école Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen
Deuxième cycle
spécialité : Génie-industriel
Niveau troisième année
2019 - 2020

COMPLÉMENT MATHÉMATIQUE (ALGÈBRE)

Série de TD2

Responsable du module: H.Sebbagh

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}^3$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit l'application b de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^3 : b(X,Y) = 3x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 + 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_1y_3 + 6x_2y_3 - 10x_3y_1 + 4x_3y_2$$

1. Montrer que b est bilinéaire.
2. Déterminer la matrice associée à b dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice associée à b dans la base

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

4. Déterminer de deux faccons le noyau de b.

Exercice 2. Soient les applications suivantes définient sur $\mathbb{R}^3$ vu comme étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

$$q_1(X) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2$$
$$q_2(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$
$$q_3(X) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$$

1. Montrer qu'elles représentent des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^3$.
2. déterminer la matrice et la forme polaire correspondante à chaque forme quadratique dans la base canonique.
3. Déterminer la matrice associée à chaque forme quadratique dans la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. Déterminer la forme réduite de Sylvester, une base correspondante, la signature, le caractère d'être définie positive et le caractère d'être dégénérée.

Exercice 3.

-I-

On définit la fonction suivante sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ à valeur dans $\mathbb{R}$

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X] : b(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(X)Q^{(1)}(X)dX$$

1. Montrer qu'elle est bilinéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Discuter de deux faccons différentes si elle est symétrique.
3. Ecrire sa matrice dans la basé

$$\left\{1, 1+X, 1+2X+X^2\right\}$$

4. Déterminer de deux faccons le noyau de b et discuter si elle est dégénérée

-II-

On considère la forme q définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] : q(P) = b(P, P)$$

1. Montrer que q représente une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer l'orthogonal par rapport à q des deux ensembles :

$$D_1 = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] : 2P - XP^{(1)} = 1 \right\}$$

$$D_2 = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] : P(0) = P^{(1)}(0) \right\}$$

3. Déterminer la forme réduite de Sylvester de q et une base correspondante.