École Supérieure en Sciences Appliquées de Tlemcen
Deuxième cycle
spécialité : Génie-industriel
Niveau troisième année
2020 - 2021

COMPLÉMENT MATHÉMATIQUE (ALGÈBRE)

Série de TD1

Responsable du module: H.Sebbagh

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

-I-

1. Factoriser le polynôme caractéristique P_{A_α} en produit de facteurs du premier degré.
2. Déterminer selon la valeur de α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.
4. Déterminer selon les valeurs de α le polynôme minimal de A_α.

-II-
On suppose que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A.

1. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
2. Écrire la décomposition de Dunford de B.
3. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{Bt} et exprimer e^{At} à l'aide de P et e^{Bt}.

Exercice 2. Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ définit par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-2y+t \\ 4x-2y-2z \\ 4x-4y+2z+2t \\ 4x-4y+4t \end{pmatrix}$$

1. Écrire la matrice A de f par rapport à la base canonique.
2. f est-elle diagonalisable ou trigonalisable ?
3. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$, puis e^{At}.
4. En utilisant l'exponentielle d'une matrice, résoudre le système
$$\frac{dX}{dt} = AX$$
.

Exercice 3. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, trois suites numériques réelles vérifiant :

$$\begin{cases} U_n = 8U_{n-1} + 9Z_{n-1} \\ V_n = -3U_{n-1} - V_{n-1} - 3Z_{n-1} \\ Z_n = -6U_{n-1} - 7Z_{n-1} \end{cases}$$

Déterminer les termes U_n,V_n et Z_n en fonction de n, avec $U_0 = a$,$V_0 = b$ et $Z_0 = c$..

Exercice 4. Soit le système différentiel d'ordre 1 à coefficients constants

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y + 2z \\ \frac{dy}{dt} = x + y \\ \frac{dz}{dt} = -x + y + 2z \end{cases}$$

1. Écrire ce système sous la forme
$$\frac{dX}{dt} = AX$$
2. Écrire la réduction de Jordan de la matrice A.
3. Résoudre le système
$$\frac{dX}{dt} = AX$$

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f un endomorphisme de E.

$$\forall P \in E, f(P) = (2X+1)\,P - \left(X^2 - 1\right) P'$$

1. Écrire la matrice A de f par rapport à la base $(1, X, X^2)$.
2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
3. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Calculer e^{At}.