THEOREME DE QUANTITE DE MOUVEMENT ET APPLICATIONS

1. Ecoulement en régime permanent et équation de continuité

1.1. Ecoulement permanent

Un écoulement permanent est défini par un champ de vitesses des particules fluide indépendant du temps. Notons cependant que cela ne veut pas dire que le champ des vecteurs vitesse est uniforme.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

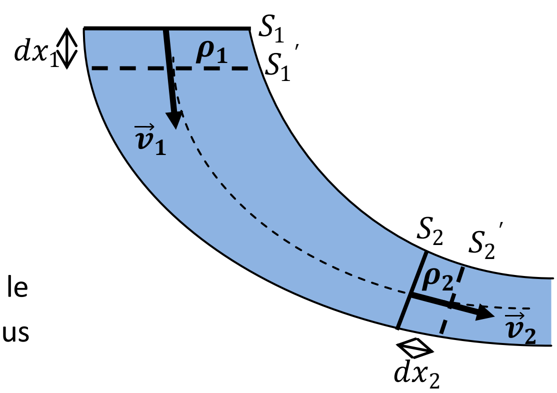
1.2. Equation de continuité

Considérons l'écoulement permanent d'un fluide et soient $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2. Les vitesses $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont que des vitesses moyennes, tous les points de S_1 par exemple ne sont pas nécessairement animés de la même vitesse.

A l'instant t, on considère une certaine masse de fluide (m) comprise entre les sections S_1 et S_2. Soit ρ la masse volumique du fluide. A l'instant t + dt, la masse (m) s'est déplacée et se trouve comprise entre $S_1^{'}$ et $S_2^{'}$. La masse élémentaire (dm) de fluide qui s'est écoulée à travers S_1 est la même que cel1e qui s'est écoulée à travers S_2. Cela traduit la continuité de l'écoulement:

$$dm = \rho_1 S_1 dx_1 = \rho_2 S_2 dx_2$$

Le débit massique est défini par le rapport suivant:



$q_m = \frac{dm}{dt}$

$\rho_1 S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 S_2 \frac{dx_2}{dt}$

$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$

$q_{m\,1} = q_{m\,2}$ c'est l'équation de continuité

En cas des fluides incompressibles : $\rho_1 = \rho_2 = Cst$, le débit volumique est aussi conservé. En effet, nous définissons aussi le débit volumique q_V comme:

$$q_V = \frac{dV}{dt} = \frac{\frac{dm}{\rho}}{dt} = \frac{dm}{\rho dt} = \frac{q_m}{\rho}$$

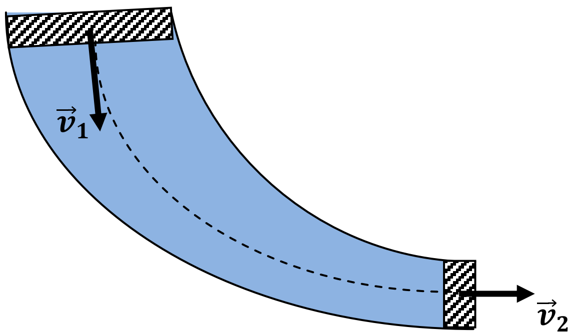
$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

2. Théorème de quantité de quantité de mouvement en régime permanent; théorème d'Euler

Grace au théorème de la quantité de mouvement nous pouvons déterminer les forces exercées sur les objets dont environnent les fluides en écoulement. Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc.

Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide : Le principe fondamental de la dynamique (PFD) s'écrit;

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$



A l'instant t, la quantité de mouvement s'écrit;

$$\vec{P}(t) = dm\overrightarrow{v_1}$$

A l'instant $t+dt$, la quantité de mouvement s'écrit;

$$\vec{P}(t+dt) = dm\overrightarrow{v_2}$$

$$\vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = dm(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}) = d\vec{P}(t)$$

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt}dt = dm(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1})$$

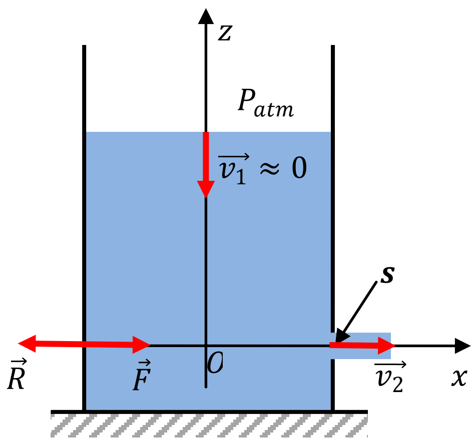
$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \frac{dm}{dt}(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}) = q_m(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1})$$

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = q_m(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1})$$

2.1. Réaction d'un jet

Les forces exercées par jet un d'eau sont déterminées en utilisant le théorème de la quantité de mouvement. Ces forces sont employées dans divers applications à l'instar de la production d'énergie électrique

Nous appliquons le théorème des quantités de mouvement pour déterminer la réaction du jet horizontal s'échappant d'un orifice percé dans un grand réservoir.



$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = q_m(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1})$$

$$\overrightarrow{P_{poids}} + \vec{F} = q_m(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1})$$

F est la résultante des forces de pression.

La projection de cette équation sur (Ox) donne;

$$F = q_m v_2 = \underbrace{\rho s v_2}_{q_m} v_2 = \rho s {v_2}^2$$

Dans le sens inverse, le réservoir subit une force égale et opposée à F, appelée réaction du jet:

$$\vec{R} = -\rho s {v_2}^2 \overrightarrow{e_x}$$

En utilisant la formule de Torricelli; $v_2 = \sqrt{2gz}$

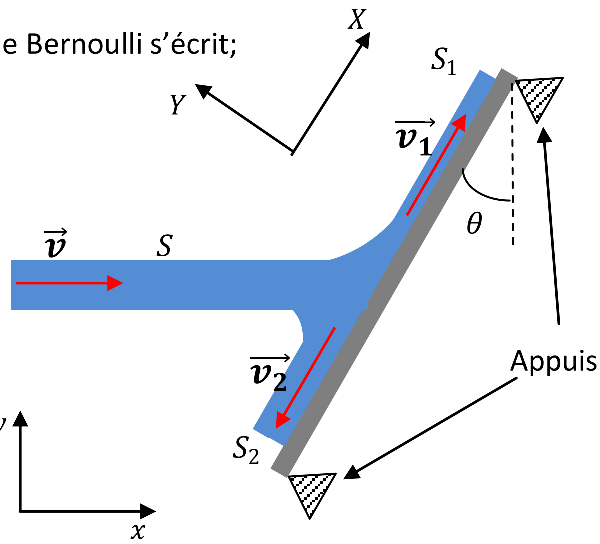
$$\vec{R} = -2\rho s g z \overrightarrow{e_x}$$

2.2. Jet sur une plaque plane

Nous nous intéressons à la force exercée par un jet d'eau frappant une plaque plane avec un débit massique q_m. La plaque est inclinée d'un angle θ et le jet se devise en deux jets émergents de vitesses $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. On considère que fluide est parfait incompressible et on négligera le champ de pesanteur (on admettra que le jet d'eau est de vitesse $\vec{v}$ suffisamment importante pour négliger les forces de pesanteur).

- Puisque le régime est permanent, l'équation de Bernoulli s'écrit;

$$P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$



$P_1 = P_2 = P_{atm}$
$\rho g z_1 = \rho g z_2 \approx 0$
$v_1^2 = v_2^2$
$v_1 = v_2$

De même

$$P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$P = P_1 = P_{atm}$
$\rho g z = \rho g z_1 \approx 0$
$v^2 = v_1^2$
$v = v_1$
$v = v_1 = v_2$

- La loi de conservation de la masse s'écrit;

$$dm = dm_1 + dm_2$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt}$$

$$q_m = q_{m1} + q_{m2}$$

$$q_m = \rho \cdot q_V$$

$$q_{m1} = \rho \cdot q_{V1}$$

$$q_{m2} = \rho \cdot q_{V2}$$

$q_V = q_{V1} + q_{V2}$

$q_V = q_{V1} + q_{V2}$

Par conséquent $Sv = S_1 v_1 + S_2 v_2$

$v = v_1 = v_2$

$$S = S_1 + S_2$$

- D'après le théorème d'Euler (théorème de la quantité de mouvement)

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = q_m (\overrightarrow{v_F} - \overrightarrow{v_I})$$

La force de pesanteur est négligeable, la force F exercée par la plaque sur l'eau (force normale à la plaque) s'écrit;

$$\vec{F} = (q_{m1}\overrightarrow{v_1} + q_{m2}\overrightarrow{v_2}) - q_m \vec{v}$$

Projections cette équation sur l'axe Y du repère lié à la plaque;

$$F = q_m v \cos\theta$$

$$\vec{F} = \rho q_V v \cos\theta \, \overrightarrow{e_Y}$$

$$\vec{F} = \rho S v^2 \cos\theta \, \overrightarrow{e_Y}$$

D'après le principe de l'action et de la réaction, la force que le jet d'eau exerce sur la plaque est donc;

$$\vec{F} = -\rho S v^2 \cos\theta \, \overrightarrow{e_Y}$$