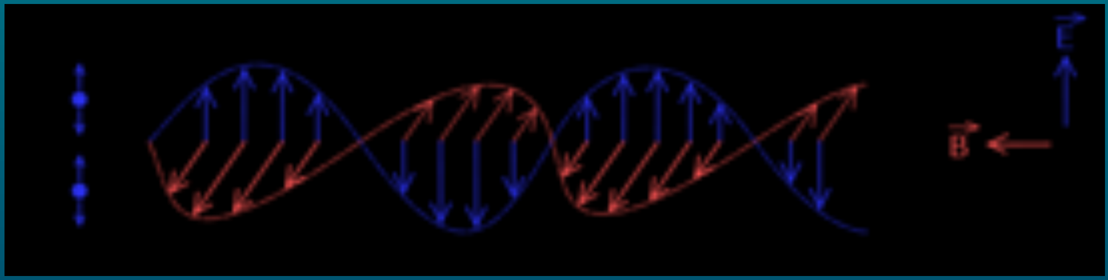
MINISTÉRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

École Préparatoire des Sciences et Techniques -Tlemcen

Rappels de Cours
Et Travaux Dirigés de Physique 4 :
Propagation des Ondes Électromagnétiques



Sidi Mohammed MESLI, Rafik BENALLAL

Avant-propos

Cet ouvrage ne constitue pas un premier contact avec l'électromagnétisme, il s'adresse aux étudiants de seconde année des classes préparatoires des Sciences et Techniques, il respecte le programme " Propagation des ondes électromagnétiques" en vue de préparer le concours des grandes écoles d'ingénieurs.

Ce polycopié fournit à l'étudiant un résumé de cours et des exercices corrigés, dispensés à l'école préparatoire EPST Tlemcen depuis 2012, destinés à l'acquisition de méthodes de résolution fondamentales en électromagnétisme.

L'électromagnétisme, même dans le cadre le plus restreint du programme, est un domaine vaste. Dans ce document, il n'a, bien sûr, pas été possible d'être exhaustif, toutefois un large éventail d'exercices est présenté, mettant en oeuvre des méthodes de résolution importantes ou classiques.

Enfin nous tenons à signaler que nous ne négligerons pas les remarques ni les commentaires signalant des erreurs éventuelles, quelles soient de fond ou d'écritures.

Sommaire

Analyse vectorielle

1

1 Rappels préliminaires

1.1 Champ scalaire, Champ vectoriel

L'espace étant rapporté à la base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. M un point de l' espace, de coordonneés (x, y, z). Le vecteur position qui défini le point M dans cette base est :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.1}$$

On définit ainsi le vecteur déplacement $d\vec{OM}$ par :

$$d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \tag{1.2}$$

La fonction $f(M)$ est dite fonction scalaire de point ou champ scalaire si :

$$f(M) = f(x, y, z) \tag{1.3}$$

Le vecteur $v(M)$ est dit fonction vectorielle de point ou champ vectoriel si :

$$\vec{v}(M) = v_x(x, y, z)\vec{i} + v_y(x, y, z)\vec{j} + v_z(x, y, z)\vec{k} \tag{1.4}$$

1.2 Opérateur nabla $(\vec{\nabla})$

Il s'agit d'un vecteur symbolique et dont l'expression est en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \tag{1.5}$$

1.3 Le Gradient ($\vec{grad}$)

Celui-ci s'applique uniquement à des fonctions scalaire. Le gradient de $f(M) = f(x,y,z)$ est défini par les dérivées partielles par rapport à x, y et z de la fonction $f(M)$ dans la base considérée.

On peut écrire dans le système cartésien :

$$\vec{grad}(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \tag{1.6}$$

1.4 La Divergence (div)

La divergence n'est définie qu'à partir d'une fonction vectorielle $\vec{v}(M)$ de point et donne une fonction scalaire de point définie, en coordonnées cartésiennes par :

$$div(\vec{v}) = \vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1.7}$$

1.5 Le Rotationnel ($\vec{rot}$)

Il s'agit d'un vecteur attaché à un champ de vecteurs et qui a pour expression en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = [\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}]\vec{i} + [\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}]\vec{j} + [\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}]\vec{k} \tag{1.8}$$

1.6 Laplacien scalaire

Le laplacien scalaire (Δ) d'une fonction scalaire de point (f) est par définition un champ scalaire défini par :

$$\Delta f = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f) = div[\vec{grad}(f)] \tag{1.9}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.10}$$

1.7 Laplacien vectoriel

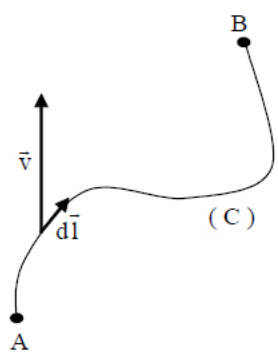
Le laplacien vectoriel ($\vec{\Delta}$) d'un champ vectoriel $\vec{v}$ est un champ vectoriel défini par :

$$\vec{\Delta}\vec{v} = \vec{grad}[div(\vec{v})] - \vec{rot}[\vec{rot}(\vec{v})] \tag{1.11}$$

$$\vec{\Delta}\begin{cases} \Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \Delta v_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \Delta v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{cases} \tag{1.12}$$

1.8 Théorèmes de Stokes et de Gauss

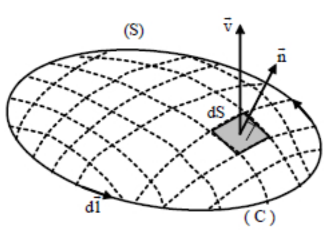
1.8.1 Circulation d'un champ vectoriel



On définit la circulation d'un vecteur $\vec{v}$ le long d'un contour (C) par l'intégrale curviligne :

$$C_{\vec{AB}}(\vec{v}) = \int_{\vec{AB}} \vec{v}.\vec{dl} \tag{1.13}$$

1.8.2 Flux d'un champ vectoriel



On définit le flux d'un vecteur $\vec{v}$ à travers une surface (S) par l'intégrale double :

$$\phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v}\vec{n}ds \tag{1.14}$$

1.8.3 Théorèmes

Théorème de Stockes

Soit un contour orienté et fermé (C), et soit une surface (S) s'appuyant sur ce contour. La circulation d'un vecteur $\vec{v}$ le long de ce contour est égal au flux de son rotationnel à travers cette surface.

$$C_{\vec{AB}}(\vec{v}) = \oint_{\vec{AB}} \vec{v}\vec{dl} = \iint_{S} \vec{rot}(\vec{v}).\vec{n}.ds \qquad (1.15)$$

$\vec{ds} = ds.\vec{n}$ ($\vec{ds}$ représente la différentielle de la surface orientée qui s'appuie sur (C))

Théorème de Gauss-Ostrogradski (Théorème de la divergence)

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale de sa divergence dans le volume $(\tau\ )$ limité par la surface fermée (S) :

$$\phi_S(\vec{v}) = \oiint_{S} (\vec{v}).\vec{n}.ds = \iiint_{\tau} div(\vec{v}).d\tau \qquad (1.16)$$

2 Exercices

1

Corr. p. 13

Soit la fonction scalaire $f(x,y,z)$ donnée par :

$$f(x,y,z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$$

On pose $\vec{A} = \overrightarrow{grad} f$ et $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$. Déterminer $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

2

Corr. p. 13

Soit deux points M et P de coordonnées respectives $M(x,y,z)$ et $P(x_p,y_p,z_p)$. Calculer ;

a. $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ et $r = \| \overrightarrow{PM} \|$;

b. $\vec{\nabla}(\frac{1}{r})$;

c. $\vec{\nabla} \times (\frac{\vec{r}}{r^3})$;

d. $\vec{\nabla}.(\frac{\vec{r}}{r^3})$;

au voisinage du point M

3

Corr. p. 14

Déterminer la fonction f telle que

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f$$

On donne

$$\vec{F}(x,y) = (3 + 2xy)\vec{i} + (x^2 - 3y^2)\vec{j}$$

4

Corr. p. 15

Les champs vectoriels suivants sont-ils conservatifs ?

a. $\vec{F}(x,y) = (x-y)\vec{i} + (x-2)\vec{j}$

b. $\vec{F}(x,y) = (3+2xy)\vec{i} + (x^2-3y^2)\vec{j}$

5

Corr. p. 15

Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs du plan défini par $\vec{V}(M) = \frac{\vec{OM}}{OM}$

a. Calculer $div\vec{V}(M)$

b. Le champ de vecteurs $(\vec{V})$ dérive-t-il d'un potentiel ?

6

Corr. p. 16

Montrer que la circulation d'un vecteur gradient le long d'un contour fermé est nul.

7

Corr. p. 16

Calculer la circulation des vecteurs,

$$\vec{V_1} = y\vec{i} + 3x\vec{j}$$

et

$$\vec{V_2} = (3+2xy)\vec{i} + (x^2-3y^2)\vec{j}$$

entre les points A(-2,4) et B(2,4).

a. En suivant la droite [AB]

b. En suivant la parabole $y = x^2$

c. Que peut-on conclure ?

8

Corr. p. 19

L'espace 3D est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On définit $\vec{V}$ le champ de vecteur qui associe, au point M de coordonnées $(x;y;z)$, le vecteur $\vec{V}(M)$:

$$\vec{V}(M) = -y\vec{i} + (x+1)\vec{j} + z\vec{k}$$

. On définit ainsi les trois points de l'espace : A, H, C de coordonnées respectivement $(1\,;3\,;0)$, $(1\,;0\,;0)$ et $(0\,;0\,;4)$.

a. $\vec{V}$ dérive-t-il d'un potentiel ?

b. Calculer la circulation $C_1(\vec{V})$du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du segment OA parcouru de O vers A.

c. Calculer la circulation $C_2(\vec{V})$du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du segment OH parcouru de O vers H.

d. Calculer la circulation $C_3(\vec{V})$du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du segment HA parcouru de H vers A.

e. Déterminer la circulation $C_{(OHAO)}(\vec{V})$du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du circuit fermé OHAO.

f. On considère la pyramide de base OAH et de hauteur OC. Calculer le flux total $\phi_{(pyramide)}(\vec{V})$ du champ de vecteur $\vec{V}$ sortant des quatre surfaces triangulaires bord de la pyramide.

g. Calculer le flux $\phi_{(AHC)}(\vec{V})$ du champ de vecteur $\vec{V}$ à travers le triangle AHC situé dans le plan d'équation $4x + z = 4$ et de normale orientée vers l'extérieure de la pyramide.

3 Corrigé

1

$$f(x,y,z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$$

Et $\vec{A} = \vec{grad} f = \vec{\nabla} f$

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\ \vec{A} &= (y^2 + 2zx)\vec{i} + (z^2 + 2xy)\vec{j} + (x^2 + 2yz)\vec{k} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Et $\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= r\vec{o}t\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{B} &= (2z - 2z)\vec{i} + (2x - 2x)\vec{j} + (2y - 2y)\vec{k} = \vec{0} \end{aligned} \tag{1.18}$$

Donc $\vec{A}$ représente un gradient

2

a.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x - x_p)\vec{i} + (y - y_p)\vec{j} + (z - z_p)\vec{k} \\ r &= \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\frac{1}{r}) &= -\frac{(x-x_p)\vec{i}+(y-y_p)\vec{j}+(z-z_p)\vec{k}}{\sqrt{(x-x_p)^2+(y-y_p)^2+(z-z_p)^2}^{\,3}}\\ &= -\frac{\vec{r}}{r^3}\end{aligned}$$

c. En tenant compte du résultat précédent et sachant que le rotationnel d'un gradient est nul, on obtient :

$$\vec{\nabla}\times(\frac{\vec{r}}{r^3})=\vec{0}$$

d.

$$\vec{\nabla}.(\frac{\vec{r}}{r^3})=0$$

3

$$\begin{aligned}\vec{F}(x,y) &= (3+2xy)\vec{i}+(x^2-3y^2)\vec{j}\\ \vec{F} &= \vec{\nabla}f=(3+2xy)\vec{i}+(x^2-3y^2)\vec{j}=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3+2xy &= \frac{\partial f}{\partial x}\\ \Longrightarrow f &= \int(3+2xy)dx\\ &= 3x+x^2y+C(x,y)\\ x^2-3y^2 &= \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial[3x+x^2y+C(x,y)]}{\partial y}\\ \Longrightarrow C(x,y) &= \int(-3y^2)dy=-y^3\end{aligned}$$

Donc $f(x,y) = x^2y - y^3 + 3x$

4

Pour qu'un champ vectoriel soit conservatif, il faut qu'il représente un gradient, donc son rotationnel est nul :

a.

$$\vec{rot}\vec{F}_1(x,y) = 2\vec{k}$$

b.

$$\vec{rot}\vec{F}_2(x,y) = \vec{0}$$

Donc le champ $\vec{F}_2(x,y)$ est conservatif.

5

a.

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ OM &= \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\vec{OM}}{OM} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$$

Donc

$$\begin{aligned} div\vec{V}(M) &= \vec{\nabla}.\vec{V}(M) \\ &= \frac{\partial(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})}{\partial y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{OM} \end{aligned}$$

b. $\vec{V}$ dérive du potentiel $P(M) = \sqrt{x^2+y^2} = OM$

6

Soit $\vec{V} = \vec{grad} f(x,y,z)$, la circulation de $\vec{V}$ le long d'un contour fermé s'écrit :

$$\begin{aligned} C(\vec{V}) &= \oint_A^A \vec{V}.\vec{dl} \\ &= \oint_A^A \vec{grad} f(x,y,z)dl \\ &= \oint_A^A (\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}).(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) \\ &= \oint_A^A \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\ &= \oint_A^A df = f(A) - f(A) = 0 \end{aligned}$$

7

a. Calcul de la circulation de $\vec{V_1} = y\vec{i} + 3x\vec{j}$ suivant la droite [AB]

$$\begin{aligned}
C_{\vec{AB}}(\vec{V_1}) &= \int_{\vec{AB}} \vec{V_1}.\vec{dl} \\
&= \int_{\vec{AB}} (y\vec{i} + 3x\vec{j})(dx\vec{i} + dy\vec{j}) \\
&= \int_{\vec{AB}} ydx + 3xdy \\
&= \int_{-2}^{2} 4dx = 16
\end{aligned}$$

car $y = 4$, donc $dy = 0$ et x varie de -2 à 2

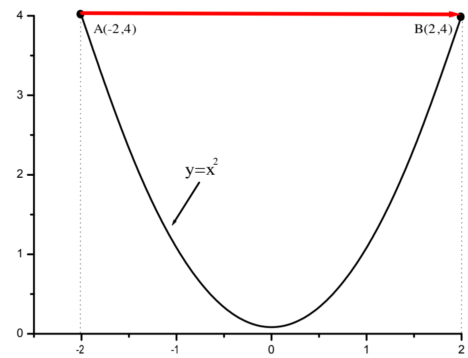
Calcul de la circulation de $\vec{V_2} = (3+2xy)\vec{i} + (x^2 - 3y^2)\vec{j}$ suivant la droite [AB]

$$\begin{aligned}
C_{\vec{AB}}(\vec{V_2}) &= \int_{\vec{AB}} \vec{V_2}.\vec{dl} \\
&= \int_{\vec{AB}} [(3+2xy)\vec{i} + (x^2 - 3y^2)\vec{j}](dx\vec{i} + dy\vec{j}) \\
&= \int_{\vec{AB}} (3+2xy)dx + (x^2 - 3y^2)dy \\
&= \int_{-2}^{2} (3+8x)dx = 12
\end{aligned}$$

car $y = 4$, donc $dy = 0$ et x varie de -2 à 2.

b. Calcul de la circulation de $\vec{V_1} = y\vec{i} + 3x\vec{j}$ suivant la parabole $y = x^2$

$$\begin{aligned} C_{\breve{AB}}(\vec{V}_1) &= \int_{\breve{AB}} \vec{V}_1.\vec{dl} \\ &= \int_{\breve{AB}} (y\vec{i}+3x\vec{j})(dx\vec{i}+dy\vec{j}) \\ &= \int_{\breve{AB}} ydx+3xdy \\ &= \int_{-2}^{2} 7x^2dx = \frac{112}{3} \end{aligned}$$



car $y = x^2$, donc $dy = 2xdx$ et x varie de -2 à 2 .

- Calcul de la circulation de $\vec{V}_2 = (3+2xy)\vec{i}+(x^2-3y^2)\vec{j}$ suivant la parabole $y = x^2$

$$\begin{aligned} C_{\breve{AB}}(\vec{V}_2) &= \int_{\breve{AB}} \vec{V}_2.\vec{dl} \\ &= \int_{\breve{AB}} [(3+2xy)\vec{i}+(x^2-3y^2)\vec{j}](dx\vec{i}+dy\vec{j}) \\ &= \int_{\breve{AB}} (3+2xy)dx+(x^2-3y^2)dy \\ &= \int_{-2}^{2} (-6x^5+4x^3+3)dx = 12 \end{aligned}$$

car $y = x^2$, donc $dy = 2xdx$ et x varie de -2 à 2.

c. Conclusions

- On remarque que : $C_{\breve{AB}}(\vec{V}_1) \neq C_{\vec{AB}}(\vec{V}_1)$, donc la circulation de $\vec{V}_1$ dépend du chemin suivit
- Par contre : $C_{\breve{AB}}(\vec{V}_2) = C_{\vec{AB}}(\vec{V}_2)$, donc la circulation de $\vec{V}_2$ ne dépend pas

du chemin suivit
- On peut montrer que $\vec{V}_2$ représente un gradient ($\vec{rot}\vec{V}_2 = 0$) alors que $\vec{V}_1$ ne l'est pas.

8

a.

$$\begin{aligned}\vec{rot}(\vec{V}) &= (\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y})\vec{k} \\ &= 2\vec{k}\end{aligned}$$

Donc le champ de vecteur $\vec{V}$ ne dérive pas d'un potentiel.

b. Pour le calcul de la circulation $C_1(\vec{V})$du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du segment OA parcouru de O vers A, on a $z = 0$, $d\vec{l}_1 = dx\vec{i} + dy\vec{j}$:

$$\begin{aligned}C_1(\vec{V}) &= \int \vec{V} d\vec{l}_1 \\ &= \int (-y\vec{i} + (x+1)\vec{j}).(dx\vec{i} + dy\vec{j}) \\ &= \int_0^1 3dx \\ &= 3\end{aligned}$$

Car dans la droite OA, $y = 3x$, $dy = 3dx$ et x varie de 0 à 1.

c. Pour le Calcul de la circulation $C_2(\vec{V})$du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du segment OH parcouru de O vers H, on a $y = 0$; $dy = 0$; $z = 0$ et $d\vec{l}_2 = dx\vec{i}$:

$$\begin{aligned}C_2(\vec{V}) &= \int \vec{V} d\vec{l}_2 \\ &= \int (-y\vec{i} + (x+1)\vec{j}).dx\vec{i} \\ &= \int_0^1 -ydx = 0\end{aligned}$$

d. Pour le Calcul de la circulation $C_3(\vec{V})$du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du segment HA parcouru de H vers A, on a $x = 1$; $z = 0$; y varie de 0 à 3 et $\vec{dl}_3 = dy\vec{j}$:

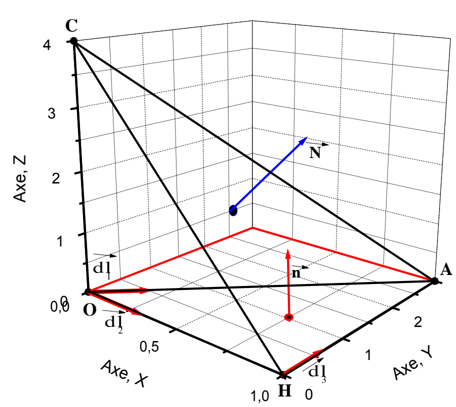
$$\begin{aligned} C_3(\vec{V}) &= \int \vec{V}\vec{dl}_3 \\ &= \int (-y\vec{i} + (x+1)\vec{j}).dy\vec{j} \\ &= \int_0^3 (x+1)dy \\ &= \int_0^3 2dy \\ &= 6 \end{aligned}$$

e. - Pour la détermination de la circulation $C_{(OHAO)}(\vec{V})$du champ de vecteur $\vec{V}$ le long du circuit fermé OHAO, on se base sur $C_1(\vec{V})$, $C_2(\vec{V})$ et $C_3(\vec{V})$ de sorte que :

$$\begin{aligned} C_{OHAO}(\vec{V}) &= C_2(\vec{V}) + C_3(\vec{V}) - C_1(V) \\ &= 0 + 6 - 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

le signe (-) de $C_1(\vec{V})$ vient du sens de la circulation
- On peut aussi déterminer la circulation $C_{(OHAO)}(\vec{V})$ par le théoreme de stokes.

$$\begin{aligned} C_{(OHAO)}(\vec{V}) &= \int \vec{V}\vec{dl} = \int\int_{OHAO} \vec{rot}(\vec{V}).\vec{n}.ds \\ &= 2\vec{k}.s.\vec{n} \\ &= 2\vec{k}.s.\vec{k} \\ &= 2(3/2) = 3 \end{aligned}$$



$s = 3/2$: est la surface du triangle OHA, $\vec{n} = \vec{k}$: est la normale à cette surface.

f. Pour le calcul du flux total $\phi_{(pyramide)}(\vec{V})$ du champ de vecteur $\vec{V}$ sortant des quatre surfaces triangulaires bord de la pyramide, on utilise la formule d'Ostrogradski :

$$\begin{aligned}\phi_S(V) = \iint_S (\vec{V}).\vec{n}.ds &= \iiint_\tau div(\vec{V}).d\tau \\ &= \iiint_\tau div(\vec{V}).dxdydz \\ &= 1.\tau \\ &= 2\end{aligned}$$

Avec

$$\tau = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}.4$$

τ=(1/3) $\times Base \times Hauteur$ est le volume de la pyramide,
et $div(\vec{V}) = 1$
Donc le flux sortant est le volume de la pyramide.

g. Pour la détermination du flux $\phi_{(AHC)}(\vec{V})$ du champ de vecteur $\vec{V}$ à travers le triangle AHC situé dans le plan d'équation $4x + z = 4$, on utilise :

$$\phi_{(AHC)}(V) = \iint_S (\vec{V}).\vec{N}.ds$$

-Par définition, si on a un plan de la forme générale ($ax+by+cz = d$), le vecteur normale à ce plan est

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc dans notre cas

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} -y \\ x+1 \\ 4-4x \end{pmatrix}$$

car $z = 4 - 4x$ suivant le plan $4x + z = 4$.

$$\begin{aligned}
\phi_{(AHC)}(\vec{V}) &= \iint_S (\vec{V}).\vec{N}.ds \\
&= \iint_S (-y\vec{i} + (x+1)\vec{j} + (4-4x)\vec{k}).(4\vec{i} + 1\vec{k}).dxdy \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=3x} (4 - 4x - 4y)dydx \\
&= -4
\end{aligned}$$

car le domaine d'intégration est le triangle OHA (projection de AHC)

Ondes Électromagnétiques progressives planes

2

1 Abrégé de Cours

1.1 Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell expriment le comportement spatio-temporel du champ électromagnétique en relation avec les sources qui lui ont donné vie. Ces équations, dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, s'écrivent sous deux formes ; la forme locale et la forme intégrale.

Équations de Maxwell	Forme locale	Forme intégrale
Théorème de Gauss	$div(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0$	$\oiint_s \vec{E}.d\vec{s} = Q_{int}/\varepsilon_0$
Équation du Flux magnétique	$div(\vec{B}) = 0$	$\oiint_s \vec{B}.d\vec{s} = 0$
Équation de Maxwell-Faraday	$\overrightarrow{rot}\,(\vec{E}) = -\partial\vec{B}/\partial t$	$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = -d\phi_B/dt$
Équation de Maxwell-Ampere	$\overrightarrow{rot}\,(\vec{B}) = \mu_0.(\vec{j} + \varepsilon_0.\partial\vec{E}/\partial t)$	$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0.(i_C + \varepsilon_0.d\phi_E/dt)$

Les opérateurs divergence et rotationnel sont des opérateurs de dérivation par rapport aux variables d'espace, définis dans le chapitre précédent. Ce système d'équations couplées lie les dérivées spatiales et temporelles des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à leurs sources.

* L'équation de Maxwell-Gauss exprime les lignes de champ divergeant à partir de sources ponctuelles (charges électriques).

* L'équation du Flux magnétique exprime la conservation à travers toute la surface, les lignes de champ magnétique ne peuvent pas diverger à partir de sources ponctuelles (il n'existe pas de monopoles magnétique).

* L'équation de Maxwell-Faraday exprime la variation dans le temps d'un champ magnétique donnant naissance à un champ électrique.

* L'équation Maxwell-Ampère nous informe sur la création d'un champ magnétique suite à une variation temporelle du champ électrique.

1.1.1 Les constantes

Dans ces équations, il apparait deux constantes caractéristiques du vide.

-La permittivité du vide. ϵ_0
C'est une grandeur constante qui caractérise électriquement le vide.

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36.\pi.10^9} \; s.i$$

-La perméabilté du vide. μ_0
Elle caractérise le vide d'un point de vue magnétique.

$$\mu_0 = 4\pi.10-7 \; s.i$$

L'inverse de ce produit est égal au carré de la vitesse de la lumière.

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

$c \simeq 3.10^8$ m/s

1.2 Propagation des OPPM dans le vide

La notion d'onde électromagnétique progressive plane monochromatique (OPPM) est centrale dans l'étude de la propagation des O.E.M, étant donné que toutes ondes, sans être planes, sont localement planes ; dans le cas de sources à l'infini.

1.2.1 Plan d'onde et vecteur de propagation

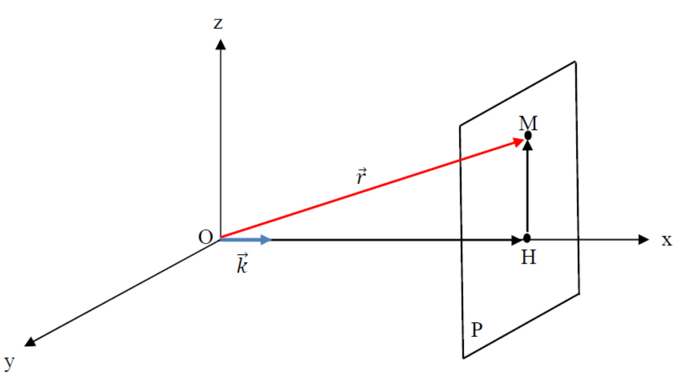
Soit (P) un plan d'onde perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde électromagnétique (Ox).
(M) un point quelconque appartenant au plan d'onde et (H) le point situé sur le plan d'onde et sur l'axe des (x)

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$$

On aura donc :

$$\vec{k}\vec{r} = \vec{k}(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{k}.\overrightarrow{OH} = k.x$$

Le vecteur de propagation $\vec{k}$ est toujours perpendiculaire à tous les vecteurs du plan (P) ; Cela implique que $\vec{k}.\ \overrightarrow{HM} = 0$.

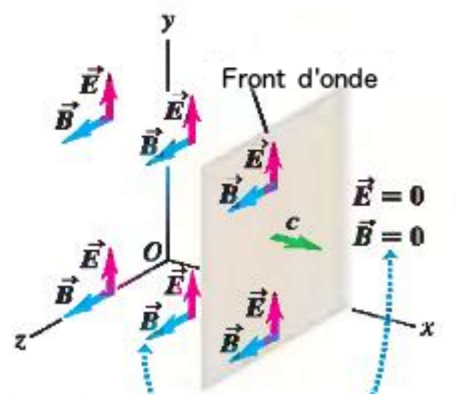


Donc tous les points du plan ont le même état vibratoire.

1.2.2 Onde plane progressive monochromatique

L'onde plane a, à toute instant, ses champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ perpendiculaires à la direction de sa propagation. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ traversent des régions libres de tous champs avec une vitesse définie, c.

Dans cette figure, l'onde se propage suivant x, le plan (YZ) sépare la région $E = B = 0$ et la région où il y a propagation des o.e.m et donc présence de champs électrique et magnétique. Ce plan est appelé "front d'onde".



Les champs sont mathématiquement représentés comme suite :

$$\vec{E} = E_0 \ cos(k.x - \omega.t)\hat{e_y}$$

$$\vec{B} = B_0 \ cos(k.x - \omega.t)\hat{e_z}$$

Leurs notations complexes sont ;

$$\vec{E} = E_0 \ e^{i(k.x-\omega.t)}\hat{e_y}$$

$$\vec{B} = B_0 \ e^{i(k.x-\omega.t)}\hat{e_z}$$

Propriétés de l'onde plane progressive

→ $\vec{k}$ est le vecteur d'onde. Il nous renseigne sur la direction de la propagation. $k = 2\pi/\lambda$ est le module d'onde (rad/m).

→ λ est la longueur d'onde de l'onde (m).

→ ω la pulsation, $\omega = 2\pi.f$ et particulièrement dans le vide $\omega = k.c$ (rad/s).

→ Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en phase, i.e ils ont leurs maximums et minimums aux mêmes points de l'espace et temps.

→ Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires et forment un triédre. $i.\vec{k} \times \vec{E} = i\omega\vec{B}$.

→ Le champ électrique $\vec{E}$ est transverse électrique à la direction de propagation si $i.\vec{k}.\vec{E} = 0$,
et le champ magnétique $\vec{B}$ est toujours transverse magnétique à la direction de propagation de l'O.E.M car $i.\vec{k}.\vec{B} = 0$

Définition : Relation de dispersion

Cette relation est obtenue à partir de

$$\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,(\vec{E})) = \overrightarrow{grad}\,(div(\vec{E})) - \vec{\Delta}\vec{E}$$

Elle nous permet de connaître les conditions de propagation. Dans le vide ($div\vec{E} = 0$), on obtient :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Il en découle

$$k^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}(-\omega^2)\vec{E} = 0$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

2 Exercices

1 Équations de Maxwell

Corr. p. 34

Soit une OEM plane se propageant dans le vide suivant la direction $+x$, montrer en utilisant la loi de Gauss que les composantes E_x et B_x sont nulles et que les champs sont transversaux à la propagation.

2 Équations de Maxwell

Corr. p. 34

Montrer que le champ magnétique $B_z(x,t)$, d'une onde électromagnétique plane se propageant suivant la direction $+x$, doit satisfaire la relation suivante :

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}$$

3 Équations de Maxwell

Corr. p. 36

Considérons un champ électrique d'une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide définit sous la forme suivante :

$$\vec{E} = \vec{E_0} e^{j(wt - \vec{k}\vec{r})}$$

1. Ecrire les équations de Maxwell
2. Vérifier que : $\vec{\nabla}\vec{E} = -j\vec{k}\vec{E}$ et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = jw\vec{E}$
3. En tenant compte des identités précédentes, réécrire les équations de Maxwell.

4 Équations de Maxwell

Corr. p. 38

Soit une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide, caractérisée par :

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\alpha t - \beta x)} \vec{z}$$

1. Écrire les équations de Maxwell. Que signifient ces équations ?
2. Calculer respectivement : $div\vec{E}$, $\vec{rot}\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{rot}\vec{B}$
3. Déterminer la relation entre α et β
4. Sur un schéma simple, représenter $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ainsi que leur sens de propagation.

5 Équations de Maxwell

Corr. p. 40

Soit une onde progressive monochromatique de pulsation ω, qui se propage dans un milieu matériel non chargé et non magnétique. Sous l'action du champ électrique de l'onde, les charges liées du milieu sont animées de petits mouvements : on admet que le milieu se comporte comme le vide muni d'une densité volumique du courant $\vec{j}$ parallèle à $\vec{E}$

1. Écrire les équations de Maxwell.
2. Calculer $\vec{rot}(\vec{rot}\vec{E})$.
3. On suppose que le milieu est linéaire de sorte que : $\vec{j} = \frac{\partial}{\partial t}(\alpha \vec{E})$ (α constant). On cherche $\vec{E}$ sous la forme $\vec{E} = E(x,t)\hat{e}_z$
   a. Écrire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $E(x,t)$.
   b. Chercher une solution de cette équation représentant une O.P.P.M. de pulsation ω se propageant vers les x positifs, et trouver une relation entre k et ω (relation de dispersion).

EXERCICES

6 Direction de propagation

Corr. p. 41

Quelle est la direction de propagation de l'onde électromagnétique pour chacun des cas suivants : (a). $\overrightarrow{E} = E\hat{e_x}$, $\overrightarrow{B} = -B\hat{e_y}$; (b). $\overrightarrow{E} = E\hat{e_y}$, $\overrightarrow{B} = B\hat{e_x}$; (c). $\overrightarrow{E} = -E\hat{e_z}$, $\overrightarrow{B} = -B\hat{e_x}$; (d). $\overrightarrow{E} = E\hat{e_x}$, $\overrightarrow{B} = -B\hat{e_z}$

7 Propagation d'une OEM dans le vide

Corr. p. 42

Soit une onde électromagnétique sinusoidale plane de fréquence $f = 40\ MHz$ qui se propage dans le vide suivant la direction $+x$. L'amplitude maximale du champ électrique est égale à $750\ V/m$ et a comme direction l'axe $+y$.

(a) Trouver sa longueur d'onde et sa période.
(b) Calculer l'amplitude du champ magnétique et sa direction.
(c) Donner l'expression des deux champs en fonction de x et de t.

8 Propagation d'une OEM dans le vide

Corr. p. 42

Une OEM de longueur d'onde $435\ nm$ traverse le vide suivant la direction $-z$. Le champ électrique a comme amplitude $2,70.10^{-3}\ V/m$ et est parallèle à l'axe des x. Trouver la fréquence et l'amplitude du champ magnétique.
Écrire l'expression des vecteurs $\overrightarrow{E}(z,t)$ et $\overrightarrow{B}(z,t)$.

9 Propagation d'une OEM dans le vide

Corr. p. 43

Un laser de dioxyde de carbone émet une onde électromagnétique plane sinusoidale qui se propage dans le vide en direction de $-x$. La longueur d'onde est $10,6\ \mu m$ et la direction du champ électrique est suivant l'axe $+z$, avec comme amplitude maximale $1,5\ MV/m$.
Trouver l'expression des deux vecteurs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ en fonction de la position et du temps.

10 Propagation d'une OEM

Corr. p. 44

Le champ électrique d'une onde plane électromagnétique sinusoidale obéit à l'équation suivante :

$$E = -375.\ sin(5,97.10^{15}.t + 1,99.10^{7}.x)$$

1. Quelles sont les amplitudes des champs électrique et magnétique de cette onde ?
2. Quelles sont ; la fréquence, la longueur d'onde et la période de l'onde ? À quelle partie du spectre électromagnétique appartient-elle ?
3. Quelle est la vitesse de l'onde ?

11 Propagation d'une OEM dans le vide

Corr. p. 44

On considère le vide en l'absence de toute charge et de tout courant.

1. Écrire les équations aux dérivées partielles auquelles obéissent les vecteurs champs électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$.
2. On s'intéresse aux vecteurs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ ne dépendant spatialement que de la coordonnée z, c'est à dire aux ondes planes électromagnétiques.
   (a). Écrire l'équation aux dérivées à laquelle obéit $\overrightarrow{E}$.
   (b). On considère une onde progressive suivant $+z$. Montrer qu'elle est transversale et que $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont orthogonaux.
3. On suppose $\overrightarrow{E}$ de la forme : $\overrightarrow{E} = E_0 cos(\frac{\omega}{c}(z - ct))\hat{e_x}$, trouver le champ magnétique correspondant.
   (a). Quelle relation y-a-t-il entre ε_0, μ_0, E_0 et B_0 ?
   (b). Calculer B_0 et λ pour $E_0 = 10^2\ V/m$ et une fréquence $f = 10^{10}$Hz.

12 Propagation d'une OEM dans le vide

Corr. p. 48

Une onde électromagnétique se propage dans le vide. Son champ magnétique est donné en fonction du temps t et de la position dans un repère cartésien (O, x, y, z) par la formule :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\, cos(\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{1}{2}ky)\vec{u_z}$$

Dans cette expression, E_0 , ω et k sont des constantes, et c représente la vitesse de la lumière.

1. Déterminer la direction de propagation de cette onde.
2. Cette onde est-elle plane ? Que vaut k ?
3. Déterminer le champ électrique associé à cette onde.
4. Montrer que l'onde est transversale.
5. Représenter graphiquement la portée et la direction de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

13 Propagation d'une OEM dans le vide

Corr. p. 51

Une onde électromagnétique plane qui se propage dans le vide est caractérisée par son champ électrique :

$$\vec{E}(x, z, t) = 10^3 sin\pi\left[9.10^{14}t - (3.10^6/2)(\sqrt{3}x + z) + 1/2\right]\vec{u_y}$$

$\vec{u_y}$ est un vecteur unitaire le long de l'axe Oy.

1. Déterminer (a) sa direction de propagation, (b) sa vitesse v , (c) sa longueur d'onde λ , (d) sa fréquence f et (e) son amplitude E_0
2. Quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ correspondant ?

14 Propagation d'une OEM dans un plasma

Corr. p. 52

Un plasma neutre est constitué d'atomes ionisés dans le vide. On note n la densité volumique d'électrons libres ainsi produits. Les ions positifs, beaucoup plus lourds, seront considérés comme immobiles.
On désire propager une onde électromagnétique plane dans ce plasma suivant l'axe (Ox). Le champ électrique est sous la forme suivante :

$$\vec{E} = \vec{E_0}\ exp(kx - \omega t)$$

1. Montrer que la propagation est possible à condition d'avoir une certaine relation entre k et ω que l'on déterminera.
2. Calculer la vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$
3. Calculer la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$
4. Calculer numériquement la fréquence caractéristique apparue dans la question 1 dans le cas de l'ionosphère.

Données :
Charge élémentaire : $e = 1{,}610^{-19}\,C$; Masse de l'électron $m = 9.10^{-31}\,kg$; $n = 10^{12}\,m^{-3}$ pour l'ionosphère.

3 Corrigés

1

Soit une surface gaussienne, une boite rectangulaire, celle-ci ne contenant aucune charge électrique. $Q_{int} = 0 \Rightarrow \int \vec{E}d\vec{s} = 0$ et sachant que $\int \vec{B}d\vec{s} = 0$

$$\int \vec{E}d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int E.ds.cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

de manière analogue

$$\int \vec{B}d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int B.ds.cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

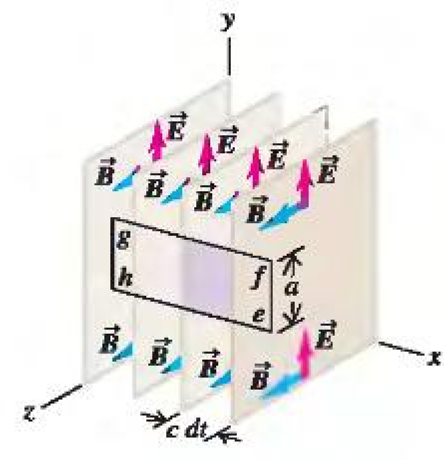
Par conséquent la direction de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ ne peut être que transversale à la direction de propagation.

2

Soient $\vec{E_y}$ et $\vec{B_z}$, le champ électrique et l'induction magnétique, respectivement, qui varient le long de la direction de propagation (Ox). Soient deux plans perpendiculaires à l'axe des x, l'un des plans se trouvant à x et l'autre à $x + \delta x$. Appliquons la loi de Faraday sur le rectangle plan (xy), où gh est suivant le plan situé à x et ef sur le plan situé à $x + \delta x$.

On aura à un instant t, les valeurs de $\vec{E_y}$ sur les deux plans $\vec{E_y}(x,t)$ et $\vec{E_y}(x+\delta x,t)$. La loi de Faraday est :

$$\oint \vec{E}.\vec{dl} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$



$\vec{E}$ et $\vec{dl}$ sont opposés sur le plan situé à x et sont dans la même direction sur le plan situé à $x+\delta x$.
Soit $gh = ef = a$, on aura

$$E_y \int_0^a dl.cos\pi = -E_y.a = -E_y(x,t).a$$

et

$$E_y \int_0^a dl.cos0 = E_y(x+\delta x,t).a$$

Et donc

$$\oint \vec{E}.\vec{dl} = -E_y(x,t).a + E_y(x+\delta x,t).a$$

Sachant que $\Phi_B = \vec{B}(x,t).\vec{S} = B_z.s = B_z.a.\delta x$ avec $a.\delta x$ la surface du rectangle. Donc :

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\partial B_z}{\partial t} a.\delta x$$

On aboutit à :

$$a(E_y(x+\delta x,t) - E_y(x,t)) = -\frac{\partial B_z}{\partial t} a.\delta x$$

Cela revient à écrire, sachant que δx est très petit :

$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t}$$

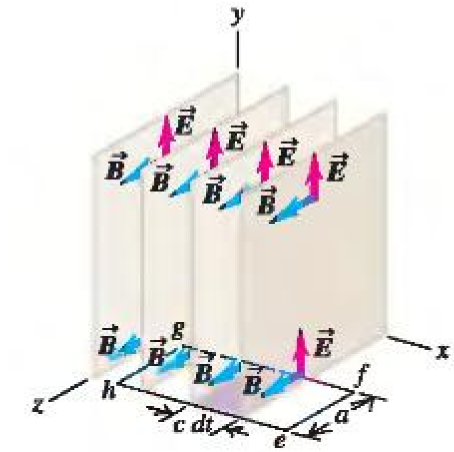
De manière analogue, en appliquant cette fois, la loi d'Ampère et en considérant le plan (xz) :

$$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\oint \vec{B}.d\vec{l} = +B_z(x,t).a - B_z(x+\delta x,t).a$$

$$\Phi_E = E_y.s = E_y(x,t).a.\delta x$$

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} a.\delta x$$



On aura

$$\frac{B_z(x,t) - B_z(x+\delta x,t)}{\delta x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}$$

et donc, on peut écrire :

$$-\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}$$

On multiplie les deux relations obtenues par :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t}\right) \times \frac{\partial}{\partial x} \\ \\ \left(-\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}\right) \times \frac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial t \partial x} \\ \\ -\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x \partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

Et donc :

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}$$

3

1. Les équations de Maxwell dans le vide

$$\begin{cases} \vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{E} = 0 \\ div\vec{B} = 0 \\ \vec{rot}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 1/c^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

2. On montre que $\vec{\nabla} = -j\vec{k}$ et $\frac{\partial}{\partial t} = jw$
Le champ $\vec{E}$ peut s'écrit sous sa forme vectorielle comme suite :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} & e^{j(wt-k_x x-k_y y-k_z z)} \\ E_{0y} & e^{j(wt-k_x x-k_y y-k_z z)} \\ E_{0z} & e^{j(wt-k_x x-k_y y-k_z z)} \end{pmatrix}$$

- Calculons $div\vec{E}$:

$$div\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} & e^{j(wt-k_x x-k_y y-k_z z)} \\ E_{0y} & e^{j(wt-k_x x-k_y y-k_z z)} \\ E_{0z} & e^{j(wt-k_x x-k_y y-k_z z)} \end{pmatrix}$$

$$= \left[E_{0x}(-jk_x) + E_{0y}(-jk_y) + E_{0z}(-jk_z) \right] e^{j(wt-\vec{k}\vec{r})}$$

$$= -j\left(k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z} \right) e^{j(wt-\vec{k}\vec{r})}$$

$= \vec{\nabla}\vec{E} = -j\vec{k}\vec{E}$

Donc : $\vec{\nabla} = -j\vec{k}$

- Calculons $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \begin{pmatrix} jwE_{0x} & e^{j(wt-k_x x-k_y y-k_z z)} \\ jwE_{0y} & e^{j(wt-k_x x-k_y y-k_z z)} \\ jwE_{0z} & e^{j(wt-k_x x-k_y y-k_z z)} \end{pmatrix} = jw\vec{E}$$

Donc : $\frac{\partial}{\partial t} = jw$

3. En tenant compte des identités précédentes, les équations de Maxwell deviennent :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -jw\vec{B} \\ \vec{\nabla}.\vec{E} = -j\vec{k}\vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla}.\vec{B} = -j\vec{k}\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = jw\mu_0\varepsilon_0\vec{E} \end{cases}$$

4

1. Les équations de Maxwell dans le vide :

$r\vec{o}t\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Equation de Maxwell-Faraday
$div\vec{E} = 0$	Equation de Maxwell-Gauss
$div\vec{B} = 0$	Equation de Maxwell- Flux
$r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 1/c^2\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Equation de Maxwell-Ampère

. Équation de Maxwell Faraday : Un champ variable $B(\vec{t})$, engendre un champ électrique à circulation non conservative.
. Équation de Maxwell Gauss : Le caractère non conservatif du flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée contenant des charges.
. Équation de Maxwell- Flux : Le caractère conservatif de $\vec{B}$ à travers n'importe qu'elle surface.
. Équation de Maxwell Ampère : Un champ variable $E(\vec{t})$, engendre un champ magnétique à circulation non conservative.

2. Le calcul de $div\vec{E}$

$$div\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 0 \\ & 0 \\ E_0 & e^{j(\alpha t - \beta x)} \end{pmatrix} = 0$$

- Le calcul de $r\vec{o}t\vec{E}$

$$r\vec{o}t\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} & 0 \\ & 0 \\ E_0 & e^{j(\alpha t - \beta x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 \\ +j\beta E_0 & e^{j(\alpha t - \beta x)} \\ & 0 \end{pmatrix}$$

- Le calcul de $\vec{B}$

$$\vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = -\int \vec{rot}\vec{E}dt = \begin{pmatrix} 0 & \\ -\beta/\alpha E_0 & e^{j(\alpha t-\beta x)} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

- Le calcul de $\vec{rot}\vec{B}$

$$\vec{rot}\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & \\ -\beta/\alpha E_0 & e^{j(\alpha t-\beta x)} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \\ +j\beta^2/\alpha E_0 & e^{j(\alpha t-\beta x)} \end{pmatrix}$$

3. La relation entre α et β. On a $\vec{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t$

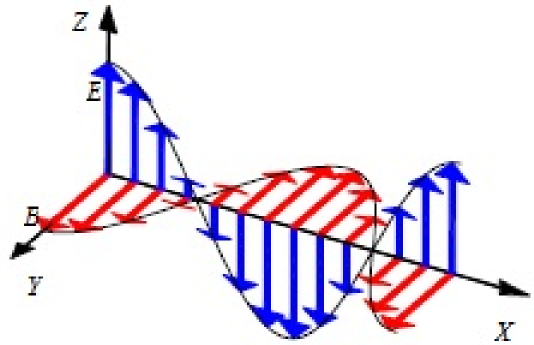
$$\begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \\ +j\beta^2/\alpha E_0 & e^{j(\alpha t-\beta x)} \end{pmatrix} = \mu_0\varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \\ +j\alpha E_0 & e^{j(\alpha t-\beta x)} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\mu_0\epsilon_0\alpha = \beta^2/\alpha$$
$$\Rightarrow \mu_0\varepsilon_0 = \beta^2/\alpha^2$$
$$\beta^2/\alpha^2 = 1/c^2$$
$$\beta/\alpha = 1/c$$

c : représente la vitesse de la lumière

4. $\vec{E}$ est porté suivant l'axe oz, et se propage suivant la direction des x positifs, et $\vec{B}$ est porté suivant l'axe oy, et se propage suivant la même direction.



5

1. Les équations de Maxwell dans un milieu matériel non chargé et non magnétique, et porteur d'une densité volumique de courant $\vec{j}$, sont :

$$\begin{cases} \vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{E} = 0 \\ div\vec{B} = 0 \\ \vec{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{cases} \tag{2.1}$$

2. Sachant que $div\vec{E} = 0$

$$\vec{rot}(\vec{rot}\vec{E}) = -\Delta\vec{E}$$

Et

$$\begin{aligned} \vec{rot}(\vec{rot}\vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{rot}\vec{B}) \\ &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

3. Avec $\vec{j} = \frac{\partial}{\partial t}(\alpha\vec{E})$, l'équation précedente devient :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0(\alpha + \varepsilon_0)\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

a. On obtient :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0(\alpha + \varepsilon_0)\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

b. On cherche une solution (relation de dispersion) de cette équation représentant une O.P.P.M de pulsation ω se propageant vers les x positifs.
Soit :

$$E(x,t) = E_0 cos(\omega t - kx)$$

Alors :

$$k^2 = \omega^2\mu_0(\alpha + \varepsilon_0)$$

$$k = \omega.\sqrt{\mu_0(\alpha + \varepsilon_0)}$$

Et

$$\vec{E}(x,t) = E_0 cos\omega(t - \sqrt{\mu_0(\alpha + \varepsilon_0)}x)\hat{e_z}$$

6

Sachant que le vecteur de propagation $\vec{k}$, nous renseigne sur la direction de propagation et que $\vec{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}$ on a donc

$$\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega}$$

(a)

$$E\hat{e_x}\times(-B\hat{e_y}) = -\frac{k}{\omega}\hat{e_z}$$

La direction est suivant -Z.

(b)

$$E\hat{e_y}\times B\hat{e_x} = -\frac{k}{\omega}\hat{e_z}$$

La direction est suivant -Z.

(c)

$$(-E\hat{e_z}) \times (-B\hat{e_x}) = \frac{k}{\omega}\hat{e_y}$$

La direction est suivant Y.

(d)

$$E\hat{e_x} \times (-B\hat{e_z}) = \frac{k}{\omega}\hat{e_y}$$

La direction est suivant Y.

7

(a) La longueur d'onde est : $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.10^8}{4.10^7} = 7,5\ m$.
Et la période : $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{4.10^7} = 2,5\ 10^{-8} s$

(b) L'amplitude du champ magnétique est : $B_0 = \frac{E_0}{c} = 2,5\ 10^{-6} T$
La direction du champ magnétique est obtenue à partir de : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = B\hat{e_z}$

(c) On aura :

$$\vec{E} = E_0.cos(k.x - \omega t)\hat{e_y} = 750.cos(0,838.x - 2.51.10^8.t)\hat{e_y}$$

Et

$$\vec{B} = B_0.cos(k.x - \omega t)\hat{e_z} = 2,5.10^{-6}.cos(0,838.x - 2,51.10^8.t)\hat{e_z}$$

8

La fréquence est égale à

$$f = c/\lambda = 6,8.10^{14}\ Hz$$

et

$$B_0 = E_0/c = 9.10^{-12}\ T$$

L'écriture des expressions de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ nécessite, au préalable, de connaitre le vecteur d'onde et la pulsation.
$k = 2\pi/\lambda = 1,4.10^7\ rad.m^{-1}$ la propagation est suivant (-z) donc $\vec{k} = -k.\hat{e_z}$ et $\vec{k}.\vec{z} = k.z.cos\pi = -k.z$.

CORRIGÉS EXERCICES ABRÉGÉ

$\omega = 2\pi.f = 4,33.10^{15}\ rad.s^{-1}$
Et finalement sachant que la fonction cosinus est pair, on obtient :

$$\vec{E} = 2,7.10^{-3}.cos(1,4.10^{7}.z + 4,33.10^{15}.t)\hat{e_x}$$

$$\vec{B} = -9.10^{-12}.cos(1,4.10^{7}.z + 4,33.10^{15}.t)\hat{e_y}$$

La direction du champ magnétique est obtenue à partir de :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega} = -B\hat{e_y}$$

9

Le vecteur d'onde est

$$\vec{k} = (2\pi/\lambda)(-\hat{e}_x) = -5,93.10^{5}.\hat{e_x}$$

La pulsation

$$\omega = c.k = 1,78.10^{14}\ rad.s^{-1}$$

L'amplitude du champ magnétique

$$B_0 = E_0/c = 5.10^{-3}\ T$$

Sa direction

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega} = B\hat{e_y}$$

Et finalement on obtient :

$$\vec{E} = 1,5.10^{6}.cos(5,93.10^{5}.x + 1,78.10^{14}.t)\hat{e_z}$$

$$\vec{B} = 5,3.10^{-3}.cos(5,93.10^{5}.x + 1,78.10^{14}.t)\hat{e_y}$$

10

1. $E_0 = 375\ V/m$ et $B_0 = 375/c = 1,25.10^{-6}\ T$
2. Sachant que $k = 1,99.10^7\ rad/m$, alors

$$\lambda = 2\pi/k = 3,16.10^{-7}\ m$$

la pulsation a pour valeur $\omega = 5,97.10^{15}$, la fréquence sera

$$f = \omega/2\pi = 9,5.10^{14}\ Hz$$

et on en déduit la période

$$T = 1/f = 1,05.10^{-15}\ s$$

L'onde appartient au domaine de l'ultraviolet.

3. $\lambda = \frac{v}{f}$ donc

$$v = \lambda.f = 3.10^8\ m/s$$

Cela signifie que l'onde se propage dans le vide.

11

1. Les équations de Maxwell dans le vide sont :

$$\begin{aligned} div\vec{E} &= 0 \\ \overrightarrow{rot}\,\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{rot}\,\vec{B} &= \varepsilon_0\mu_0.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Les équations aux dérivées partielles appelées équation de propagation d'onde sont obtenues à partir de

$$\overrightarrow{rot}.\overrightarrow{rot}.\vec{A} = \overrightarrow{grad}.div.\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

On obtient

$$\Delta\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0.\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Et

$$\Delta\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0.\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

2.(a). $\vec{E}$ ne dépend que de z et de t.
Donc l'équation d'onde se résumera ï¿½ :

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \varepsilon_0\mu_0.\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Et sa décomposition sera :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \varepsilon_0\mu_0.\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\\
\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \varepsilon_0\mu_0.\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\\
\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= \varepsilon_0\mu_0.\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

(b). L'onde se propage dans le vide suivant z, et d'après les équations de Maxwell $div\vec{E} = 0$; Or

$$div\vec{E} = \frac{\partial\vec{E_x}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{E_y}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{E_z}}{\partial z}$$

L'onde se propage suivant z cela implique que

$$\frac{\partial\vec{E_x}}{\partial x} = \frac{\partial\vec{E_y}}{\partial y} = 0$$

On aura

$$div\vec{E} = \frac{\partial\vec{E_z}}{\partial z}$$

et

$$div\vec{E} = 0$$

Donc pour que cela soit vérifié E_z ne doit pas dépendre de z et si $E_z = cste$, cela supposerait une distribution statique de charges, or nous avons un vide. Donc $E_z = 0$.

Pour des raisons analogues, on aura $B_z = 0$, et donc l'onde est transversale magnétique et électrique.

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux si $\vec{E}.\vec{B} = 0$

On a

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cela signifie que

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

Et

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

En posant $u = t - z/c$, on aura

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial u} = -\frac{\partial B_x}{\partial u}$$

Et

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial u} = -\frac{\partial B_y}{\partial u}$$

En intégrant, on obtiendra :

$$E_y = -c.B_x$$

Et

$$E_x = c.B_y$$

Finalement ;

$$\vec{E}.\vec{B} = E_x.B_x + E_y.B_y = c.B_y.B_x - c.B_x.B_y = 0$$

Cela signifie que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux.

3. Le champ magnétique est :

$$B_x = -\frac{1}{c}E_y = 0$$

Et

$$B_y = \frac{1}{c}E_x = \frac{E_0}{c}cos(\frac{\omega}{c}(z-ct))$$

d'où

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

(a.) La relation entre μ_0, ε_0 et c ;

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \varepsilon_0\mu_0.\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

En changeant de variable ;

$$\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial u} = \varepsilon_0\mu_0.\frac{\partial E_x}{\partial u}$$

Or

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial u} = -\frac{\partial B_y}{\partial u}$$

On aura

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial u} = \varepsilon_0\mu_0.\frac{\partial E_x}{\partial u}$$

Et donc

$$\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0\mu_0$$

Donc

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}}$$

(b). Application numérique :
$B_0 = 0.33\ 10^{-6}\ T$ et $\lambda = \frac{c}{f} = 3\ cm$

12

1. Le champ $\vec{B}$ peut s'écrit sous la forme :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} cos(wt - \vec{k}\vec{r})$$

$\vec{k}$ est le vecteur d'onde qui indique la direction de propagation de l'onde plane, $\vec{k} = \| \vec{k} \| \vec{u}$

Dans notre cas :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} cos(\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{1}{2}ky)\vec{u_z}$$

Donc

$$\vec{k} = \| \vec{k} \| \vec{u} = \| \vec{k} \| . \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalement la direction de propagation est donnée par le vecteur unitaire de $\vec{k}$, soit :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Les équation de Maxwell dans le vide :

$$\begin{cases} r\vec{o}t\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{E} = 0 \\ div\vec{B} = 0 \\ r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 1/c^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

- Calculons $r\vec{o}t \; r\vec{o}t(\vec{B})$:
compte tenu de $div\vec{B} = 0$;

$$r\vec{o}t \; r\vec{o}t(\vec{B}) = -\Delta\vec{B}$$

$$\begin{aligned}
-\Delta\vec{B} &= \vec{rot}\left(1/c^2\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\\
-\Delta\vec{B} &= \left(1/c^2\frac{\partial\vec{rot}\vec{E}}{\partial t}\right)\\
\Delta\vec{B}-1/c^2\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} &= \vec{0}\\
\left[-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right]\vec{B} &= \vec{0}
\end{aligned}$$

Cette onde admet une solution particulière, dite relation de dispersion : $k = \omega/c$, donc c'est une onde plane.

3. Le calcul de $\vec{E}$ correspondant à cette onde :

$$\vec{rot}\vec{B} = 1/c^2\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
\vec{rot}\vec{B} &= \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\ \frac{E_0}{c}cos(\omega t-\frac{\sqrt{3}}{2}kx-\frac{1}{2}ky)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1/2k\frac{E_0}{c}sin(\omega t-\frac{\sqrt{3}}{2}kx-\frac{1}{2}ky)\\ -\sqrt{3}/2k\frac{E_0}{c}sin(\omega t-\frac{\sqrt{3}}{2}kx-\frac{1}{2}ky)\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{rot}\vec{B} &= 1/c^2\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\
\vec{E} &= c^2\int\vec{rot}\vec{B}dt = E_0/2.\begin{pmatrix}-cos(\omega t-\frac{\sqrt{3}}{2}kx-\frac{1}{2}ky)\\ +\sqrt{3}cos(\omega t-\frac{\sqrt{3}}{2}kx-\frac{1}{2}ky)\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. L'onde est transversale si :

$$\vec{E}.\vec{k} = E_0/2.\begin{pmatrix} -cos(\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{1}{2}ky) \\ +\sqrt{3}cos(\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{1}{2}ky) \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{E} \perp \vec{k})$$

$$\vec{B}.\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E_0}{c}cos(\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{1}{2}ky) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

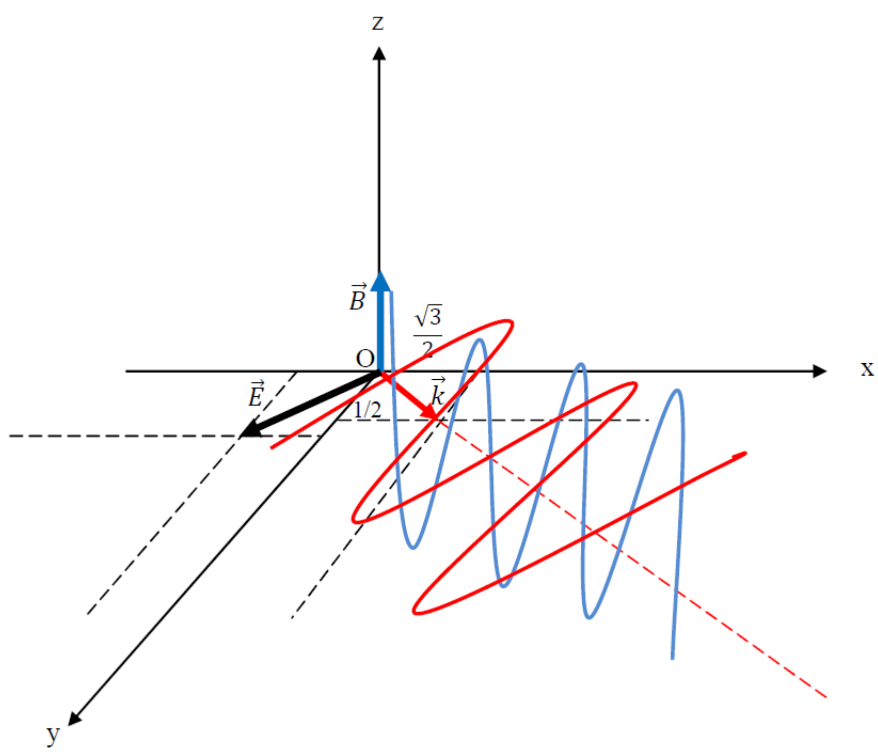
$$\Rightarrow (\vec{B} \perp \vec{k})$$

$$\vec{E}.\vec{B} = E_0/2.\begin{pmatrix} -cos(\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{1}{2}ky) \\ +\sqrt{3}cos(\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{1}{2}ky) \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E_0}{c}cos(\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{1}{2}ky) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{E} \perp \vec{B})$$

$\left(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}\right)$ forme un trièdre direct, donc l'onde en question est transversale.

5. La représentation graphique sera sous la forme suivante :



13

1. Le champ $\vec{E}(x,z,t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{E}(x,z,t) = 10^3 cos\pi\left[9.10^{14}t - (3.10^6/2)(\sqrt{3}x + z)\right]\vec{u_y} = E_0 cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

a. La direction de propagation est donnée par le vecteur unitaire $\vec{u}$: $\vec{k} = k.\vec{u}$

avec : $\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

et $k = \pi(3.10^6)$

b. La vitesse de propagation v :

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v = \frac{\pi(9.10^{14})}{\pi(3.10^{6})} = 3.10^{8} \;\; m/s$$

c. La longueur d'onde λ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\pi(3.10^{6})} = \frac{2}{3}10^{-6} \;\; m$$

d. La fréquence d'onde f :

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9\pi 10^{14}}{2\pi} = \frac{9}{2}10^{14}s^{-1}$$

e. L'amplitude E_0 :

$$E_0 = 10^{3} \;\; V/m$$

2. L'expression du champ $\vec{B}$:

$$\vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
\vec{rot}\vec{E} &= \begin{pmatrix} -3\pi 10^{9} sin\left(9\pi.10^{14}t - (3\pi.10^{6}/2)(\sqrt{3}x + z)\right) \\ 0 \\ -3\sqrt{3}\pi 10^{9} sin\left(9\pi.10^{14}t - (3\pi.10^{6}/2)(\sqrt{3}x + z)\right) \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \vec{B} &= -\int \vec{rot}\vec{E} \quad dt \\
\vec{B} &= \frac{1}{6}10^{-5}\begin{pmatrix} -cos\pi\left(9.10^{14}t - (3.10^{6}/2)(\sqrt{3}x + z)\right) \\ 0 \\ \sqrt{3}.cos\pi\left(9.10^{14}t - (3.10^{6}/2)(\sqrt{3}x + z)\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

14

1. Dans un plasma électriquement neutre ($\rho = \rho_e + \rho_i = 0$), les équations de Maxwell sont :

$$\begin{cases} \vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{E} = 0 \\ div\vec{B} = 0 \\ \vec{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{cases}$$

Pour obtenir la relation de dispersion, on utilise l'équation de propagation :

$$\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = \overrightarrow{grad}\,(div\vec{E}) - \vec{\Delta}\vec{E} = -\vec{\Delta}\vec{E}$$

Or

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) &= \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \\ &= -\frac{\partial(\overrightarrow{rot}\,\vec{B})}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

donc

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Le laplacien sera :

$$\begin{aligned} \vec{\Delta}\vec{E} &= \Delta E_x \hat{e_x} + \Delta E_y \hat{e_y} + \Delta E_z \hat{e_z} \\ &= \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}\hat{e_y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}\hat{e_z} \end{aligned}$$

Car la propagation se fait suivant l'axe (Ox) et donc $E_x = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{\Delta}\vec{E} &= -k^2 cos(kx - \omega t)\ (E_{0y}\hat{e_y} + E_{0z}\hat{e_z}) \\ &= -k^2\vec{E} \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

L' équation de propagation obtenue sera sous la forme suivante :

$$k^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

$\vec{j}$ est le vecteur densité de courant :

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v} = -n_e \, e \vec{v}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un électron du plasma.
Cet électron sera soumis à une force

$$\vec{F} = m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

nous considérons dans ce cas la vitesse des électrons comme non relativiste, et par conséquent la force d'origine magnétique est négligeable.
Sachant que le vecteur densité est proportionnel à la conductivité électrique, i.e $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, donc

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\sigma i \omega \vec{E}$$

C'est aussi :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -i\omega \vec{j}$$

En remplaçant la vitesse v par $-j/n_e e$:

$$-\frac{m_e}{n_e e} \frac{d\vec{j}}{dt} = -e\vec{E}$$

Et $d\vec{j}/dt$ par $-i\omega\vec{j}$, on obtient :

$$\vec{j} = i \frac{n_e e^2 \vec{E}}{m_e \omega}$$

Et notre équation de propagation sera :

$$\begin{aligned} k^2\vec{E} &= +i\omega\mu_0\left(i\frac{n_e e^2\vec{E}}{m_e\omega}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} \\ k^2 &= -\mu_0\frac{n_e e^2}{m_e}+\frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned}$$

La fréquence de coupure (ω_c), au-dessous de laquelle les ondes ne se propagent plus ($k = 0$) est :

$$\omega = \omega_c = \sqrt{\frac{\mu_0 n_e e^2 c^2}{m_e}}$$

La relation de dispersion devient alors :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$$

* Si $\omega > \omega_c$, le plasma est dispersif, il y a propagation sans atténuation.
* Si $\omega >> \omega_c$, l'onde passe sans voir le plasma.
* Si $\omega = \omega_c$, le plasma vibre en bloc.
* Si $\omega < \omega_c$, le plasma est réactif, il n'y a pas de propagation, et $k = i\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}/c$.

2. La vitesse de phase est donnée par la relation suivante :

$$v_\varphi = \omega/k$$

Celle-ci sera égale à :

$$v_\varphi = \frac{c\ \omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} > c$$

On remarque que cet artifice mathématique est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide.

3. La vitesse de groupe est :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

En utilisant la relation de dispersion : $c^2\ k^2 + \omega_c^2 = \omega^2$, on dérive

$$2c^2\ k\ dk = 2\omega\ d\omega$$

donc

$$\frac{d\omega}{dk} = c^2\frac{k}{\omega} = c^2/v_\varphi = v_g$$

la vitesse de groupe deviendra :

$$v_g = \frac{c}{\omega}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} < c$$

La vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie (des photons).

4. Application numérique : $f_c = 9,02\ MHz$.

Polarisation et Énergie Électromagnétique

3

1 Abrégé de Cours

1.1 Polarisation

L'étude de la polarisation d'une onde électromagnétique consiste à suivre l'évolution temporelle du champ électrique dans un plan normal à sa direction de propagation (dans notre cas, la propagation se fait suivant z).
L'observation se fait selon le sens opposé à celui de la propagation.
Une onde est dite "non polarisée" si son champ électrique a une direction qui varie **aléatoirement** dans le plan d'onde ; c'est le cas de la lumière naturelle.

1.1.1 Polarisation rectiligne

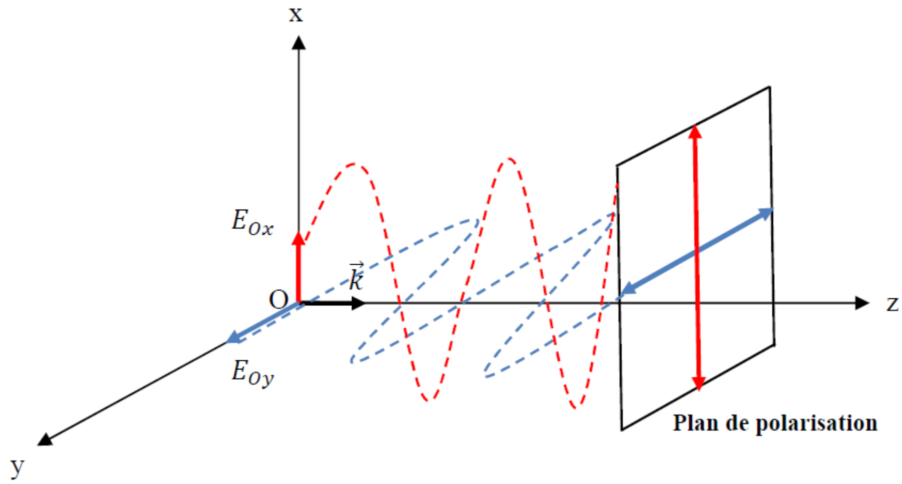
Le champ électrique conserve une **direction fixe** au cours du **temps** dans le plan d'onde perpendiculaire à la direction de propagation.

$$\vec{E} = E_0 cos(kz - \omega t)\hat{e}_x$$

Dans un cas plus général, l'onde polarisée rectiligne a une direction fixe dans le plan Oxy, la propagation est suivant Oz.

$$\vec{E} = E_{0x} cos(kz - \omega t)\hat{e}_x + E_{0y} cos(kz - \omega t + \Delta\phi)\hat{e}_y$$

Avec $\Delta\phi = 0$ ou 2π pour une polarisation rectiligne.



1.1.2 Polarisation elliptique

La direction du champ électrique évolue au cours du temps, toutefois le comportement du champ électrique n'est pas quelconque.
On constate que l'**extrémité** du vecteur champ électrique décrit une **ellipse** dans le plan perpendiculaire à $\vec{k}$.

$$\vec{E} = E_{0x}cos(kz - \omega t)\hat{e}_x + E_{0y}cos(kz - \omega t + \Delta\phi)\hat{e}_y$$

1.1.3 Polarisation circulaire

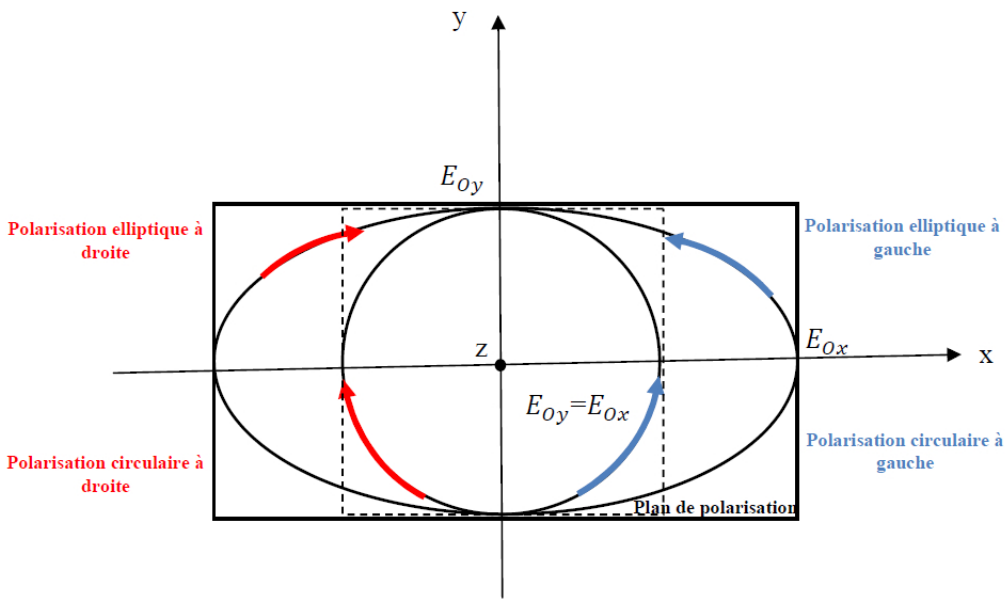
La polarisation circulaire est une situation particulière de la polarisation elliptique.
Quand $E_{0x} = E_{0y}$ et $\phi = \pm\pi/2$, la courbe décrite est alors un **cercle** parcouru dans le sens de la montre (droite) ou dans le sens contraire (gauche).

$$\vec{E} = E_{0x}cos(kz - \omega t)\hat{e}_x + E_{0y}cos(kz - \omega t \pm \pi/2)\hat{e}_y$$

donc on aura, en fixant le plan d'onde $(z = 0)$:

$$\vec{E} = E_{0x}cos(\omega t)\hat{e}_x + \beta E_{0y}sin(\omega t)\hat{e}_y$$

Et l'évolution temporelle donne :
$\beta = +1 \Rightarrow$ Polarisation circulaire gauche.
$\beta = -1 \Rightarrow$ Polarisation circulaire droite.



1.2 Énergie Électromagnétique

La densité d'énergie volumique d'énergie électromagnétique est :

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Le vecteur de Poynting :

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface fermée représente le débit (ou flux) d'énergie électromagnétique (ou puissance électromagnétique rayonnée) à travers cette surface :

$$P = \oint \vec{S} d\vec{A}$$

L'énergie moyenne transportée I est appelée intensité (ou éclairement) de l'onde. Pour une onde E.M plane :

$$I = S_{moy} = \frac{1}{c\mu_0}\left[E^2\right]_{moy} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} = \frac{E_{eff}^2}{c\mu_0}$$

Avec $E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$

2 EXERCICES

1 Polarisation

Corr. p. 66

Décrire l'état de polarisation de chacune des 3 ondes représentées par les champs électriques suivants :

$$\overrightarrow{E_0} = \begin{cases} E_0 cos(\alpha)cos(\omega t - kz) \\ E_0 sin(\alpha)cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{E_1} = \begin{cases} E_1 cos(\omega(t - z/c)) \\ E_1 sin(\omega(t - z/c)) \\ 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{E_2} = \begin{cases} E_1 cos(\omega(t - z/c)) \\ -E_1 sin(\omega(t - z/c)) \\ 0 \end{cases}$$

Et

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$$

2 Polarisation

Corr. p. 66

On considère le champ électrique d'une onde électromagnétique plane $\vec{E}(\vec{r}, t)$ qui a pour composantes :

$$\begin{cases} A_x cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi_x) \\ A_y cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi_y) \\ 0 \end{cases}$$

1. Retrouver la relation qui relie A_x, A_y et $\phi = \phi_y - \phi_x$
2. Donner les conditions de ces trois paramètres, à savoir A_x, A_y et ϕ, pour que l'onde présente une polarisation soit :
   -> rectiligne.
   -> circulaire.
   -> elliptique.

3 Polarisation

Corr. p. 68

Soit une onde électromagnétique plane de composantes électriques :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x}e^{i(\omega t-kz)} \\ E_{0y}e^{i(\omega t-kz-\phi)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la direction de propagation et le plan de polarisation de cette onde

2. Montrer que l'on peut aboutir à l'équation elliptique suivante :

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0x}}cos\phi = sin^2\phi$$

3. Déterminer l'état de polarisation de cette onde dans les cas suivants :
   a. ϕ=0 ou $\phi = \pi$
   b. $\phi = 0$ et $E_{0y}/E_{0x} = \sqrt{3}$
   c. $\phi = \pi/2$ et $E_{0x} = E_{0y}$

4 Polarisation

Corr. p. 69

Donner les expressions de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ pour les ondes planes suivantes :

1. Onde se propageant suivant l'axe Ox et polarisée linéairement à $\pi/3$ de Oy.
2. Onde se propageant suivant Oy et polarisée elliptiquement à droite, le grand axe de l'ellipse, suivant Oz, étant trois fois plus grand que le petit axe.
3. Onde polarisée linéairement suivant Oy et se propageant parallélement au plan zOx à $\pi/4$ de Oz.

5 Énergie EM

Corr. p. 70

I. Une OEM progressive issue d'une station radio traverse perpendiculairement une fenêtre ouverte dont sa surface est de 0.5 m^2. À la fenêtre, le champ électrique de cette onde a comme valeur 0.02 V/m. Combien d'énergie cette onde aura t'elle portée à travers cette fenêtre durant 30 s ?

II. L'intensité d'un faisceau laser cylindrique est 0.800 W/m^2, la section du faisceau est égale à 3.10^{-4} m^2. L'intensité est uniforme lors de sa traversée. Quelle est la puissance moyenne du laser ? Quelle est la valeur efficace du champ électrique dans le faisceau ?

III. Une sonde spatiale distante de $2.0.10^{10}$ m d'une étoile mesure l'intensité totale du rayonnement électromagnétique de l'étoile, $I = 5,0.10^3$ W/m^2. Si l'étoile rayonne uniformément dans toutes les directions, quelle est la puissance moyenne totale ?

IV. Une OEM émise par un cellulaire a une longueur d'onde égale à 35,4 cm et l'amplitude du champ électrique est de $5,40.10^{-2}$ V/m à une distance de 250 m de l'antenne. Calculer la fréquence de l'onde, l'amplitude du champ magnétique et l'intensité de cette onde.

V. Soit une source lumineuse monochromatique de puissance 60 W irradie uniformément une lumière dont sa longueur d'onde est égale à 700 nm dans toutes les directions. Calculez E_{max} et B_{max} de la lumière distante de 5 m de la source.

VI. Un nombre important de lampes à arc peut produire une lumière d'intensité 2500 W/m^2 à l'étage de l'installation. (Cela simule l'intensité de la lumière du soleil près de la planète Vénus.) Trouver la pression de radiation (en pascals et en atmosphères), pour (a) une section totalement absorbante du sol et (b) une section totalement réfléchissante du sol.

6 Énergie EM

Corr. p. 71

Soit une onde électromagnétique plane progressive de pulsation ω et d'amplitude E_0 se propageant dans le vide. Le champ électrique de cette onde est parallèle à l'axe Oz et la direction de propagation est contenue dans le plan Oxy et fait un angle $\alpha = \pi/4$ avec l'axe Ox.

1. Écrire les composantes du vecteur $\vec{k}$, du champ électrique $\vec{E}$ et déduire celles de l'induction magnétique $\vec{B}$.
2. Exprimer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{s}$ et trouver la valeur moyenne temporelle de son module. Déduire l'éclairement I de l'onde ?
3. Quelles sont les valeurs des amplitudes E_0 et B_0 de cette onde sachant qu'elle transporte un éclairement $I = 0{,}2$ W/ m^2 évalué à travers une surface normale à la direction de propagation.

7 Énergie EM

Corr. p. 73

Soit une onde électromagétique plane et progressive, de pulsation ω se propageant dans le vide. L'induction magnétique $\vec{B}$ est définie par ses composantes, par rapport à un repère orthonormé $(Oxyz)$:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. A l'aide des équations de Maxwell, déterminer les composantes du champ électrique $\vec{E}$
2. Déterminer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{s}$
3. Quelle est la valeur moyenne temporelle du flux de rayonnement Φ rayonné à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation.

8 Énergie EM

Corr. p. 74

On considère une onde électromagnétique plane progressive monochromatique transversale polarisée circulairement dans le plan Oxy, se propageant dans le vide.

1. Ecrire en notations complexes et réelles le champ électrique $\vec{E}$ associé.
2. En déduire l'induction magnétique $\vec{B}$.
3. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{s}$ correspondant.
4. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting complexe $\underline{\vec{s}}$ correspondant.
5. Déterminer l'éclairement I de cette onde.

3 Corrigés

1

1. $E_0cos(\alpha)$ et $E_0sin(\alpha)$ sont les modules de $\vec{E_0}$ suivant x et y respectivement. Cela n'influent pas sur la polarisation de l'onde. La polarisation est rectiligne sur le plan OXY

2. Sur le plan d'onde fixé à $z = 0$,

$$\overrightarrow{E_1} = E_1(cos(\omega t)\hat{i} + sin(\omega t)\hat{j})$$

$t = 0T$ on aura $\overrightarrow{E_1} = E_1\hat{i}$ et à $t = T/4$, $\overrightarrow{E_1} = E_1\hat{j}$ La polarisation est circulaire gauche.

3. Sur le plan d'onde fixé à $z = 0$,

$$\overrightarrow{E_2} = E_1(cos(\omega t)\hat{i} - sin(\omega t)\hat{j})$$

$t = 0T$ on aura $\overrightarrow{E_1} = E_1\hat{i}$ et à $t = T/4$, $\overrightarrow{E_1} = -E_1\hat{j}$ La polarisation est circulaire droite.

4. $\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$

$$\overrightarrow{E_2} = \left\{ \begin{array}{r} 2E_1cos(\omega(t - z/c)) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

Donc la polarisation est rectiligne.

2

1.
$$\begin{cases} \frac{E_x}{A_x} = cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ \frac{E_y}{A_y} = cos(\omega t - kz + \phi_y) = cos(\omega t - kz + \phi_x + \phi_y - \phi_x) \\ 0 \end{cases}$$

Soit $\phi = \phi_y - \phi_x$

$$\begin{cases} \frac{E_x}{A_x} = cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ \frac{E_y}{A_y} = cos(\omega t - kz + \phi_x)cos\phi - sin(\omega t - kz + \phi_x)sin\phi = \frac{E_x}{A_x}cos\phi - sin(\omega t - kz + \phi_x)sin\phi \\ 0 \end{cases}$$

On met l'expression au carré et on somme :

$$\left(\left(\frac{E_y}{A_y}\right) - \left(\frac{E_x}{A_x}\right)cos\phi\right)^2 = sin^2(wt - kz + \phi_x)\,sin^2\phi = \left(1 - \frac{E_x^2}{A_x^2}\right)sin^2\phi$$

$$\left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 cos^2\phi - 2\left(\frac{E_y}{A_y}\right)\left(\frac{E_x}{A_x}\right)cos\phi = \left(1 - \frac{E_x^2}{A_x^2}\right)sin^2\phi$$

$$\left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{A_y}\right)\left(\frac{E_x}{A_x}\right)cos\phi = sin^2\phi$$

2. . La polarisation est rectiligne si :
$\phi = 0$ ou $\phi = \pi \Rightarrow \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 \pm 2\left(\frac{E_y}{A_y}\right)\left(\frac{E_x}{A_x}\right) = 0$ ou encore :
$\frac{E_y}{A_y} = \pm\frac{E_x}{A_x}$;

. La polarisation est circulaire si :
$\phi = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 = 1$; avec Ox et Oy les axes de l'ellipse.
De plus en $z = 0$ et $\phi = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{cases} E_x = A_x cos(\omega t) \\ E_y = -A_y sin(\omega t) \\ 0 \end{cases}$$

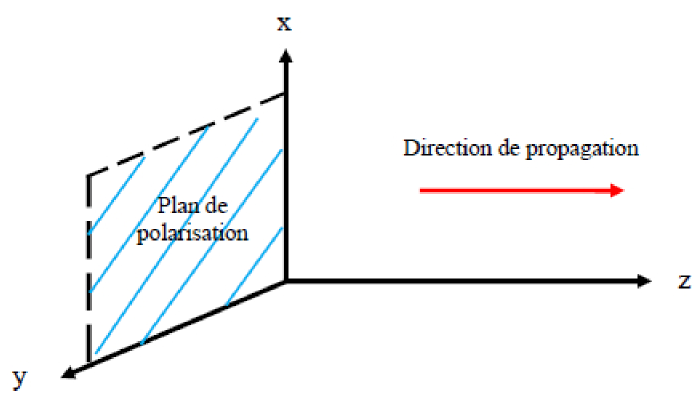
$\Rightarrow$ l'onde est elliptique droite

Par ailleurs, si $A_x = A_y \Rightarrow$ la polarisation est circulaire.

. La polarisation est elliptique si
$\phi \neq k\pi$,
si $0 < \phi < \pi$, la polarisation est elliptique gauche
si $\pi < \phi < 2\pi$, la polarisation est elliptique droite

3

1. Le plan de polarisation est le plan perpendiculaire à la direction de propagation



2. Le champ $\vec{E}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x}cos(\omega t - kz) \\ E_{0y}cos(\omega t - kz - \phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = cos(\omega t - kz)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_y}{E_{0y}} &= cos(\omega t - kz - \phi) \\ &= cos(wt - kz)cos\phi + sin(\omega t - kz)sin\phi \\ &= \frac{E_x}{E_{0x}}cos\phi + sin(\omega t - kz)sin\phi \end{aligned}$$

Et donc

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}}cos\phi\right)^2 &= sin^2(\omega t - kz)sin^2\phi \\
\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}cos\phi\right)^2 - 2\frac{E_y}{E_{0y}}\frac{E_x}{E_{0x}}cos\phi &= (1-(cos(\omega t - kz))^2)sin^2\phi \\
\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}cos\phi\right)^2 - 2\frac{E_y}{E_{0y}}\frac{E_x}{E_{0x}}cos\phi &= (1-(\frac{E_x}{E_{0x}})^2)sin^2\phi \\
\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_y}{E_{0y}}\frac{E_x}{E_{0x}}cos\phi &= sin^2\phi.
\end{aligned}
$$

3. Détermination de l'état de polarisation dans les cas suivants :
   a. ϕ=0 ou $\phi = \pi$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 \pm 2\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right) = 0$$

   ou encore :

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \pm\frac{E_x}{E_{0x}}$$

   La polarisation est rectiligne.

   b. $\phi = 0$ et $\frac{E_{0y}}{E_{0x}} = \sqrt{3}$
   Donc la polarisation est rectiligne d'un angle de $\pi/3$ par rapport à l'axe Ox

   c. $\phi = \pi/2$ et $E_{0x} = E_{0y}$
   La polarisation est circulaire droite.

4

1. L'onde se propage suivant l'axe Ox, on en déduit que $E_x = 0$

$$\begin{cases} 0 \\ E_y = E_{0y}cos(\omega t - kx) \\ E_z = E_{0z}cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

Avec : $\frac{E_{0y}}{E_{0z}} = tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

2. L'onde se propage suivant l'axe Oy, on en déduit que $Ey = 0$

$$\begin{cases} E_x = E_{0x}cos(\omega t - ky) \\ 0 \\ E_z = E_{0z}cos(\omega t - ky \pm \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Le grand axe est suivant Oz, on en déduit que $E_{0z} = 3E_{0x}$

3. L'onde est polarisée linéairement selon Oy donc $E_x = 0$ et $E_z = 0$.
La direction de propagation est dans le plan zOx à $\pi/4$.

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0x}cos(\omega t - \frac{kx+kz}{\sqrt{2}}) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

5

I. L'énergie que l'onde a porté est : $U = P.t$ et $P = I.A$
P est la puissance, A la surface traversée et I l'intensité (ou éclairement) avec

$$I = 1/2\varepsilon_0.c.E_0^2$$

Alors

$$U = 1/2\varepsilon_0.c.E_0^2 A.t = 15,9.10^{-6}J$$

II.

$$P_{moy} = I.A = 2,4.10^{-4}W$$

et

$$E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{I}{\varepsilon_0.c}} = 17,4V/m$$

III. $A = 4\pi r^2$

IV. $f = c/\lambda = 8,47.10^8 Hz$; $B_0 = E_0/c = 1,8.10^{-10}T$
et

$$I = 1/2\varepsilon_0.c.E_0^2 = 3,87.10^{-6}w/m^2$$

V. $A = 4\pi r^2$

$$P = I.A = S_{moy}.A = \frac{E_{max}.B_{max}}{2\mu_0}.A = \frac{E_{max}^2}{2c\mu_0}A$$

et

$$E_{max} = \sqrt{\frac{Pc\mu_0}{2\pi.25}} = 12V/m$$

et

$$B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = 4.10^{-8}T$$

VI. P_{rad} la pression radiative ;

a.

$$P_{rad} = I/c$$

b.

$$P_{rad} = 2I/c$$

6

1. Le vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde en question, dont la direction de propagation est contenue dans le plan Oxy et fait un angle $\alpha = \pi/4$ avec l'axe Ox est donné par :

$$\vec{k} = \frac{k}{\sqrt{2}}\vec{u_x} + \frac{k}{\sqrt{2}}\vec{u_y}$$

Le champ électrique $\vec{E}$ s'écrit alors :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})\vec{u_z}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 cos(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}})\vec{u_z}$$

Pour une onde électromagnétique plane progressive monochromatique on a :

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\vec{B}$$

Soit :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

C'est-à-dire :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = 1/\omega \begin{pmatrix} k/\sqrt{2} \\ k/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 cos(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{B_0}{\sqrt{2}} cos(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}})\vec{u_x} - \frac{B_0}{\sqrt{2}} cos(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}})\vec{u_y}$$

Avec : $B_0 = \frac{E_0}{c}$ et $(\omega/k = c)$

2. Le vecteur de Poynting en utilisant la notation réelle, est défini par :

$$\vec{s} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Soit :

$$\vec{s}(\vec{r},t) = 1/\mu_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 cos(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{B_0}{\sqrt{2}} cos(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}}) \\ -\frac{B_0}{\sqrt{2}} cos(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\vec{s}(\vec{r},t) = \frac{E_0^2}{\sqrt{2} c\mu_0} cos^2(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}})\vec{u_x} + \frac{E_0^2}{\sqrt{2} c\mu_0} cos^2(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}})\vec{u_y}$$

Le module du vecteur de Poynting sera :

$$s(\vec{r},t) = \| \vec{s}(\vec{r},t) \| = \frac{E_0^2}{c\mu_0} cos^2(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}})$$

Et sa moyenne temporelle :

$$\langle s(\vec{r},t) \rangle = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \langle cos^2(\omega t - \frac{kx}{\sqrt{2}} - \frac{ky}{\sqrt{2}}) \rangle$$

Soit :

$$\langle s(\vec{r},t) \rangle = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}$$

Sachant que l'éclairement I est égale à :

$$I = \langle s(\vec{r},t) \rangle = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}$$

3. L'éclairement I d'une onde électromagnétique plane progressive est lié à l'amplitude E_0 de son champ électrique par :

$$I = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}$$

Alors :

$$E_0 = \sqrt{2Ic\mu_0}$$

L'amplitude B_0 de l'induction magnétique peut etre calculé à partir de E_0 en utilisant la relation suivante :

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

Application numérique :
$E_0 = 12,28 \mathrm{NC}^{-1}$ (où N ≡kg.m.s^{-2}) et $B_0 = 4,09310^{-8} T$ (où $T \equiv$ kg.C^{-1}.s^{-1})

7

1. Pour une onde électromagnétique plane progressive monochromatique qui se propage dans le vide, on a :

$$r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Avec :
$c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, $\omega/k = c$ et $E_0 = cB_0$
Donc :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -E_0 cos(\omega t - kx)\vec{u_z}$$

2. Le vecteur de Poynting est donné par :

$$\vec{s} = \vec{E}\wedge\vec{H} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$$

Soit :

$$\vec{s}(\vec{r},t) = 1/\mu_0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -E_0 cos(\omega t - kx)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ B_0 cos(\omega t - kx) \\ 0\end{pmatrix}$$

D'où :

$$\vec{s}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 cos^2(\omega t - kx)\vec{u_x}$$

Ou encore

$$\vec{s}(\vec{r},t) = \frac{c}{\mu_0} B_0^2 cos^2(\omega t - kx)\vec{u_x}$$

3. La valeur moyenne temporelle du module du vecteur de Poynting, qui représente l'éclairement de l'onde, est donnée par :

$$I = \langle s(\vec{r},t)\rangle = \frac{c}{\mu_0} B_0^2 \langle cos^2(\omega t - kx)\rangle$$

$$I = \frac{c}{2\mu_0} B_0^2$$

En effet, l'éclairement d'une onde est défini comme étant le flux de rayonnement Φ qu'elle transporte par unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation.
C'est à dire :

$$I = \frac{\Phi}{S}$$

D'où :

$$\Phi = IS = \frac{cB_0^2}{2\mu_0} S$$

8

1. Le champ électrique d'une onde électromagnétique plane progressive transversale polarisée circulairement dans le plan Oxy s'écrit, en notation complexe :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)}\vec{u_x} + E_0 e^{i(\omega t - kz + \pi/2)}\vec{u_y}$$

Et en notation réelle :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 cos(\omega t - kz)\vec{u_x} + E_0 cos(\omega t - kz + \pi/2)\vec{u_y}$$

Ou encore :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 cos(\omega t - kz)\vec{u_x} - E_0 sin(\omega t - kz)\vec{u_y}$$

Car : $cos(\pi/2+\alpha) = -sin\alpha$.
NB : L'onde en question se propage suivant la direction Oz car elle est transversale et polarisée circulairement dans le plan Oxy.

2. Pour une onde électromagnétique plane progressive monochromatique, se propageant dans le vide on a :

$$\vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Soit :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Alors, en notation complexe :

$$\vec{B}(\vec{r},t) = 1/\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ E_0 e^{i(\omega t - kz + \pi/2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\vec{B}(\vec{r},t) = -B_0 e^{i(\omega t - kz+\pi/2)}\vec{u_x} + B_0 e^{i(\omega t - kz)}\vec{u_y}$$

Ou bien en notation réelle :

$$\vec{B}(\vec{r},t) = B_0 sin(\omega t - kz)\vec{u_x} + B_0 cos(\omega t - kz)\vec{u_y}$$

Avec :
$\omega/k = c$ et $E_0 = cB_0$

3. Le vecteur de Poynting en utilisant la notation réelle, est défini par :

$$\vec{s} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Soit :

$$\vec{s}(\vec{r},t) = 1/\mu_0 \begin{pmatrix} E_0 cos(\omega t - kz) \\ -E_0 sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_0 sin(\omega t - kz) \\ B_0 cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\vec{s}(\vec{r},t) = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}(cos^2(\omega t - kz) + sin^2(\omega t - kz))\vec{u_z}$$

Ou encore :

$$\vec{s}(\vec{r},t) = \frac{E_0^2}{c\mu_0}\vec{u_z}$$

Le module du champ électrique, dans ce cas, est $\sqrt{2}E_0$

4. Le vecteur de Poynting complexe $\underline{\vec{s}}$ est défini par :

$$\underline{\vec{s}} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{H}^*}{2} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}^*}{2\mu_0}$$

Où le symbole (*) désigne l'opération de conjugaison complexe.
Alors :

$$\underline{\vec{s}}(\vec{r},t) = 1/2\mu_0\begin{pmatrix} E_0e^{i(\omega t-kz)} \\ E_0e^{i(\omega t-kz+\pi/2)} \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} -B_0e^{-i(\omega t-kz+\pi/2)} \\ B_0e^{-i(\omega t-kz)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\underline{\vec{s}}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\mu_0}2E_0B_0\vec{u_z}$$

Ou encore :

$$\underline{\vec{s}}(\vec{r},t) = \frac{E_0^2}{c\mu_0}\vec{u_z}$$

NB : On note que, dans le cas général, la valeur temporelle moyenne du vecteur de Poynting $\vec{s}$ est égale à la partie réelle du vecteur de Poynting complexe $\underline{\vec{s}}$, c'est à dire :

$$\langle\vec{s}\rangle = \frac{1}{2}Re(\underline{\vec{s}})$$

5. L' éclairement de l'onde est donné par :

$$I = \langle s(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{2}Re(\underline{s}(\vec{r},t))$$

Soit :

$$I = \frac{E_0^2}{c\mu_0}$$

Onde électromagnétique Stationnaire et Guide d'ondes

4

1 Abrégé de Cours

1.1 Onde électromagnétique stationnnaire

Une onde progressive plane polarisée rectilignement arrive sur un conducteur parfait en incidence normale. Le conducteur occupe le demi-espace $z > 0$. Le champ électrique de l'onde incidente s'écrit :

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t - kz)} \hat{e}_x$$

propagation dans le vide dans le sens des z croissants.
Le champ électromagnétique est nul dans un conducteur parfait. Il n'y a donc pas d'onde transmise. Le champ électrique de l'onde réfléchie s'écrit :

$$\vec{E}_r = E_{0r} e^{i(\omega t + kz)} \hat{e}_x$$

propagation dans le vide dans le sens des z décroissants.

1.1.1 Champ électrique total

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = 2E_0 sin(kz) sin(\omega t) \hat{e}_x$$

1.1.2 Champ magnétique

L'onde résultante n'est pas une onde progressive plane mais l'onde incidente et l'onde réfléchie sont des ondes progressives planes.

$$\vec{B}_i = \frac{1}{c}\hat{e}_z \times \vec{E}_i$$

Et

$$\vec{B}_r = \frac{1}{c}(-\hat{e}_z) \times \vec{E}_r$$

Le champ total s'écrit donc :

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{2E_0}{c}cos(kz)cos(\omega t)\hat{e}_y$$

1.1.3 Onde stationnaire

L'onde résultante est une onde stationnaire. Les champs vibrent sur place, sans propagation. Le champ électrique est toujours nul dans les plans :

$$z = n\frac{\pi}{k} = n\frac{\lambda}{2}$$

Avec $n = 0, 1, 2...$, ce sont les plans nodaux (noeuds) de $\vec{E}$. Les plans nodaux de $\vec{B}$ sont décalés de $\lambda/2$. Les plans antinodaux (ventres) sont les plans où le champ est maximal à un instant donné. Les plans antinodaux de $\vec{B}$ coïncident avec les plans nodaux de $\vec{E}$ et vice-versa.
Le vecteur de Poynting est nul en moyenne ce qui traduit l'absence de propagation de l'énergie.
La surface du conducteur est un plan nodal de $\vec{E}$.

1.2 Guide d'ondes

1.2.1 Propagation guidée entre deux plans métalliques parallèles :

Les conducteurs sont parfaits et distant de a.

Conditions aux limites

La continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ et de la composante normale de $\vec{B}$ s'annulent sur les plans conducteurs.

$$\vec{B}_x(x=0) = \vec{B}_x(x=a) = 0$$

$$\vec{E}_z(x=0) = \vec{E}_z(x=a) = \vec{E}_y(x=0) = \vec{E}_y(x=a) = 0$$

On cherche des solutions sinusoïdales de la forme :

$$\vec{E} = E_0 f(x) cos(kz - \omega t)$$

L'onde n'est donc pas plane, $\vec{E}$ dépend de x.

L'onde ne peut pas être TEM (Transverse électrique et magnétique). Si $\vec{E}$ est transverse (onde TE), $\vec{B}$ ne l'est pas et vice-versa pour une onde TM.

La solution de $f(x)$, en considérant les conditions aux limites et en supposant la polarisation rectiligne suivant Oy, est sous la forme :

$$f(x) = sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

La propagation guidée consiste à canaliser un signal E.M dans un espace délimité par des interfaces conductrices ou diélectriques. Son avantage est de transmettre l'énergie E.M avec un faible taux d'atténuation et de véhiculer l'information correspondante à l'abri de phénomènes parasites.

2 Exercices

Corrigés Exercices Abrégé

1 OEM Stationnaires

Corr. p. 87

Soit une OEM stationnaire dont ses champs électrique et magnétique sont les suivants :

$$\begin{aligned} E_y(x,t) &= -2E_0\, sin(kx)\, sin(\omega t) \\ B_z(x,t) &= -2B_0\, cos(kx)\, cos(\omega t) \end{aligned}$$

a. Montrer que :

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}$$

b. Et que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} &= \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} \end{aligned}$$

2 OEM Stationnaires

Corr. p. 88

Dans un four micro-onde, on donne la longueur d'onde de ses ondes comme étant $\lambda = 12.2\ cm$.

a. Quelle est la largeur que doit avoir le four pour qu'il puisse contenir (05) plans anti-nodaux du champ électrique (ou ventre d'amplitude) de l'OEM stationnaire.

b. Quelle est la fréquence de ces micro-ondes ?

c. Supposons une erreur de fabrique et le four a 5 cm de plus que la longueur spécifiée dans (a), que devrait être la valeur de la fréquence pour obtenir 05 plans antinodaux du champ électrique.

3 OEM Stationnaires

Corr. p. 88

Soit une OEM stationnaire, dans un matériau, ayant comme fréquence $f = 2,20.10^{10}\ Hz$ et dont la distance entre deux plans nodaux de $\overrightarrow{B}$ est de $3,55\ mm$. Trouvez : La longueur d'onde de cette onde, la distance entre deux plans nodaux de $\overrightarrow{E}$ et la vitesse de propagation de l'OEM.

4 OEM Stationnaire

Corr. p. 89

Le champ électrique d'une onde électromagnétique plane progressive monochromatique Ω_1 se propageant dans le vide est donné par :

$$\vec{E_1}(x,t) = E_0 sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)\vec{e_y}$$

I. On superpose à l'onde Ω_1, une deuxième onde plane progressive Ω_2 de même amplitude, de même pulsation et se propageant dans le même sens mais elle est déphasée de ϕ par rapport l'onde Ω_1.

1. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E_T}$ de l'onde résultante.
2. Que devient le champ électrique $\vec{E_T}$ de l'onde résultante lorsque $\phi = 0$?

II. On superpose à l'onde Ω_1, une autre onde plane progressive Ω_3 de même amplitude, de même pulsation mais se propageant dans le sens opposé.

1. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E_T}$ de l'onde résultante.
2. Quelle est la nature de l'onde obtenue ?
3. Déterminer les positions des noeuds et des ventres pour le champ électrique.

On donne :

$$cos(a) + cos(b) = 2cos\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

5 OEM Stationnaire

Corr. p. 91

Calculez l'intensité d'une OEM stationnaire issue de la superposition d'une onde incidente dont ses champs sont les suivants ;

$$\overrightarrow{E}(x,t) = E_0\, cos(kx + \omega t)\hat{j}$$

$$\overrightarrow{B}(x,t) = -B_0\, cos(kx + \omega t)\hat{k}$$

Et d'une onde réfléchie que l'on déterminera.

6 OEM Stationnaire

Corr. p. 91

On dispose dans le vide deux plans parfaitement conducteurs parallèles, d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.
On se propose d'étudier une onde électromagnétique, stationnaire, plane, monochromatique, à polarisation rectiligne entre ces deux plans :

$$\overrightarrow{E} = E_0 f(x) cos(\omega t)\hat{e}_y$$

1. En admettant que les champs électrique et magnétique $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ soient nuls dans un métal parfaitement conducteur, écrire les conditions aux limites que doivent vérifier les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ dans le vide en $x = 0$ et $x = a$.
2. Déterminer la fonction $f(x)$ et montrer que la pulsation ω est nécessairement quantifiée.
3. Calculer le champ $\overrightarrow{B}$ de cette onde.
4. Calculer l'énergie électrique ϵ_E et l'énergie magnétique ϵ_B emmagasinée dans un volume cylindrique d'axe (Ox), situé entre deux plans et de section S.

7 OEM Stationnaire

Corr. p. 94

Le champ électrique d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide est donné par :

$$\vec{E} = E_0 sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{\sqrt{2}c} - \frac{y}{\sqrt{2}c}\right)\right]\vec{e_z}$$

I. 1. Quelle est la direction de propagation ?

2. Quelle est la direction de polarisation ?

3. Quelle est la nature de l'onde. Est elle longitudinale ou transversale ? Expliquer pourquoi on peut dire que cette onde est plane.

4. Quelle est l'amplitude, la pulsation et la vitesse de cette onde et donner l'expression de la longueur d'onde λ

II. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$. Exprimer le déphasage de $\vec{B}$ par rapport à $\vec{E}$.

III. On superpose à cette onde, une deuxième onde progressive de même amplitude, de même pulsation et se propageant dans le même sens mais déphasée de ϕ par rapport à la première.

1. Donner l'expression du champ électrique résultant (amplitude et phase en fonction de E_0 et ϕ).

2. Que devient ce champ électrique résultant lorsque $\phi = 0$?

3. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ lorsque $\phi = 0$.

IV. On superpose à l'onde initiale définie au début de l'exercice, une deuxième onde progressive de même amplitude, de même pulsation mais se propageant dans le sens opposé :

1. Donner l'expression de l'onde résultante (amplitude et phase en fonction de E_0, x, et y).

2. Quelle est la nature de l'onde obtenue ? Donner la position des maxima et des minima pour le champ électrique.

On donne :

$$sin(p) + sin(q) = 2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

8 Guide d'ondes

Corr. p. 95

On considère le champ de vecteur $\overrightarrow{E}$ dans le vide :

$$E_x = 0$$
$$E_y = E_0 cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) exp(i(\omega t - kz))$$
$$E_z = \alpha E_0 sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) exp(i(\omega t - kz))$$

1. L'onde est-elle plane ? Quelle est la condition pour que ce champ électrique soit associé à une onde électromagnétique ?
2. Donner l'expression du champ électrique total tout en conservant sa partie imaginaire.
3. Calculer le champ magnétique associé. Trouver le vecteur de Poynting, en ne considérant que les parties réelles des composantes du champ électrique et magnétique.En déduire sa densité d'énergie et leurs moyennes temporelles.
4. Déterminer la relation de dispersion.Discuter la possibilité de propagation suivant la pulsation. On mettra à ce propos en évidence une pulsation caractéristique dont on donnera la signification.
5. En déduire les expressions des vitesses de phase et de groupe de l'onde.

9 Guide d'ondes

Corr. p. 98

Dans un guide d'ondes rectangulaire à air, on relève le champ magnétique d'un mode TE_{21} :

$$H_z(x,y,z,t) = H_0 cos(87.3x) cos(92.4y) cos(\omega t - \beta z)$$

où x, y et z sont exprimés en mètres.
Déterminez :

1. Les dimensions du guide d'onde.La fréquence de coupure du mode.
2. La longueur d'onde dans le guide, si le mode se propage à la fréquence $f = 10 GHz$. Et la fréquence de coupure du mode fondamentale.

10 Guide d'ondes

Corr. p. 98

On considère un cylindre droit métallique et creux, d'axe Oz, à section rectangulaire définie par : $0 \leq x \leq a$, et $0 \leq y \leq a$.
Le cylindre est délimité selon Oz et rempli d'air assimilable à du vide du point de vu électrique. La conductivité des parois étant trés grand dans lesquelles les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls. Le champ électromagnétique est donc confiné à l'intérieur du cylindre : on parle de propagation guidée, par opposition à la propagation libre à partir d'une source rayonnante.

1. Dans ces conditions, donner les conditions aux limites vérifiées par $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sur les parois.
   On s'intéresse à un champ de la forme complexe suivante :
   $$E(x,\vec{y},z,t) = f(x,y)exp\,[i(\omega t - kz]\,\vec{e_y}$$
2. a- Montrer que $f(x)$ ne dépend pas de y.
   b- Donner l'équation satisfaite par $f(x)$ et en déduire une condition vérifiée par k.
   c- Déterminer les expressions possibles de $f(x)$ et établir la relation de dispersion.
   d- Définir un ensemble de de pulsations critiques et discuter de la forme des solutions selon la valeur de la pulsation.
   e- Calculer la plus petite fréquence d'une onde pouvant se propager dans le guide avec $a = 3cm$.
   f- Calculer les vitesses de phase et de groupe, les comparée à c et conclure..
3. Déterminer le champ $\vec{B}$; vérifier qu'il satisfasse aux conditions aux limites de la question (1).
4. Calculer les moyennes temporelles de la puissance transportée par le guide et de l'énergie électromagnétique par unité de longueur, soit respectivement $\langle P \rangle_T$ et $\left\langle \frac{dW_{EM}}{dz} \right\rangle_T$. Et en déduire la vitesse de propagation de l'énergie v_E ; la comparer à la vitesse de groupe v_g et conclure.

11 Guide d'ondes

Corr. p. 101

Une onde électromagnétique se propage dans le vide, parallèlement à (Ox), entre des plans conducteurs parfaits situés à $z = 0$ et $z = a$. Son champ électrique est :

$$\vec{E} = E_0 sin\left(\frac{\pi z}{a}\right).cos(\omega t - kx)\hat{e}_y$$

1. Quel est le champ magnétique associé à cette onde ?
2. Cette onde est-elle plane ? Est-ce en désaccord avec les valeurs des divergences des champs électrique et magnétique dans le vide ?
3. À quelle condition les champs obtenus sont-ils effectivement compatibles avec les équations de Maxwell dans le vide ? Quelle est la relation de dispersion des ondes étudiées ? Quelle vitesse de phase pouvons-nous associer à ces ondes étudiées ?
4. Calculer l'énergie moyenne contenue dans un parallélépipède de volume $[\Delta x\ \Delta y\ \Delta z]$ avec $\Delta x = \Delta y = 1$ et $\Delta z = a$.
5. Quelle est l'énergie moyenne transportée, par unité de temps, par l'onde à travers une section de hauteur a et de largeur unité perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde ?
6. Quelle vitesse d'énergie pouvons-nous associer à cette onde ? La comparer à la vitesse de phase.

3 Corrigés

1

a.

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = 2\frac{\omega^2}{c^2}E_0\, sin(kx)sin(\omega t)$$

Et

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} = 2\omega^2 E_0\, sin(kx)sin(\omega t)$$

Donc

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}$$

Sachant que $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$ On aboutit à :

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}$$

b.

$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = -2kE_0\, cos(kx)sin(\omega t)$$

$$\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} = 2\omega B_0\, cos(kx)sin(\omega t)$$

or pour une onde plane dans le vide, $\omega = kc$

$$\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} = 2kcB_0\, cos(kx)sin(\omega t)$$

Et $E_0 = B_0 c$
on aura :

$$\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} = 2kE_0\, cos(kx)sin(\omega t) = -\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x}$$

Quant à :

$$\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} = 2kB_0\, sin(kx)cos(\omega t)$$

Et

$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} = -2\omega E_0\, sin(kx) cos(\omega t)$$

En remplaçant $kB_0 = B_0\omega/c = E_0\omega/c^2$, on aboutit à

$$-\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} = -2\frac{\omega}{c^2}E_0\, sin(kx)cos(\omega t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}$$

Et donc

$$-\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}$$

2

a. Les plans anti-nodaux du champ électrique sont situés à

$$x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4...$$

Les plans nodaux sont situés à

$$x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, 2\lambda, 5\lambda/2.$$

Pour avoir (05) plans anti-nodaux ; c'est à dire :

$$x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, 7\lambda/4, 9\lambda/4$$

La largeur calculée pour contenir (05) plans anti-nodaux, doit contenir (06) plans nodaux, est : $(5/2)\lambda = 30,5\ cm$.
Rq. Il faut toujours terminer avec un plan nodal sinon nous ne pouvons obtenir d'onde stationnaire !

b. $f = c/\lambda = 2.46.10^9\ Hz$

c. $L = 35,5\ cm$ or $\lambda_5 = 2L/5 = 14.2\ cm$
Cela implique que $f_5 = 2.11.10^9\ Hz$

3

Sachant que la distance entre deux plans anti-nodaux de $\overrightarrow{B}$ est la même qu'entre deux plans nodaux de $\overrightarrow{E}$;

$$\lambda/2 = 3.55\ mm$$

$$\lambda = 7.10\ mm$$

La distance entre deux plans nodaux de $\overrightarrow{E}$ est la même que celle de $\overrightarrow{B}$ mais les noeuds sont à des positions différentes.
La vitesse de propagation est $v = f\lambda = 1.56.10^8\ m/s$

4

I. 1. Compte tenu de $sinx = cos(\frac{\pi}{2} - x)$, le champ électrique de l'onde Ω_1 s'écrit :

$$\vec{E_1}(x,t) = E_0 cos\left(\frac{\omega}{c}x - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e_y}$$

A partir de cette expression, on constate que :
L'onde se propage suivant Ox avec $\vec{k} = \left(\frac{\omega}{c};0;0\right)$ et $\vec{u} = (1;0;0)$

2. Les expression des champs électriques des deux ondes Ω_1 et Ω_2 sont :

$$\vec{E_1}(x,t) = E_0 cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e_y}$$

$$\vec{E_2}(x,t) = E_0 cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2} + \phi\right)\vec{e_y}$$

Donc :

$$\vec{E_T}(x,t) = E_0\left[cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) + cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2} + \phi\right)\right]\vec{e_y}$$

$$\vec{E_T}(x,t) = 2E_0 cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2}\right)cos(\frac{\phi}{2})\vec{e_y}$$

3. Pour $\phi = 0$

$$\vec{E_T}(x,t) = 2E_0 cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e_y}$$

II. Les expression des champs électriques des deux ondes Ω_1 et Ω_3 :

$$\vec{E_1}(x,t) = E_0 cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e_y}$$

$$\vec{E_3}(x,t) = E_0 cos\left(-kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e_y}$$

Le champ $\vec{E_T'}$ de l'onde résultante s'écrit :

$$\vec{E_T'} = E_0\left[cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) + cos\left(-kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right]\vec{e_y}$$

$$\vec{E_T'} = 2E_0 cos(kx) cos\left(-\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e_y}$$

1. L'onde résultante est une onde stationnaire car le temps et les coordonnées d'espace ne sont plus en argument de la même fonction. L'onde ne se propage plus.
2. Les noeuds sont les emplacements dont les vibrations disparaissent par neutralisation mutuelle. Ils correspondent à $cos(kx) = 0$, soit :

$$kx = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

soit :

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

d'où :

$$x = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$$

Les ventres sont les emplacements dont les vibrations s'amplifient, par addition, le maximum possible en valeurs absolues. Ils correspondent à $cos(kx) = 1$, soit :

$$kx = n\pi$$

soit :

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi$$

d'où :

$$x = n\frac{\lambda}{2}$$

5

La superposition des deux ondes donnera

$$E_y(x,t) = E_0\left[cos(kx+\omega t) - cos(kx-\omega t)\right]$$

$$B_z(x,t) = B_0\left[-cos(kx+\omega t) - cos(kx-\omega t)\right]$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{S} &= \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E}(x,t)\times\overrightarrow{B}(x,t)\\ &= \frac{1}{\mu_0}\left[-2E_0 sin(kx)sin(\omega t)\hat{j}\right]\times\left[-2B_0 cos(kx)cos(\omega t)\hat{k}\right]\\ &= \frac{\hat{i}E_0B_0}{\mu_0}\left(2sin(kx)sin(\omega t)\right)\left(2cos(kx)cos(\omega t)\right)\end{aligned}$$

Sachant que $sin(2A) = 2sinAcosA$, on peut écrire S_x sous la forme suivante ;

$$S_x(x,t) = \frac{E_0B_0 sin(2kx)sin(2\omega t)}{\mu_0}$$

Sa moyenne en un cycle est nulle. Avec comme indication :

$$sin^2\theta = \frac{1-sin2\theta}{2}$$

$$I = S_{moy} = 0$$

6

1. Les conditions aux limites que doit vérifier le champ électrique $\overrightarrow{E}$:

$$\overrightarrow{E}(0,t) = \overrightarrow{E}(a,t) = \overrightarrow{0}$$

Donc

$$f(o) = f(a) = 0$$

Or la direction de propagation est suivant la direction des x et le champ électrique suivant y, est parallèle aux plans conducteurs situés en $x = 0$ et $x = a$, d'où

$$\overrightarrow{E}(0,t) = \overrightarrow{E}(a,t) = \overrightarrow{0}$$

On peut exprimer $\overrightarrow{B}$ à partir de la relation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Et trouver

$$\overrightarrow{B} = -\frac{E_0}{\omega}\frac{\partial f(x)}{\partial x} sin(\omega t)\hat{e_z}$$

2. Pour déterminer la fonction $f(x)$, on commence par donner l'expression de notre relation de dispersion :

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -kf(x)$$

Notre relation de dispersion est sous la forme d'une équation différentielle dont la solution est sous la forme :

$$f(x) = f_1 cos(kx) + f_2 sin(kx)$$

Sachant que nos conditions aux limites imposent $f(0) = f(a) = 0$ on aura :

$$f(0) = f_1 cos(0) = f_1 = 0$$

et

$$f(a) = f_2 sin(ka) = 0 \Rightarrow sin(ka) = 0$$

$$\Rightarrow k_m = m\frac{\pi}{a}$$

Et donc

$$\omega_m = m\frac{\pi}{a}c$$

Avec m le mode, la pulsation ω est quantifiée.

CORRIGÉS EXERCICES ABRÉGÉ

3. Les champs seront sous les expressions suivantes :

$$\overrightarrow{E} = E_0 f_2 sin(k_m x) cos(\omega_m t)\hat{e_y}$$

$$\overrightarrow{B} = -\frac{E_0 k_m}{\omega_m} f_2 cos(k_m x) sin(\omega_m t)\hat{e_z}$$

4. L'énergie électrique et magnétique emmagasinées sont :

$$e_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

et

$$e_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Cela s'écrit aussi sous la forme :

$$e_E = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} f_2^2 sin^2(k_m x) cos^2(\omega_m t)$$

$$e_B = \frac{1}{2\mu_0}\frac{E_0^2}{c^2} f_2^2 cos^2(k_m x) sin^2(\omega_m t)$$

Ces énergies emmagasinées dans un volume cylindrique d'axe (ox) situé entre les deux plans et de section S :

$$U_E = \int e_E\, dV = \int\int e_E\, dx\, dS = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{4} f_2\, a\, S\, cos^2(\omega_m t)$$

$$U_B = \int e_B\, dV = \int\int e_B\, dx\, dS = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{4} f_2\, a\, S\, sin^2(\omega_m t)$$

On constate qu'il y a échange permanent entre l'énergie électrique et l'énergie magnétique de l'onde stationnaire.
Et

$$U = U_E + U_B = \epsilon_0 \frac{E_0^2}{4} f_2\, a\, S = cste$$

L'énergie électromagnétique totale est constante.

7

I. 1. Polarisation rectiligne selon Oz

2. Direction de propagation : $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$

3. Onde transversale

4. Onde plane car les surfaces équiphases sont des plans perpendiculaires à $\vec{u}$

5. L'amplitude (E_0), la pulsation (ω), la vitesse de cette onde (c), et ($\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$)

II. L'expression du champ magnétique $\vec{B}$:

$$\vec{B_x} = \frac{E_0}{\sqrt{2}c} sin\left[\omega\left(t - \frac{x+y}{\sqrt{2}c}\right)\right]\vec{e_x}$$

$$\vec{B_y} = -\frac{E_0}{\sqrt{2}c} sin\left[\omega\left(t - \frac{x+y}{\sqrt{2}c}\right)\right]\vec{e_y}$$

$$\vec{B_z} = 0$$

$\vec{B}$ est en phase par rapport à $\vec{E}$.

III. 1. $\vec{E_{T_z}} = 2E_0 cos(\frac{\phi}{2}) sin\left[\omega\left(t - \frac{x+y}{\sqrt{2}c}\right) + \frac{\phi}{2}\right]\vec{e_z}$

2. $\phi = 0 \rightarrow \vec{E_{T_z}} = 2E_0 sin\left[\omega\left(t - \frac{x+y}{\sqrt{2}c}\right)\right]\vec{e_z}$

3. $\vec{B_T} = 2 \times \vec{B}$ de la question précédente.

IV. 1. $\vec{E_{T_z}} = 2E_0 cos\left[\frac{\omega(x+y)}{\sqrt{2}c}\right] sin(\omega t)\vec{e_z}$

2. Onde stationnaire
$E_{max} = 2E_0$ sur le plan $x+y = n\frac{\sqrt{2}\lambda}{2}$
$E_{min} = 0$ sur le plan $x+y = (2n+1)\frac{\sqrt{2}\lambda}{4}$

8

1. C'est une onde e.m progressive non plane. La propagation se fait suivant z et l'amplitude est en fonction de y. Or la condition pour avoir une onde plane est que le champ électrique sur le plan d'onde doit rester identique en tout point de ce plan. Ce n'est pas le cas, l'amplitude dépend de y, et le plan est selon xy. La condition pour que ce champ soit associé à une OEM, il suffit de vérifier la loi de Maxwell-Gauss dans le vide. $\overrightarrow{div}\,\vec{E} = 0$

$$\overrightarrow{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\pi E_0}{a} sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) exp(i(\omega t - kz))$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\alpha i k E_0 sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) exp(i(\omega t - kz))$$

donc

$$\overrightarrow{div}\,\vec{E} = -\left(\frac{\pi}{a} + \alpha i k\right) E_0 sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) exp(i(\omega t - kz))$$

Alors pour avoir $\overrightarrow{div}\,\vec{E} = 0$, il suffit de trouver α à partir de cette relation :

$$\frac{\pi}{a} + \alpha i k = 0$$

On obtient :

$$\alpha = i\frac{\pi}{ak}$$

2. Le champ électrique sous sa forme complexe sera :

$$\vec{E} = E_0\left[cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\hat{e_y} + i\frac{\pi}{ak} sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\hat{e_z}\right] exp(i(\omega t - kz))$$

3. Le champ magnétique associé est calculé à partir de

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

or

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$$

mais puisque l'onde n'est pas plane ;

$$\vec{\nabla} \neq -i\vec{k}$$

alors

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -i\omega\vec{B}$$

On obtient alors :

$$\vec{B} = -\frac{kE_0}{\omega}\left[\frac{\pi^2}{a^2k^2} + 1\right] cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) exp(i(\omega t - kz))\hat{e_x}$$

Le vecteur de Poynting, en ne considérant que les parties réelles des composantes du champ électrique et magnétique. Sachant que $e^{ix} = cosx + i\,sinx$ on aura donc :

$$\vec{E} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ E_0 cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) cos(\omega t - kz) \\ -E_0 \frac{\pi}{ka} sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) sin(\omega t - kz) \end{array}\right.$$

Et le vecteur de Poynting :

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

on obtient après calcul :

$$\vec{S} = \frac{kE_0^2}{\mu_0\omega}\left(\frac{\pi^2}{a^2k^2} + 1\right) cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\, cos(\omega t - kz) \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{\pi}{ka} sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) sin(\omega t - kz) \\ cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) cos(\omega t - kz) \end{array}\right.$$

Sachant que la moyenne temporelle est pour

$$\frac{1}{2\pi}\int cos(\theta)sin(\theta)d\theta = 0$$

et pour

$$\frac{1}{2\pi}\int cos^2(\theta)d\theta = 1/2$$

CORRIGÉS EXERCICES ABRÉGÉ

Alors :

$$\overrightarrow{S}_{moy} = \frac{kE_0^2}{2\mu_0\omega}\left[\frac{\pi^2}{a^2k^2}+1\right]cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)\hat{e_z}$$

Le vecteur est dirigé suivant z, logique puisque la propagation se fait suivant z.
La densité d'énergie ;

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

$$u = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}\left[cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)cos^2(\omega t - kz) + \frac{\pi^2}{a^2k^2}sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)sin^2(\omega t - kz)\right]$$

$$+\frac{k^2E_0^2}{2\mu_0\omega^2}\left(\frac{\pi^2}{a^2k^2}+1\right)^2 cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)cos^2(\omega t - kz)$$

Et sa valeur moyenne

$$\bar{u} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4}\left[cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \frac{\pi^2}{a^2k^2}sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right]$$

$$+\frac{k^2E_0^2}{4\mu_0\omega^2}\left(\frac{\pi^2}{a^2k^2}+1\right)^2 cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

$$\bar{u} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4}\left[cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \frac{\pi^2}{a^2k^2}sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \frac{k^2c^2}{\omega^2}\left(\frac{\pi^2}{a^2k^2}+1\right)^2 cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right]$$

4. En utilisant l'équation d'Alembert

$$\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0$$

En utilisant la composante suivant $\hat{e}_y$ de $\overrightarrow{E}$, on aura

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$$

Soit

$$\omega_0 = \frac{\pi c}{a}$$

on obtient la relation de dispersion suivante :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$$

* si $\omega > \omega_0$; Il y a propagation.
* si $\omega < \omega_0$; Alors $k^2 < 0$ et donc il n'y a pas de propagation.

5. La vitesse de phase :

$$V_\phi = \frac{\omega}{k}$$

$$V_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

La vitesse de groupe :

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

9

1. $\frac{m\pi}{a} = 87.3 m^{-1}$,
   avec $m = 2, \Rightarrow a = 7.3cm$

   $\frac{n\pi}{a} = 92.4 m^{-1}$,
   avec $n = 1, \Rightarrow b = 3.4cm$

2. $f_c = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = 6.1GHz$

3.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0 - \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.\frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

Avec : $\omega = 2\pi f = 6.8Ghz$ et $\omega_c = 2\pi f_c = 3.8 10^{10} rad/s$

On obtient : $\lambda = 3.8\ cm$

4. Le mode fondamental correspond à : $m = 1$ et $n = 0, \Rightarrow f_c = 2.1GHz$

10

1. La continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ et normale de $\vec{B}$, associée à la nullité des champs dans le métal, donnent :
   $E_T = B_N = 0$ en $x = 0$ et $x = a$, ainsi qu'en $y = 0$ et $y = b$

2. a- Dans le vide $div\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow f$ ne dépend que de x.

   b- L'équation de propagation s'écrit :
   $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) f = 0.$

   c- - Le cas où : $k^2 > \frac{\omega^2}{c^2}$; conduit à des solutions en exponentielles réelles

   - Le cas où : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$; Les solutions sont nulles partout

   - Le cas où : $k^2 < \frac{\omega^2}{c^2}$; alors : $f(x) = E_0 sinKx + E_0^{'} cosKx$, avec $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$
   $f(0) = 0$ impose $E_0^{'} = 0$, par ailleurs : $f(a) = 0 \Rightarrow sinKa = 0 \Rightarrow K = n\pi/a$

   On tient la relation de dispersion :$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$

   Donc : $\vec{E_N} = E_0 sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) exp\left[i(\omega t - kz\right] \vec{e_y}$ (cette solution est appelée mode n)

   d- Pour qu'une onde se propage, il faut que le vecteur d'onde soit réel, d'o'u :
   $\omega > \omega_{n,c} = \frac{n\pi c}{a}$ qui définit un ensemble de pulsation critique (une pulsation par mode n)
   Si $\omega < \omega_{n,c}$ alors k est imaginaire, il n'y a plus de propagation et on parle d'onde évanescente ou onde stationnaire exponentiellement amortie.

   e- On peut alors calculer la plus petite fréquence pouvant se propager, qui correspond au mode fondamental : $\omega_{1c} = \frac{n\pi c}{a} \Rightarrow f_{1c} = c/2a = 5GHz$

   f- La vitesse de phase se calcule par :

   $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}} \Rightarrow v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{n,c}}{\omega}\right)^2}} > c$

   La vitesse de phase dépend de la pulsation $\Rightarrow$ il y a dispersion : ce n'est pas le vide en soi qui est dispersif, mais bien le mode de propagation guidé(contrairement à la propagation libre)

Pour la la vitesse de groupe : on a $2kdk = 2\omega d\omega/c^2 \Rightarrow \omega/k.d\omega/dk = c^2$
Ou : $v_g.v_\varphi = c^2$ (cette relation n'est pas générale)$\Rightarrow v_g = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{n,c}}{\omega}\right)} < c$

Donc la vitesse de phase, qui est une grandeur purement mathématique, peut etre supérieure à c ; la vitesse du groupe, ou vitesse d'enveloppe, peut représenter une grandeur physique comme la vitesse de propagation de l'énergie ou la position de la crete d'un paquet d'ondes(elle doit rester inférieure à c).

3. L'onde envisagée n'étant pas plane (dépendance spatiale en x et z), on ne peut pas utiliser la relation de la structure des O.P.P.M ; donc nous nous servirons de l'équation de Maxwell-Faraday $\vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

   $\vec{B} = -\frac{E_0 k}{\omega} sin(\frac{n\pi x}{a})cos(\omega t - kz)\vec{e_x} - \frac{E_0 n\pi}{a\omega} cos(\frac{n\pi x}{a})sin(\omega t - kz)\vec{e_z}$

   Sur les parois $y = 0$ et $y = b$: la composante normale de $\vec{B}$ serait $B_y = 0$

   Sur les parois $x = 0$ et $x = a$: la composante normale de $\vec{B}$ serait $B_x = 0$

4. Calcul du vecteur de Poynting :

   $\vec{s} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_y B_z}{\mu_0}\vec{e_x} - \frac{E_y B_x}{\mu_0}\vec{e_z}$, or E_y et B_z sont en quadrature $\Rightarrow \left\langle E_y B_z \right\rangle_T = 0 \Rightarrow s_x = 0$, donc le vecteur de Poynting est suivant Oz

   $\langle \vec{s} \rangle_T = \frac{E_0^2 k}{2\mu_0 \omega} sin^2(n\pi x/a)\vec{e_z}$

   Donc :$\langle P \rangle_T = \int\int_S \vec{s}ds$ (S est le section du guide) $\Rightarrow \langle P \rangle_T = \frac{E_0^2 abk}{4\mu_0 \omega}$

   Calcul de la densité linéique d'énergie :
   $\left\langle \frac{dW_{EM}}{dz} \right\rangle_T = \left\langle \frac{\varepsilon_0 E_y^2}{2} \right\rangle_T + \left\langle \frac{B_x^2 + B_z^2}{2\mu_0} \right\rangle_T$, et par intégration sur la section $S = ab$ du guide,
   Avec $dS = bdx$ on obtient :

   $\left\langle \frac{dW_{EM}}{dz} \right\rangle_T = \frac{\varepsilon_0 ab E_0^2}{4}$

   Calcul de la vitesse de l'énergie :
   nous allons calculer l'énergie moyenne qui traverse une section du guide pen-

dant le temps dt de deux manière différentes :

-lien direct entre énergie et puissance $\langle dW_{EM}\rangle_T = \langle P\rangle_T\, dt = \frac{E_0^2 abk}{4\mu_0\omega} dt$

-La même énergie est contenue dans un cylindre de section S, de longueur

$$dl = v_E dt$$

Des photons animés de la vitesse v_E et situé au-delà de la distance dl ne pourront franchir la section choisie dans le temps imparti dt ; on écrit alors :

$$\langle dW_{EM}\rangle_T = \left\langle \frac{dW_{EM}}{dz}\right\rangle_T .v_E dt = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 ab}{4} v_E dt \Rightarrow v_E = \frac{\langle P\rangle_T}{\left\langle \frac{dW_{EM}}{dz}\right\rangle_T} = k/\varepsilon_0\mu_0\omega$$

Donc : $v_E = c^2/v_\varphi = v_g$
Nous avons obtenu un lien direct entre la vitesse de groupe et la vitesse de l'énergie. Mais pour une propagation trop dispersive, ce lien ne serait pas aussi simple.

11

1. Le champ magnétique associé est calculé à partir de

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\left[-\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{e}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{e}_z\right] \\ &= \frac{\pi E_0}{a} cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) cos(\omega t - kx)\hat{e}_x - kE_0 sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) sin(\omega t - kx)\hat{e}_z \end{aligned}$$

Et donc

$$\vec{B} = \frac{\pi E_0}{a\omega} cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) sin(\omega t - kx)\hat{e}_x + \frac{kE_0}{\omega} sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) cos(\omega t - kx)\hat{e}_z$$

2. C'est une onde e.m progressive non plane. La propagation se fait suivant x et l'amplitude est en fonction de $E_0 sin(\pi z/a)$. Or la condition pour avoir une onde plane est que le champ électrique sur le plan d'onde doit rester identique en tout point de ce plan. Ce n'est pas le cas, l'amplitude dépend de z, et le plan est selon xz. Toutefois l'onde peut être transverse.
L'onde se propage dans le vide.

$$\Rightarrow div\vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0$$

Et

$$\begin{aligned} div\vec{B} &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \\ &= -\frac{\pi k E_0}{a\omega} cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) cos(\omega t - kx) + \frac{\pi k E_0}{a\omega} cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) cos(\omega t - kx) = 0 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de désaccord avec les divergences de ces champs.

3. Pour que ces champs soient compatibles avec les équations de Maxwell, il suffit de vérifier la seule loi qui n'a pas encore été utilisé dans ce problème ; La loi de Maxwell-Ampère.

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Le calcul du rotationnel nous donne :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = E_0 sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) sin(\omega t - kx)\left[-\frac{\pi^2}{a^2\omega} - \frac{k^2}{\omega}\right]$$

Et

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -E_0 \omega sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) sin(\omega t - kx)$$

Avec

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On obtient la relation de dispersion :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}$$

La pulsation de coupure est $\omega_0 = c\pi/a$
La propagation n'est possible que pour $\omega > \omega_0$
La vitesse de phase est $V_\phi = \omega/k$, on a :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} \Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} = k^2\left(1 + \frac{\pi^2}{a^2k^2}\right)$$

Donc

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_0^2}{k^2}$$

Et

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$$

Donc

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2}}}$$

4. La densité d'énergie est sous la forme suivante :

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Rq : Ce n'est pas une onde plane $E \neq Bc$

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0\left[E_0.sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right).cos^2(\omega t - kx)\right]$$

$$+\frac{1}{2\mu_0}\left[\frac{\pi^2E_0^2}{a^2\omega^2}cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)sin^2(\omega t - kx) + \frac{k^2E_0^2}{\omega^2}.sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)cos^2(\omega t - kx)\right]$$

Sachant que $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2\left[\left(2 - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right).sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)cos^2(\omega t - kx) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)sin^2(\omega t - kx)\right]$$

La densité moyenne s'écrit :

$$u_{moy} = \frac{1}{4}\epsilon_0 E_0^2\left[\left(2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right).sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right]$$

L'énergie moyenne contenue dans un parallélépipède de volume $[\Delta x\ \Delta y\ \Delta z]$ avec
$\Delta x = \Delta y = 1$ et $\Delta z = a$:

$$U = \iiint u_{moy} dxdydz = \int_0^a \frac{1}{4}\epsilon_0 E_0^2 \left[\left(2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right).sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right] dz$$

$$U = \frac{1}{4}\epsilon_0 E_0^2 \left[\left(2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right).\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(\frac{a}{2}\right)\right]$$

$$U = U = \frac{1}{4}\epsilon_0 E_0^2 a$$

5. L'énergie moyenne transportée par unité de temps à travers une section

$$A = xyz = a$$

Pour calculer cette puissance, on doit tout d'abord obtenir l'intensité :
Le vecteur de Poynting est :

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

sa moyenne :

$$I = S_{moy} = \frac{E_0^2 k}{2\mu_0 \omega} sin^2\left(\frac{\pi z}{a}\right)$$

Et

$$P_{moy} = \int S_{moy} dA = \int_0^a S_{moy} dz = \frac{E_0^2 ka}{4\mu_0 \omega}$$

6. La vitesse d'énergie que nous pouvons associer à cette onde est :

$$V_e = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{V_\phi} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} < C$$

Bibliographie 5

1. J.P Lecardonnel et P.Tilloy, *Ondes Électromagnétiques dans les milieux matériels.* Édition Bréal 1981.

2. E.Amzallag, J.Cipriani et N.Piccioli, *Ondes Électromagnétiques et milieux.* Édition Dunod 2005

3. G.Richard, *Électromagnétisme*, Édition ellipses 2005

4. O.Picon et P.Poulichet, *Aide-mémoire Électromagnétisme*, Édition Dunod 2010