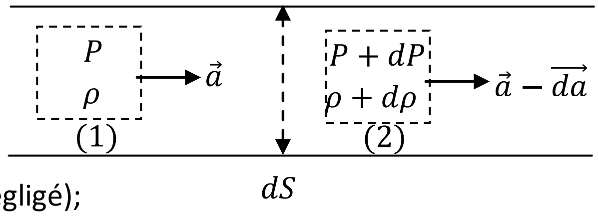
ECOULEMENTS COMPRESSIBLES

1. Ecoulement compressible ou incompressible

1.1. Vitesse du son

Un écoulement est compressible ou incompressible, est selon le fait que des petites variations de masse volumique, de pression et de vitesse se propagent à l'intérieur du fluide à une vitesse qui est la célérité du son dans le milieu considéré. Pour caractériser cette célérité, nous considérerons une petite perturbation adiabatique réversible (isentropique) qui se déplace dans le fluide initialement au repos contenu dans un tube de section constante.

L'équation de la conservation de la masse s'écrit;



$q_{m1} = q_{m2}$

$\rho a dS = (\rho + d\rho)(a - da)dS$

$\rho a = \rho a + a d\rho - \rho da - da d\rho$

En conservant que le premier ordre ($dad\rho$ est négligé);

$a d\rho = \rho da \qquad (1)$

Théorème de la quantité de mouvement s'écrit;

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = q_m(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}) = q_m\left(\vec{a} - \left(\vec{a} - \overrightarrow{da}\right)\right) = \rho a dS\left(\vec{a} - \left(\vec{a} - \overrightarrow{da}\right)\right)$$

$$\overrightarrow{F_{ext}} = \text{variation des forces de pression} = (P + dP)dS - PdS = dPdS$$

$$dP = \rho a da$$

$$\frac{dP}{a} = \rho da \qquad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow a d\rho = \frac{dP}{a}$$

$$a = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$$

- En fonction du coefficient de compressibilité $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

$$d\rho = d\left(\frac{m}{V}\right) = \frac{Vdm - mdV}{V^2} = -\frac{mdV}{V^2} = -\rho_0 \frac{dV}{V} = \rho_0 \chi_T dP$$

$$a = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{\frac{dP}{\rho_0 \chi_T dP}} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_T}}$$

- Pour un gaz parfait (en cas de transformation adiabatique réversible $PV^\gamma = Cst$);

$$\log(PV^\gamma) = Cst$$

$$\log(P) + \gamma\log(V) = Cst$$

$$\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V} = 0$$

$$\frac{1}{P\gamma} = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right) = \chi_T$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \frac{1}{P\gamma}}} = \sqrt{\frac{P\gamma}{\rho_0}}$$

L'équation d'état d'un gaz parfait $PV = nRT \Rightarrow PM = \rho_0 RT \Rightarrow \frac{P}{\rho_0} = \frac{RT}{M}$

$$a = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$$

Exemple: calculer la vitesse du son dans l'air à $T = 15°$

1.2. Nombre de Mach

L'écoulement est incompressible quand on peut négliger les variations de masse volumique au sein d'un écoulement. Supposons que nous avons l'écoulement adiabatique réversible (isentropique donc pas d'effet de viscosité). La loi de conservation de masse s'écrit;

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}} + \rho \mathrm{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}}$$

L'écoulement est incompressible $(\rho = cst) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}} \longrightarrow 0 \Rightarrow \mathrm{div}(\vec{v}) \longrightarrow 0$

Donc en cas d'écoulement incompressible, on peut négliger, pour une particule fluide, $\mathrm{div}(\vec{v})$ devant les gradients de vitesse qui la déforment:

$$\mathrm{div}(\vec{v}) \ll \overrightarrow{grad}(\vec{v})$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}} \ll \overrightarrow{grad}(\vec{v})$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit (sans forces de frottement et sans forces de pesanteur);

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\left(\overrightarrow{grad}P\right)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \mathrm{t}} + \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\left(\overrightarrow{grad}P\right)$$

Pour un écoulement stationnaire $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \mathrm{t}} = 0$, donc;

$$\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\left(\overrightarrow{grad}P\right)$$

Nous avons déjà démontré que la célérité du son dans le milieu fluide est;

$$a = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$$

$$d\rho = \frac{dP}{a^2}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}} \ll \overrightarrow{grad}(\vec{v}) \Rightarrow -\frac{1}{\rho a^2}\frac{dP}{\mathrm{dt}} \ll \overrightarrow{grad}(\vec{v})$$

On multiplie par la vitesse

$$-\frac{\vec{v}}{\rho a^2}\frac{dP}{\mathrm{dt}} \ll \vec{v}.\overrightarrow{grad}(\vec{v})$$

$$-\frac{\vec{v}}{\rho a^2}\frac{dP}{\mathrm{dt}} \ll -\frac{1}{\rho}\left(\overrightarrow{grad}P\right)$$
$$\frac{\vec{v}}{a^2}\frac{dP}{\mathrm{dt}} \ll \left(\overrightarrow{grad}P\right)$$

$$\overrightarrow{grad}P = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial P}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial P}{\partial \mathrm{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial \mathrm{x}}\frac{\partial t}{\partial \mathrm{t}} \\ \frac{\partial P}{\partial \mathrm{y}}\frac{\partial t}{\partial \mathrm{t}} \\ \frac{\partial P}{\partial \mathrm{z}}\frac{\partial t}{\partial \mathrm{t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_x}\frac{\partial P}{\partial \mathrm{t}} \\ \frac{1}{v_y}\frac{\partial P}{\partial \mathrm{t}} \\ \frac{1}{v_z}\frac{\partial P}{\partial \mathrm{t}} \end{pmatrix} = \frac{1}{v}\frac{\partial P}{\partial \mathrm{t}}$$
$$\frac{\vec{v}}{a^2}\frac{dP}{\mathrm{dt}} \ll \left(\overrightarrow{grad}P\right) \Rightarrow \frac{\vec{v}}{a^2}\frac{dP}{\mathrm{dt}} \ll \frac{1}{v}\frac{\partial P}{\partial \mathrm{t}}$$
$$\left(\frac{v}{a}\right)^2 \ll 1$$
$${M_a}^2 \ll 1$$

$M_a = \frac{v}{a}$ est appelé le nombre de Mach

1.3. Classification des écoulements

Le nombre de Mach est un nombre sans dimension qui exprime le rapport de la vitesse locale d'un fluide à la vitesse du son dans ce même fluide. Lorsque ce nombre est très petit, les compressions dues aux variations de pression peuvent être négligées, et l'écoulement peut être considéré, en première approximation, comme étant incompressible. La valeur de ce nombre est fondamentale pour les écoulements compressibles. Voici la classification adoptée suivant la valeur du nombre de Mach:

- $M_a < 0{,}3$: l'écoulement est incompressible et les effets de densité sont négligés. Dans l'air, un écoulement peut donc être suppose incompressible pour des vitesses allant jusqu'à$v \cong 0{,}3a \cong 100\ m/s$.
- $0{,}3 < M_a < 0{,}8$: l'écoulement est compressible subsonique.
- $0{,}8 < M_a < 1{,}2$: l'écoulement est compressible transonique.
- $1{,}2 < M_a < 3$: l'écoulement est compressible supersonique.
- $3 < M_a$: l'écoulement est compressible hypersonique.

2. Ecoulements isentropiques unidirectionnels compressibles des fluides parfaits

L'écoulement est dit isentropique s'il est réversible et adiabatique. C'est le cas, par exemple, de l'écoulement d'un gaz parfait en tuyère, que l'on retrouve dans de nombreuses machines thermiques.

2.1. Equation de Barré de Saint-Venant

Reprenons la formule de Weissbach, obtenue dans le chapitre 1 (Bilans énergétiques pour les écoulements permanents);

$$\frac{{v_2}^2 - {v_1}^2}{2} = C_p(T_1 - T_2)$$

Si nous considérons que le fluide à la température T_0 est immobile i.e $v_1 = 0$ et qu'à la température T est à une vitesse d'écoulement $v_2 = v$, nous pouvons écrire alors;

$$\frac{v^2}{2} = C_p(T_0 - T)$$

C_p est la capacité calorifique massique à pression constante

La relation de Mayer s'écrit;

$$C_p = \frac{1}{m}\left(\frac{\gamma n R}{\gamma - 1}\right) = \frac{1}{M}\left(\frac{\gamma R}{\gamma - 1}\right)$$

Nous avons déjà démontré que la vitesse du son dans un fluides s'écrit;

$$a = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} \Rightarrow \frac{R}{M} = \frac{a^2}{\gamma T}$$

$$C_p = \frac{a^2}{T}\left(\frac{1}{\gamma - 1}\right)$$

$$\frac{v^2}{2} = C_p(T_0 - T) = C_p T\left(\frac{T_0}{T} - 1\right) = \frac{a^2}{T}\left(\frac{1}{\gamma - 1}\right)T\left(\frac{T_0}{T} - 1\right) = a^2\left(\frac{1}{\gamma - 1}\right)\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)$$

$$\frac{v^2}{2} = a^2\left(\frac{1}{\gamma - 1}\right)\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{v^2}{a^2} = \left(\frac{1}{\gamma - 1}\right)\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)$$

$$\frac{1}{2}(M_a)^2 = \left(\frac{1}{\gamma - 1}\right)\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)$$

$$\left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)(M_a)^2 + 1 = \frac{T_0}{T}$$

Cette équation porte le nom d'équation de Barré de Saint Venant (BSV).

a- Etat critique

Lorsque la vitesse d'écoulement du fluide est égale à la vitesse du son dans ce fluide $(v = a)$, on parle d'état critique, les caractéristiques de cet état sont obtenues en mettant $M_a = 1$ dans l'équation de BSV

$$\left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) + 1 = \frac{T_0}{T}$$

$$\frac{T_0}{T} = \frac{\gamma + 1}{2}$$

Pour l'air (considéré comme fluide parfait), $\gamma = 1{,}4$;

$$\frac{T}{T_0} = 0{,}833$$

b- Vitesse limite

La vitesse limite d'un écoulement compressible est atteinte lorsque la détente est poussée jusqu'à $P = 0$ donc $T = 0$. Nous pouvons écrire alors:

$$\frac{v_\ell^2}{2} = C_p(T_0 - T) = C_p T_0$$

$$v_\ell = \sqrt{2C_p T_0}$$

Cette vitesse permet, par exemple, de connaitre la vitesse maximale que peuvent atteindre les gaz d'échappement d'une fusée dans le vide, elle conditionne donc la poussée maxi des moteurs de fusée.

2.2. Barré de Saint Venant – Bernoulli

Nous allons montrer, dans ce paragraphe, que l'équation de Bernoulli peut être considérée comme un développement limité d'ordre un de BSV.

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)(M_a)^2 + 1$$

Transformation adiabatique ${T_0}^{\gamma} {P_0}^{1-\gamma} = T^{\gamma} P^{1-\gamma}$

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)(M_a)^2 + 1$$

$$\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)(M_a)^2 + 1$$

$$\frac{P_0}{P} = \left[\left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)(M_a)^2 + 1\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + O(x^4)$$

$$x = \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)(M_a)^2 \text{ et } n = \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

$$\frac{P_0}{P} = 1 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)(M_a)^2\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - 1\right)\left[\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)(M_a)^2\right]^2 + O\left({M_a}^6\right)$$

$$\frac{P_0}{P} = 1 + \frac{\gamma}{2}(M_a)^2 + \frac{\gamma}{8}(M_a)^4 + O\left({M_a}^6\right)$$

$$P_0 = P + \frac{\gamma}{2}P(M_a)^2 + \frac{\gamma}{8}P(M_a)^4 + P\left[O\left({M_a}^6\right)\right]$$

$$P_0 - P = \frac{\gamma}{2}P(M_a)^2 + \frac{\gamma}{8}P(M_a)^4 + P\left[O\left({M_a}^6\right)\right]$$

$$P_0 - P = \frac{\gamma}{2}P(M_a)^2\left[1 + \frac{(M_a)^2}{4} + O\left({M_a}^4\right)\right]$$

$$\text{Or } \frac{\gamma}{2}P(M_a)^2 = \frac{\gamma}{2}P\left(\frac{v}{a}\right)^2$$

et

$$a = \sqrt{\gamma\frac{RT}{M}} \Rightarrow a^2 = \gamma\frac{RT}{M}$$

$$\frac{\gamma}{2}P\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{\gamma}{2}P\frac{v^2}{\gamma\frac{RT}{M}} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{PM}{RT}\right)}_{\substack{masse\ volumique \\ d'un gaz\ parfait}} v^2 = \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$P_0 - P = \frac{1}{2}\rho v^2\left[1 + \frac{(M_a)^2}{4} + O\left({M_a}^4\right)\right]$$

L’équation de Bernoulli se présente donc comme un développement au premier ordre de l’équation de BSV.

2.3. Théorème d’Hugoniot

Considérons l’écoulement d’un fluide parfait dans une tuyère. L’équation de Navier-Stokes s’écrit (sans force de viscosité ; fluide parfait)

$$\rho.\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\left(\overrightarrow{grad}P\right) + \rho.\vec{g}$$

avec $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ est la dérivée particulaire de la vitesse (l’accélération) donnée par;

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\substack{=0 \\ permanent}} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}(v^2)$$

$$\rho.\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}(v^2) = -\left(\overrightarrow{grad}P\right) + \rho.\vec{g}$$

$$\overrightarrow{grad}P = \rho.\left(\vec{g} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}(v^2)\right)$$

L'écoulement est considéré unidirectionnel;

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\rho}{2}\frac{dv^2}{dx}$$

$$dP = -\rho v dv$$

$$\frac{dP}{\rho} = -v dv$$

Nous avons déjà montré que;

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho}$$

$$\Rightarrow dP = a^2 d\rho$$

$$a^2\frac{d\rho}{\rho} = -v dv$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v^2}{a^2}\frac{dv}{v} = -(M_a)^2\frac{dv}{v}$$

L'équation de la conservation de la masse (ou conservation du débit massique) entre deux points de la tuyère s'écrit:

$$q_m = Cst \Rightarrow \rho v S = Cst$$

$$dq_m = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} - \frac{dS}{S}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} - \frac{dS}{S} = -(M_a)^2\frac{dv}{v}$$

$$-\frac{dS}{S} = [1 - (M_a)^2]\frac{dv}{v}$$

Cette relation est appelée relation d'Hugoniot.

- Si l'écoulement est subsonique $M_a < 1$, alors $v$et Ssont inversement proportionnelles dans un tube de courant.

- Si l'écoulement est supersonique $M_a > 1$, alors $1 - (M_a)^2 < 0$, ainsi v et Ssont proportionnelles dans un tube de courant.
- La vitesse d'écoulement du gaz est égale la vitesse du son dans le fluide $M_a = 1$ qu'en une section de la canalisation est minimale $\frac{dS}{S} = 0$