A de f par rapport à la base $(1, X, X^2)$.*
2. *Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.*
3. *Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.*
4. *Calculer e^{At}.*

Solution Soit

$$f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$$

1. On a

$$\begin{cases} f(1) = 2X + 1 \\ f(X) = X^2 + X - 1 \\ f(X^2) = X^2 + 2X \end{cases}$$

Alors

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

2. **Valeurs propres :**

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

Vecteurs propres :

$$(A - I)v = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow v = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose $z = 1$, on obtient

$$E_1 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On a

$$\begin{cases} P_A(\lambda) \text{ scindé} \\ \dim E_1 = 1 \neq \text{ mult}(\lambda) = 3 \end{cases}$$

Donc A est trigonalisable.

3. Utilisons la décomposition de Dunford pour calculer A^n.
Puisqu'on a une seule valeur propre alors

$$A = I + N$$

avec

$$N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, N^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0$$

Donc

$$A^n = (I + N)^n = \sum_{k=0}^{3} C_n^k I^{n-k} N^k$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - n^2 + n & -n & -n^2 + 1 \\ 2n & 1 & 2n \\ n^2 - n & n & 1 + n^2 - n \end{pmatrix}$$

4.

$$e^A t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = e^t \sum_{k=0}^{2} \frac{N^k t^k}{k!}$$
$$= e^t \begin{pmatrix} 1-t^2 & -t & -n^2 \\ 2t & 1 & 2t \\ t^2 & t & 1+t^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Donner la réduction de Jordan de la matrice A et P.*
2. *Donner la réduction de Dunford de la matrice A et calculer A^n.*

Solution

1. Calculons le polynôme caractéristique de A.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3 (\lambda - 1)$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$et $\lambda_3 = 1$.
Les vecteurs propres :

$$(A-2I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -x + 2y + z - 2t = 0 \\ 2x + y - t = 0 \\ x + 2y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

alors

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose $t = 1$, on obtient

$$E_2 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On a

$$\dim E_2 = 1 \neq \text{ mult } (2) = 3$$

Alors A est trigonalisable.

$$(A-I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+3y+z-2t=0 \\ 2x+y+z-t=0 \\ x+2y+z-t=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=y \\ t=-y \\ z=-4y \end{cases}$$

alors

$$v = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -4y \\ -y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On pose $y=1$, on obtient

$$E_1 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On a

$$\begin{cases} P_A(\lambda) = (2-\lambda)^3(\lambda-1) \\ m_A(\lambda) = (2-\lambda)^3(\lambda-1) \\ \dim E_1 = 1 \\ \dim E_2 = 1 \end{cases}$$

Par suite

$$\tilde{\mathcal{J}} = A' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Av_1 & Av_2 & Av_3 & Av_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$

Cherchons maintenant les deux vecteurs propres v_3 etv_4. On a

$$\begin{cases} Av_1 = 2v_1 \\ Av_2 = v_1 + 2v_2 \\ Av_3 = v_2 + 2v_3 \\ Av_4 = v_4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (A-2I)v_1 = 0 \\ (A-2I)v_2 = v_1 \\ (A-2I)v_3 = v_2 \\ (A-I)v_4 = 0 \end{cases}$$

On remarque que v_1 est le vecteur propre de 2 et v_4 le vecteur propre de 1est v_4.

$$(A-2I)v_2 = v_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x=0 \\ -x+2y+z-2t=1 \\ 2x+y-t=0 \\ x+2y+z-2t=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

On prend $t = 0$, on obtient

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant

$$(A - 2I)v_3 = v_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -x + 2y + z - 2t = 0 \\ 2x + y - t = 1 \\ x + 2y + z - 2t = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t + 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

donc

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}$$

On prend $t = 0$, on obtient

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. On a

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{N'}$$

donc

$$A = PA'P^{-1} = \underbrace{PD'P^{-1}}_{D} + \underbrace{PN'P^{-1}}_{N}$$

avec

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Alors

$$A = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

De plus

$$A^n = PA'^n P^{-1}$$

avec

$$A'^n = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}}^n & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{1}^n \end{pmatrix}$$

On pose

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour calculer $A_1'^n$, on fait la décomposition de Dunford, on obtient

$$A'_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D'_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N'_1}$$

par suite

$$A_1'^{\,n} = (D'_1 + N'_1)^n = \sum_{k=0}^{2} C_n^k D_1'^{\,n-k} N_1'^{\,k}$$

avec

$$N_1'^{\,3} = 0, D_1'^{\,2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, D_1'^{\,3} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } N_1'^{\,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A'^n =$$

Chapitre 2

Formes bilinéaires-Formes quadratiques

Dans ce chapitre on va traité les problèmes à caractère bilinéaire, autrement dit les problèmes qui dépendent d'une manière linéaire de deux vecteurs, par exemple, la distance entre deux points (pour calculer l'erreur) et le produit scalaire, il permet de définir la norme (dans certains cas de figure la norme sert à calculer l'énergie d'un système).

2.1 Formes bilinéaires, cas de dimension finie

Définition 14 ***(Forme bilinéaire)*** *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On appelle forme bilinéaire sur E une application*

$$\begin{aligned} b : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto b(x, y) \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions suivantes :

1. $\forall x, x', y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ b(\alpha x + \beta x', y) = \alpha b(x, y) + \beta b(x', y)$
2. $\forall x, y, y' \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ b(x, \alpha y + \beta y') = \alpha b(x, y) + \beta b(x, y')$

Exemple 12 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $b(x, y) = xy$
$\forall x, x', y, y' \in E$ *et* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *on a*

$$b(\alpha x + \beta x', y) = (\alpha x + \beta x')y = \alpha xy + \beta x'y = \alpha b(x, y) + \beta(x', y)$$

donc b est linéaire par rapport à la première variable.

$$b(x, \alpha y + \beta y') = x(\alpha y + \beta y') = \alpha xy + \beta xy' = \alpha b(x, y) + \beta(x, y')$$

donc b est linéaire par rapport à la deuxième variable.

Définition 15 ***(Symétrie)*** *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. On dit que b est symétrique si*

$$\forall x, y \in E,\ \ b(x, y) = b(y, x)$$

Définition 16 ***(Définie positive)*** *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E. Alors*

1. *La forme b est positive si*

$$\forall x \in E,\ \ b(x, x) \geq 0$$

2. la forme b est définie positive si

$$\forall x \in E,\ \ b(x,x) \geq 0,\ \ b(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Définition 17 ***(Matrice associée à une forme bilinéaire)*** *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, b une forme bilinéaire définie sur E et $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. On appelle une matrice associée à b dans la base B de E et on la note $\mathcal{M}_B(b)$ la matrice suivante*

$$\mathcal{M}_B(b) = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & \cdots & b(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ b(e_n, e_1) & \cdots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Lemme 1 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, b une forme bilinéaire définie sur E et $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Si x et y sont deux vecteurs de E et si on note*

$$X = \mathcal{M}_B(x), Y = \mathcal{M}_B(y)$$

alors

$$b(x,y) = X^t \mathcal{M}_B(b) Y$$

Proposition 6 ***(Formules de changement de bases)*** *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, b une forme bilinéaire définie sur E et B, B' deux bases de E. Alors*

$$\mathcal{M}_{B'}(b) = P^t \mathcal{M}_B(b) P$$

avec P la matrice de passage de la base B à la base B'.

Définition 18 ***(Rang d'une matrice)*** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle le rang de la matrice A la dimension de l'image de A.*

$$rg\ A = \dim \{y \in \mathbb{K}^n / \exists x \in \mathbb{K}^n : y = Ax\}$$

ou encore

$$rg\ A = n - \dim \ker A$$

Définition 19 *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie. Alors le rang de la forme b est le rang de la matrice associée à cette forme dans une base quelconque de E.*

$$rg\ b = \ rg\ \mathcal{M}_B(b)$$

Proposition 7 *Le noyau de b est le noyau de la matrice qui représente b dans une base quelconque de E et on le note $\mathcal{N}(b)$.*

Définition 20 *Soit b une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie n. Alors b est non dégénérée si et seulement si*

$$rg\ b = n = \dim E$$

Théorème 10 ***(Théorème du rang pour les formes bilinéaires)*** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit b une forme bilinéaire sur E, alors*

$$\dim E = \ rg\ b + \dim \mathcal{N}(b)$$

2.2 Formes quadratiques, cas de dimension finie

Définition 21 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle forme quadratique sur E toute application q de la forme*

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto s(x,x) \end{aligned}$$

où s est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Proposition 8 *Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique s telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = s(x,x)$. La forme bilinéaire s s'appelle la forme polaire de q et on a*

$$\forall (x,y) \in E^2, \;\; s(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right] = \frac{1}{4}\left[q(x+y) - q(x-y)\right]$$

Définition 22 ***(Matrice d'une forme quadratique)*** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit q une forme quadratique sur E. On définit la matrice associée à la forme q comme étant la matrice associée à sa forme polaire s et le rang de q est le rang de cette matrice.*

Remarque 10 *Toute forme quadratique est un polynôme homogène de degré 2, autrement dit*

$$q(x) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k x_l$$

avec $a_{kl} \in \mathbb{K}$ des coefficients fixés.

2.3 Bases orthogonales

Définition 23 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, b une forme bilinéaire symétrique et $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Alors*

1. *On dit que B est une base orthogonale de E si*

$$\forall k,l = 1, \cdots, n, k \neq l : \;\; b(e_k, e_l) = 0$$

2. *On dit que B est normalisé si*

$$\forall k = 1, \cdots, n : \;\; b(e_k, e_k) = 1$$

3. *On dit que B est orthonormée si elle est à la fois orthogonale et normalisée*

$$\forall k,l = 1, \cdots, n, k \neq l : \;\; b(e_k, e_l) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } k = l \\ 0 \text{ si } k \neq l \end{array} \right.$$

Remarque 11 *Soit b une forme bilinéaire symétrique et B une base de E. Alors*

1. *$\mathcal{M}_b(B)$ est diagonale si et seulement si B est orthogonale.*
2. *$\mathcal{M}_b(B)$ admet que des 1 sur sa diagonale si et seulement si B est normalisée.*
3. *$\mathcal{M}_b(B) = I$ si et seulement si B est orthonormée.*

2.4 Réduction des formes quadratiques

2.4.1 Méthode de Gauss

Cette méthode s'applique que lorsque la forme quadratique admet dans son expression au moins un terme carré.
Soit $\mathbb{R}^3$ vu comme étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et q une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \quad q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$$

On considère un terme carré quelconque par exemple x_1^2, On va utiliser la formule suivante

$$a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2$$

1. On ordonne suivant le paramètre x_1

$$q(x) = \underbrace{x_1^2 + 2x_1x_2}_{\text{termes en } x_1} + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$$

2. On écrit les termes en x_1 comme le début d'un carré

$$q(x) = \underbrace{(x_1 + x_2)^2 - x_2^2}_{\text{termes en } x_1} + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$$

3. On refait le même travail sur x_2

$$q(x) = (x_1 + x_2)^2 + \underbrace{x_2^2 - 4x_2x_3}_{\text{termes en } x_2} + 5x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 - 4x_3^2 + 5x_3^2$$

4. On continu l'opération jusqu'à la disparition de tout les termes rectangles

$$q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$$

2.4.2 Méthode des dérivées partielles

Cette méthode s'applique lorsque la forme quadratique n'admet aucun terme carré dans son expression.
Soit $E = \mathbb{R}^3$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit q la forme quadratique définit sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \quad q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$$

1. On choisit un terme rectangle $\mathcal{K}x_kx_l$ avec $\mathcal{K} \neq 0$. Dans notre cas on prend

$$5x_1x_2$$

2. On calcul les dérivée partielles $\partial_{x_k}q$ et $\partial_{x_l}q$. Dans notre cas on a

$$\partial_{x_1}q(x) = 5x_2 + 6x_3, \quad \partial_{x_2}q(x) = 5x_1 + 3x_3$$

3. On écrit q sous la forme

$$\forall x \in E : \quad q(x) = \frac{1}{\mathcal{K}}\partial_{x_k}q(x)\partial_{x_l}q(x) + \text{ terme correctif}$$

Dans notre cas on a

$$\forall x \in E : \quad q(x) = \frac{1}{5}\underbrace{(5x_2 + 6x_3)}_{\varphi_1}\underbrace{(5x_1 + 3x_3)}_{\varphi_2} - \frac{18}{5}x_3^2$$

4. On écrit alors
$$\varphi_1\varphi_2 = \frac{1}{4}(\varphi_1+\varphi_2)^2 - \frac{1}{4}(\varphi_1-\varphi_2)^2$$
pour avoir la forme finale
$$\forall x \in E: \ \varphi(x) = \frac{1}{4\mathcal{K}}(\varphi_1+\varphi_2)^2 - \frac{1}{4\mathcal{K}}(\varphi_1-\varphi_2)^2 + \text{ terme correctif}$$
Dans notre cas on aura
$$\forall x \in E: \ \varphi(x) = \frac{1}{20}(5x_1+5x_2+9x_3)^2 - \frac{1}{20}(5x_1-5x_2-3x_3)^2 - \frac{18}{5}x_3^2$$

Remarque 12 *Si dans le terme correctif on a un terme rectangle on refait les mêmes étapes au niveau de ce terme. Si on a un mélange de termes carrés et de termes rectangles on utilise la méthode de gauss au niveau de ce terme.*

2.5 Classification des formes quadratiques

Théorème 11 ***(Sylvester)*** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et q une forme quadratique sur E. Alors il existe une base e_i de E telle que*
$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$
et
$$q(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k^2 - \sum_{k=p+1}^{r} x_r^2 \tag{2.5.1}$$
c'est-à-dire
$$\mathcal{M}_{e_i}(q) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$
tel que
$$r = \text{ rg }(q)$$
et p un entier qui ne dépend que de la forme de q et non de la base.

Remarque 13 *Pour déterminer la réduction de Sylvester on applique la réduction de Gauss.*

Définition 24 ***(Signature d'une forme quadratique)*** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et q une forme quadratique sur E telle que la réduction de Sylvester est donnée par l'équation 2.5.1. On appelle la signature de la forme q et on la note sign(q) le couple $(p, r-p)$.*

Lemme 2 *Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E de dimension finie n. Alors on a les assertions suivantes :*

1. *q est définie positive si et seulement si*
$$\text{sign } q = (n, 0)$$
2. *q est non dégénérée si et seulement si*
$$\text{sign } q = (p, n-p)$$

Théorème 12 *Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E de dimension finie n et B une base de E, ce qui donne que*

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

tel que

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est le vecteur composante du vecteur x dans la base B.
Lorsqu'on fait la réduction sous la forme de Sylvester n obtient

$$q(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k'^2 - \sum_{k=p+1}^{r} x_r'^2$$

tel que x'_k sont une expression linéaire des x_j ce qui donne que pour une certaine matrice A, on a

$$X' = AX, \;\; X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Alors X' c'est les composantes du vecteur x dans une nouvelle base de E qu'on la note B'. $P = A^{-1}$ est la matrice de passage de B à B' avec B' est une base orthogonale.

2.6 Exercices corrigés

Exercice 7 *Soit $\mathbb{R}^3$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit l'application b de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^3 : b(X,Y) = 3x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 + 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_1y_3 + 6x_2y_3 - 10x_3y_1 + 4x_3y_2$$

1. *Montrer que b est bilinéaire.*
2. *Déterminer la matrice associée à b dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
3. *Déterminer la matrice associée à b dans la base*

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

4. *Déterminer de deux façons le noyau de b.*

Solution

Exercice 8 *Soient les applications suivantes définient sur* $\mathbb{R}^3$ *vu comme étant un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel*

$$q_1(X) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2$$
$$q_2(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$
$$q_3(X) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$$

1. *Montrer qu'elles représentent des formes quadratiques sur* $\mathbb{R}^3$.
2. *déterminer la matrice et la forme polaire correspondante à chaque forme quadratique dans la base canonique.*
3. *Déterminer la matrice associée à chaque forme quadratique dans la base*

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. *Déterminer la forme réduite de Sylvester, une base correspondante, la signature, le caractère d'être définie positive et le caractère d'être dégénérée.*

Exercice 9 *On définit la fonction suivante sur* $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X] : b(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(X)Q^{(1)}(X)dX$$

1. *Montrer qu'elle est bilinéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$.
2. *Discuter de deux façons différentes si elle est symétrique.*
3. *Ecrire sa matrice dans la basé*

$$\left\{1, 1 + X, 1 + 2X + X^2\right\}$$

4. *Déterminer de deux façons le noyau de b et discuter si elle est dégénérée.*

-II-

On considère la forme q définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] : q(P) = b(P, P)$$

1. *Montrer que q représente une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$.*
2. *Déterminer l'orthogonal par rapport à q des deux ensembles :*

$$D_1 = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] : 2P - XP^{(1)} = 1\right\}$$

$$D_2 = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(0) = P^{(1)}(0)\right\}$$

3. *Déterminer la forme réduite de Sylvester de q et une base correspondante.*

Bibliographie