REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
الجـمـهـوريــة الجـزائـريــة الديـمـقـراطـيــة الشـعـبـيــة

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي

ECOLE SUPERIEUREENEN SCIENCES APPLIQUEES DE TLEMCEN
المـدرسـة العليـا في العلوم التطبيقيــة لتلمسان

Département de la formation préparatoire
قسم التكوين التحضيري

COURS DE PHYSIQUE 01

Auteur : HABCHI Mohammed
Grade : Maître de conférences A

Table des matières

Avant-propos

Ce fascicule, conforme aux nouveaux programmes, intitulé ***l'Essentiel du Cours de Physique I*** s'adresse aux étudiants de la première année des classes préparatoires en sciences et techniques. Il est conçu de façon à viser l'essentiel à connaître pour comprendre aisément et de la meilleure façon possible les détails du cours et des travaux dirigés du module de physique I. Ce module traite essentiellement la mécanique du point matériel avec une petite introduction à la mécanique du solide à travers le mouvement de rotation et le théorème du moment cinétique. Le contenu de ce manuscrit s'articule sur quatre chapitres du programme officiel ; Cinématique, Dynamique, Mouvement de Rotation, Travail et Énergie. Un rappel des notions fondamentales a fait l'objet d'un chapitre introductif.

Le premier chapitre est consacré à un rappel des notions fondamentales, en partant de la notion d'une grandeur physique, sa dimension, la combinaison des grandeurs physiques pour formuler des lois de la physique à travers l'analyse dimensionnelle jusqu'aux calculs d'incertitudes.

Le deuxième chapitre est réservé à la cinématique du point matériel. Le but de ce chapitre est de montrer comment peut on décrire quantitativement n'importe quel type de mouvements des particules en fonction des relations entre leur vecteurs positions, vitesses et acélérations et sans tenir compte des causes qui les produisent.

Le troisième chapitre est dédié à la dynamique du point matériel. Le contenu porte essentiellement sur la dynamique de Newton et ses trois lois ou principes indissociables : le principe de l'inertie, le principe fondamental de la dynamique et la loi des actions réciproques. Les notions de base comme la masse, la quantité de mouvement et les forces sont aussi traitées dans le cadre de ce chapitre.

Le quatrième chapitre traite les mouvements de rotation. Le théorème du moment cinétique, l'équivalent du principe fondamental de la dynamique pour les mouvements de rotation, est le point le plus important de ce chapitre. Ce dernier représente aussi une introduction à la mécanique du solide.

Le cinquième chapitre concerne la troisième méthode d'analyse qui est celle du travail et de l'énergie. Cette approche élimine le calcul de l'accélération en reliant directement la force, la masse, la vitesse et le déplacement. Nous considérons d'abord le travail d'une force et l'énergie cinétique d'une particule. Nous traitons ensuite les notions d'énergies potentielle et totale que nous appliquons au principe de conservation de l'énergie dans diverses situations pratiques.

Chapitre 1

Rappels de notions fondamentales

Sommaire

1.1 Grandeurs Physiques

Une grandeur physique est une quantité qui peut se mesurer et qui se rapporte à une propriété physique. ***Mesurer, c'est comparer*** ;

- ▷ C'est comparer une grandeur physique inconnue avec une grandeur de même nature prise comme référence, à l'aide d'un instrument.
- ▷ C'est exprimer le résultat de cette comparaison à l'aide d'une valeur numérique, associée à une unité qui rappelle la nature de la référence.

On distingue deux types de grandeurs : grandeur scalaire et grandeur vectorielle.

1.1.1 Grandeur Scalaire

Une grandeur dite ***scalaire*** est caractérisée par un ***nombre*** (intensité) et une ***unité***.

1.1.2 Grandeur Vectorielle

Une grandeur dite ***vectorielle*** est caractérisée par un ***vecteur*** et une ***unité***. Un vecteur est lui-même caractérisé par un ***sens*** et une ***norme***.

$$\overrightarrow{AB} = AB\overrightarrow{u}$$

$\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire de norme $\|\overrightarrow{u}\| = 1$ et AB la norme de du vecteur $\overrightarrow{AB}$, qui représente la longueur entre A et B.

1.2 Analyse dimensionnelle

1.2.1 Équation aux dimensions

Les grandeurs physiques se distinguent par leurs ***natures*** (longueur, force, angle...) qui sont représentées chacune par une ***dimension***. Une grandeur a une dimension si sa mesure dépend du choix d'un étalon de mesure. Par exemple :

- ▷ le volume n'a pas la même dimension qu'une longueur ; ce sont deux grandeurs de nature différente que l'on ne peut pas comparer.
- ▷ L'angle est sans dimension puisque qu'il s'agit du rapport de deux distances ; sa mesure est donc indépendante du choix de l'étalon de distance

La dimension d'une grandeur physique est une combinaison de sept dimensions ***basiques*** et ***indépendantes***. Les unités correspondantes à ces dimensions de base forment ce qu'on appelle un ***système d'unité***. Ces dimensions sont données dans le tableau ci-dessous :

Une loi physique affirme l'égalité de deux grandeurs qui doivent donc être de même dimension. Une loi physique est donc aussi une équation reliant différentes dimensions. On parle

Dimension	Symbole usuel	Unité (SI)
Masse	M	*kilogramme* (kg)
Longueur	L	*mètre* (m)
temps	T	*seconde* (s)
Intensité de courant	I	*ampère* (A)
Température thermodynamique	Θ	*kelvin* (K)
Quantité de matière	N	*mole* (mol)
Intensité lumineuse	J	*candela* (cd)

Tableau 1.1 – Dimensions de base et leur unités dans le système international (SI)

d'équation aux dimensions ; ces équations sont universelles et indépendantes des systèmes d'unités.

Une loi physique impose la contrainte d'être homogène, c'est à dire constituée de termes de même dimension. Sommer deux grandeurs de dimension différente n'a aucun sens en physique. Ainsi pour vérifier une loi physique, la première chose à faire est de vérifier l'homogénéité.

Exemples :

▷ la dimension de la vitesse $\overrightarrow{V}$ notée [V] d'un mobile, repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'obtient en fonction des dimensions de temps et de longueur par simple application de sa définition

$$\overrightarrow{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad soit \quad [V] = \frac{[OM]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

▷ de même pour la dimension $[\gamma]$ de son accélération $\overrightarrow{\gamma}$

$$\overrightarrow{\gamma} = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} \quad soit \quad [\gamma] = \frac{[V]}{[t]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$$

1.2.2 Analyse dimensionnelle

La compréhension des phénomènes physiques observés exige l'établissement de lois physique reliant tous les paramètres pertinents du phénomène en question. On peut trouver la forme de cette loi physique à l'aide d'une analyse dimensionnelle. Il faut utiliser tous les paramètres pertinents du problème et ensuite trouver une forme de la loi qui soit homogène.

Principe :

Supposons que nous cherchions à exprimer une grandeur G en fonction de 3 paramètres pertinents indépendants p_1, p_2 et p_3. On peut alors exprimer la grandeur G sous la forme :

$$G = kp_1^{\alpha}p_2^{\beta}p_3^{\gamma}$$

où k est une constante sans dimension. Il suffit de déterminer les exposant α, β et γ

Exemple :

Quelle est la période d'oscillation τ d'un pendule simple de longueur ℓ de masse m à la surface de la Terre où règne un champ de pesanteur g. On suppose que m, g et ℓ sont les paramètres pertinents du problème. On écrira alors :

$$\tau = Km^\alpha g^\beta \ell^\gamma$$

où K est un facteur sans dimension. Cela nous donne une équation aux dimensions :

$$\begin{aligned}
[\tau] &= [m]^\alpha [g]^\beta [\ell]^\gamma \\
T &= M^\alpha (LT^{-2})^\beta L^\gamma \\
&= M^\alpha L^{\gamma+\beta} T^{-2\beta}
\end{aligned}$$

d'où l'on tire par identification :

$$\alpha = 0, \beta = \frac{-1}{2}, \gamma = \frac{1}{2}$$

et donc

$$\tau = K\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

On remarque au passage que la période d'oscillation ne dépend pas de la masse.

On pourrait aussi penser que la période d'oscillation dépende de l'angle d'oscillation θ_0. Dans ce cas, on écrirait :

$$\tau = K(\theta_0) m^\alpha g^\beta \ell^\gamma$$

car θ_0 est sans dimension. L'analyse dimensionnelle donne alors :

$$\tau = K(\theta_0)\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

1.3 Calculs d'incertitudes

Une erreur de mesure, dans le langage courant, est *la différence entre la valeur donnée par la mesure et la valeur exacte (**bien souvent inconnue**) d'une grandeur*. Il est donc utile de savoir apprécier l'ordre de grandeur de la précision d'une mesure ou bien l'ordre de grandeur de l'erreur, c'est-à-dire, identifier les diverses causes d'incertitudes pour être capable soit de comparer les mérites respectifs de plusieurs méthodes, soit de fournir un intervalle de mesure correspondant à un niveau de confiance (99%, 95%,...). Pour ce dernier cas ils nous faut procéder à une analyse statistique d'une série de mesures. Malheureusement, celle-ci n'est pas réalisable si l'on ne dispose pas d'un grand nombre de mesures d'une même grandeur. Par contre, on peut procéder à un calcul d'erreurs classique développé plus bas.

1.3.1 Incertitude relative et absolue

On cherche à déterminer une grandeur physique $f(x, y \dots)$ par la mesure de $x, y \dots$. Chaque mesure est affectée d'une incertitude Δx, $\Delta y \dots$. On veut connaitre Δf, l'erreur commise sur la détermination de f, qui résulte des incertitudes sur les mesures de $x, y \dots$ .On se limitera au cas de deux variables x et y.

On appelle Δf l'***incertitude absolue*** de la mesure de f. On note le résultat $f = f_{mes} \pm \Delta f$, où $f_{mes} = f(x_{mes}, y_{mes})$ est la valeur de f obtenue à partir des mesures de x et y.

On appelle $\frac{\Delta f}{f}$ l'***incertitude relative***. Elle s'exprime sans dimension, et pourra être donnée en pourcentage.

1.3.2 Calcul d'incertitude classique

On écrit la différentielle de $f(x, y)$ en fonction des dérivées partielles par rapport à chacune des deux variables x, y :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

et on regarde dx et dy comme des petits écarts. Comme on ne sait généralement pas si ces derniers sont par excès ou par défaut, on ne peut que majorer l'incertitude sur f, soit :

$$\Delta f = |\frac{\partial f}{\partial x}| \Delta x + |\frac{\partial f}{\partial y}| \Delta y$$

Cette méthode est appelée ***propagation des erreurs*** et est applicable à tous les cas.

Exemples :

- ▷ $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \dfrac{\Delta x}{x}$.
- ▷ $f(x, y) = x^3 y^{-2} + y \quad \Rightarrow \quad \Delta f = |3x^2 y^{-2}| \Delta x + |1 - 2x^3 y^{-3}| \Delta y$
- ▷ On veut calculer un débit volumique $Q = V/T$ en mesurant le temps T mis pour remplir un récipient de volume V. Une incertitude ΔT sur le temps conduit à une incertitude
$$\Delta Q = \frac{V}{T^2} \Delta T$$
On peut en déduire que l'incertitude relative $\Delta Q/Q = \Delta T/T$
Se tromper de 10% sur T équivaut à se tromper de 10% sur Q.

Lorsque la fonction se présente comme un produit ou un quotient on peut utiliser la différentielle logarithmique. Soit par exemple :

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

On calcule d'abord :

$$\ln f = \ln(x - y) - \ln(x + y)$$

puis

$$\frac{df}{f} = \frac{d(x-y)}{(x-y)} - \frac{d(x+y)}{(x+y)}$$

La faute à ne pas commettre à ce stade est de majorer tout de suite l'erreur relative. En effet, comme x figure à la fois au numérateur et au dénominateur de f, il en résulte un couplage entre les deux termes. Ce n'est qu'après avoir regroupé les termes en dx et dy, qu'on a le droit de passer aux valeurs absolues :

$$\frac{df}{f} = \frac{d(x-y)}{(x-y)} - \frac{d(x+y)}{(x+y)} = \frac{2y}{x^2-y^2}dx - \frac{2x}{x^2-y^2}dy$$

soit

$$\frac{\Delta f}{f} = \mid \frac{2}{x^2-y^2} \mid (\mid y \mid \Delta x + \mid x \mid \Delta y)$$

1.3.3 Chiffres significatifs

Le nombre de chiffres significatifs indique la précision d'une mesure physique. Il s'agit des chiffres connus avec certitude plus le premier chiffre incertain. La précision (ou l'incertitude) avec laquelle on connait la valeur d'une grandeur dépend du mesurage (ensemble d'opérations ayant pour but de déterminer une valeur d'une grandeur). Par exemple : 1234 a quatre chiffres significatifs. Le premier chiffre incertain est le 4.

On rappelle que tous les zéros à gauche d'un nombre ne sont pas significatifs, ils indiquent l'ordre de grandeur. Par contre les zéros à droite d'un nombre sont significatifs.

- ▷ Lorsqu'il y a une virgule, le nombre de chiffre situés après le dernier 0 non significatif représente le nombre de chiffres significatifs.
  - 0,8 a un chiffre significatif
  - 0,0052 a deux chiffres significatifs
  - 0,31 a deux chiffres significatifs
- ▷ Lorsque le 0 est le dernier chiffre (donc placé à droite) , il est significatif
  - 1,200 a 4 chiffres significatifs
  - 0,0520 a 3 chiffres significatifs

Chapitre 2

Cinématique du point matériel

Sommaire

La cinématique est une subdivision de la mécanique qui s'intéresse à l'étude quantitative des mouvements des corps indépendamment des causes qui les produisent.

2.1 Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point

2.1.1 Position, déplacement et Trajectoire : Définitions

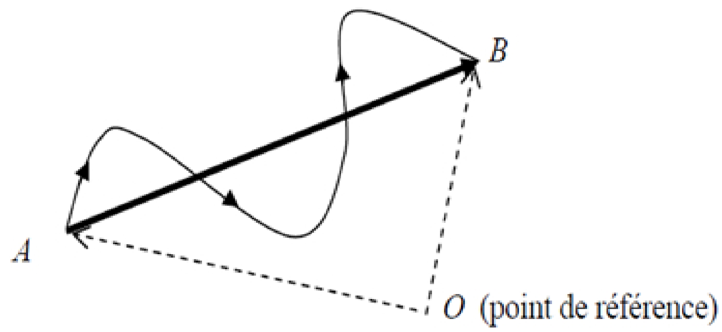

FIGURE 2.1 – Position, déplacement et trajectoire d'un point

La ***position*** d'une particule est un vecteur qui a comme origine un point de référence et comme extrémité le point où se trouve la particule. $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont les vecteurs positions de la particule au points A et B, respectivement (Figure 2.1).

Le ***déplacement*** est une grandeur vectorielle qui caractérise un changement de position. Si une particule se déplace d'un point A à un point B, le déplacement est le vecteur $\vec{AB}$. Le déplacement est indépendant du chemin parcouru pour aller de A à B.

La ***trajectoire*** d'une particule est le lieu de ses positions successives.

Remarque : A est l'origine de la trajectoire, B son aboutissement. La longueur de la trajectoire est plus grande ou égale à la longueur du déplacement entre A et B. Il y a égalité lorsque la trajectoire est rectiligne.

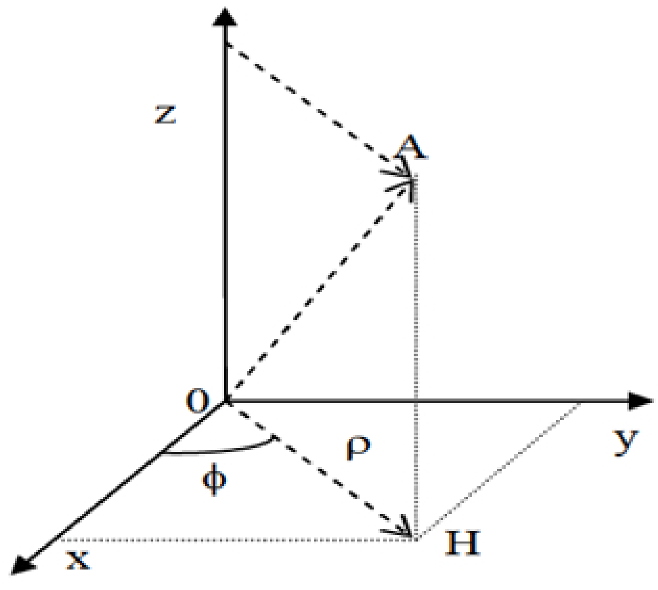

FIGURE 2.2 – Vecteur postion d'un point A

2.1.2 Vecteurs vitesse et accélération : Définitions

Soit un point A définit dans un référentiel $\Re$ par le vecteur position $\overrightarrow{OA}$ (Figure 2.2). Par définition, la vitesse du point A par rapport à $\Re$ est :

$$\overrightarrow{V}(A)_{\Re} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{\Re} \tag{2.1}$$

Son accélération est donnée par

$$\overrightarrow{\gamma}(A)_{\Re} = \left(\frac{d\overrightarrow{V}(A)_{\Re}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}\right)_{\Re} \tag{2.2}$$

Notions de Vitesse

La vitesse d'un point matériel est le rapport de son déplacement par l'intervalle de temps correspondant à ce déplacement.

Vitesse moyenne scalaire : La vitesse moyenne d'une particule est le quotient de la distance parcourue Δs entre deux positions successives, par le temps écoulé Δt.

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2.3}$$

Vitesse instantanée scalaire : On appelle vitesse instantanée scalaire, la vitesse moyenne calculée pour un intervalle de temps très petit.

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \tag{2.4}$$

Vitesse instantanée vectorielle : La vitesse instantanée vectorielle est un vecteur tangent à la trajectoire, de même sens que le mouvement et de longueur égale à la vitesse instantanée scalaire.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{2.5}$$

où $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (Figure 2.3) et $\Delta t = t_2 - t_1$

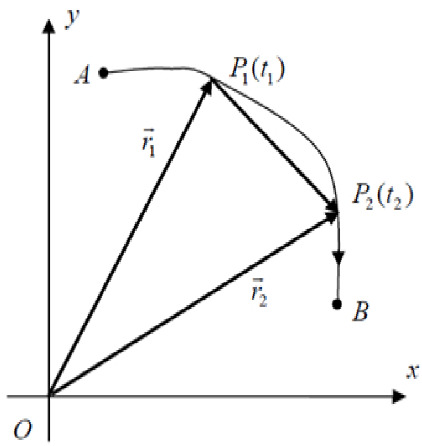

FIGURE 2.3 – Variation du vecteur position dans le temps

Notions d'Accélération

L'accélération est liée à une variation de vitesse. Cette dernière est une grandeur vectorielle. Le vecteur vitesse d'un mobile peut évoluer de plusieurs manières :

- ▷ Sa longueur varie, mais sa direction reste constante
- ▷ Sa direction varie, mais sa longueur reste constante
- ▷ Sa longueur et sa direction varient (cas général)

Accélération moyenne scalaire : On appelle accélération tangentielle moyenne pendant un intervalle de temps $t_2 - t_1 = \Delta t$ le quotient par Δt de la variation de vitesse instantanée $v(t_2) - v(t_1) = \Delta v$.

$$\gamma_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.6}$$

Accélération instantanée scalaire : l'accélération tangentielle instantanée est la limite de l'accélération tangentielle moyenne lorsque l'intervalle de temps $\Delta t \to 0$.

$$\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{2.7}$$

Accélération instantanée vectorielle : L'accélération instantanée vectorielle est la limite du quotient de la variation de la vitesse vectorielle pour un intervalle de temps trés petit.

$$\vec{\gamma} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2.8}$$

où $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ et $\Delta t = t_2 - t_1$

2.2 Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point dans les différentes bases de coordonnées

2.2.1 Coordonnées cartésiennes

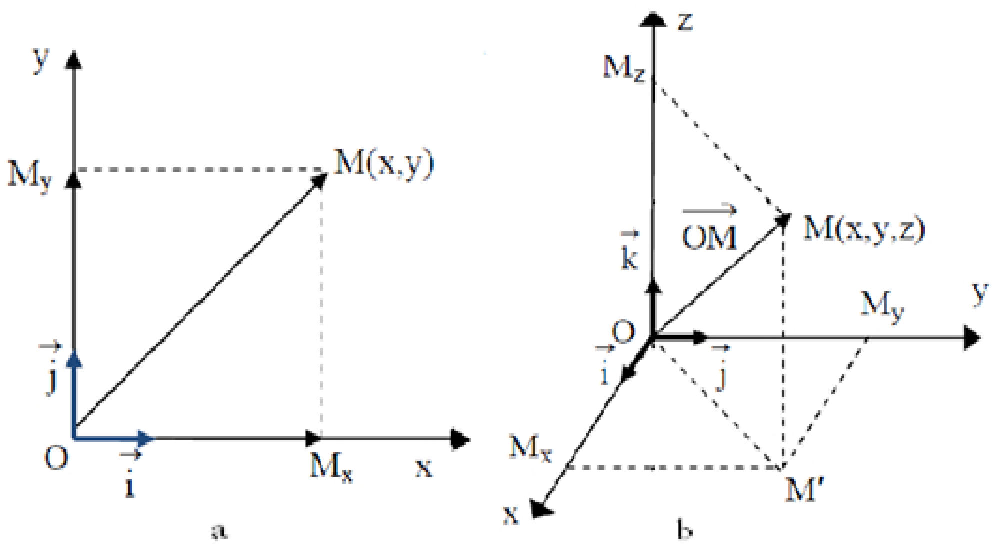

FIGURE 2.4 – Coordonnées cartésiennes : a. dans le plan   b. dans l'espace

Vecteur position

La position d'un point M est donnée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (Figure 2.4). Les composantes de ce vecteur, dans la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ correspondent alors aux coordonnées du point M :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{2.9}$$

x, y et z sont les coordonnées cartésiennes du point M.

Vecteur vitesse

À partir de l'expression du vecteur position et de la définition du vecteur vitesse on obtient :

$$\overrightarrow{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt} \tag{2.10}$$

En appliquant la règle de dérivation d'une somme, l'expression devient :

$$\overrightarrow{V} = \frac{d(x\vec{i})}{dt} + \frac{d(y\vec{j})}{dt} + \frac{d(z\vec{k})}{dt} \tag{2.11}$$

Les vecteurs de la base cartésienne sont des vecteurs indṕendants du temps. Si le point M est mobile, seules les composantes x, y et z sont des fonctions du temps : $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$. L'expression devient :

$$\overrightarrow{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{2.12}$$

Vecteur accélération

Par définition l'accéleration est :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\gamma} =& \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \\ =& \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.2.2 Coordonnées polaires

Pour positionner un point dans le repère d'étude plan, il existe un autre système de coordonnées autre que celui des coordonnées cartésiennes, appelé système de ***coordonnées polaires***. Le point M est parfaitement repéré si on connaît la distance OM et l'angle θ que fait le segment OM avec l'axe Ox (Figure 2.5).

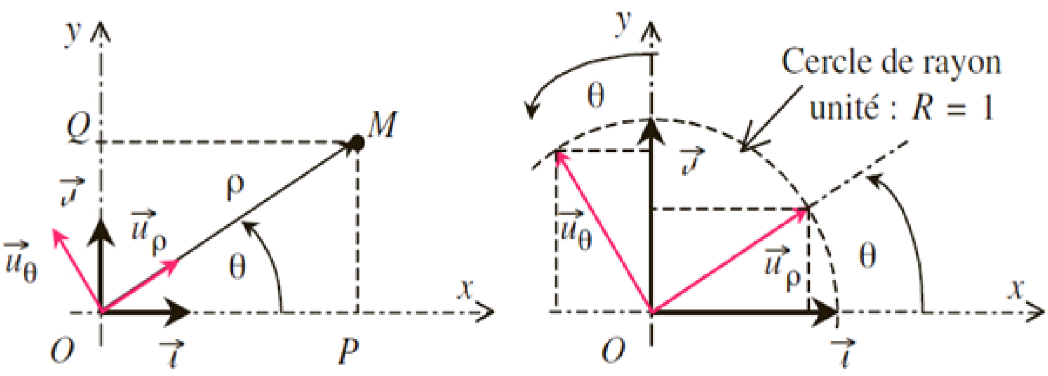

FIGURE 2.5 – Les coordonnées polaires (ρ, θ) et la base associée $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\theta})$.

- ▷ Le point origine O correspond au ***pôle*** d'où le terme coordonné polaire. La longueur du segment OM correspond à sa coordonnée ***radiale***. Elle est notée ρ ou r.

- ▷ L'autre coordonnée est la coordonnée ***angulaire*** également appelée ***angle polaire*** ou ***azimut*** et noté θ. Cet angle est mesuré par rapport à l'axe des abscisses Ox appelé alors ***axe polaire***.

La position d'un point M est donc exprimée en fonction de (ρ, θ) dans la base $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\theta})$ et les coordonnées cartésiennes x et y s'expriment comme :

$$x = \rho\ cos\theta \qquad y = \rho\ sin\theta \tag{2.14}$$

où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Le lien entre les vecteurs unitaires $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\theta})$ de la base des coordonnées polaires et ceux de la base des coordonnées cartésiennes $(\vec{i}, \vec{j})$ se fait simplement par une projection de $\vec{u_\rho}$ et $\vec{u_\theta}$ sur les axes Ox et Oy

$$\vec{u}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \tag{2.15}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \tag{2.16}$$

De même, en inversant les relations précédentes on peut écrire :

$$\vec{i} = \cos\theta\vec{u_\rho} - \sin\theta\vec{u_\theta} \tag{2.17}$$

$$\vec{j} = \sin\theta\vec{u_\rho} + \cos\theta\vec{u_\theta} \tag{2.18}$$

Vecteur position

Le vecteur position d'un point M dans les coordonnées polaire, n'est fonction que de la coordonnée radiale.

$$\overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\|\vec{u_\rho} = \rho\ \vec{u_\rho} \tag{2.19}$$

Vecteur vitesse

En partant de l'expression du vecteur position et de la définition du vecteur vitesse on obtient :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\ \vec{u_\rho})}{dt} \tag{2.20}$$

Lorsque le point M est en mouvement, l'angle polaire $\theta = \theta(t)$ est une fonction du temps. Le vecteur unitaire tourne alors au cours du temps et est donc fonction du temps par l'intermédiaire de l'angle. En appliquant la règle de dérivation d'un produit de fonction on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{V} =& \frac{d\rho}{dt}\vec{u_\rho} + \rho\ \frac{d\vec{u_\rho}}{dt} \\ =& \frac{d\rho}{dt}\vec{u_\rho} + \rho\ \frac{d\vec{u_\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\end{aligned} \tag{2.21}$$

Sachant que $\frac{d\theta}{dt} = \omega = \dot{\theta}$, $\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho}$ et $\frac{\vec{u_\rho}}{d\theta} = \vec{u_\theta}$ (voir démonstration plus bas), l'expression de $\vec{V}$ devient :

$$\vec{V} = \dot{\rho}\vec{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{u_\theta} \tag{2.22}$$

Règle de dérivation d'un vecteur unitaire par rapport à l'angle polaire : *La dérivée par rapport à l'angle polaire θ d'un vecteur unitaire (qui ne dépend que de l'angle θ) est un vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire (rotation de $\pi/2$ dans le sens positif).*

Démonstration

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u_\rho}}{d\theta} =& \frac{d(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})}{d\theta} \\ =& \frac{d(\cos\theta)}{d\theta}\vec{i} + \frac{d(\sin\theta)}{d\theta}\vec{j} \\ =& -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \\ =& \vec{u_\theta}\end{aligned}$$

De même on obtient :

$$\frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta} = -\vec{u_\rho}$$

Vecteur accélération

Par définition l'accéleration est :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\gamma} =&\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{u_\theta})}{dt}\\ =&\frac{d(\dot{\rho}\vec{u_\rho})}{dt} + \frac{d(\rho\dot{\theta}\vec{u_\theta})}{dt}\end{aligned} \tag{2.23}$$

En appliquant la règle de dérivation d'un produit de fonction on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d(\dot{\rho}\vec{u_\rho})}{dt} =&\frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{u_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\vec{u_\rho}}{dt}\\ =&\frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\vec{u_\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\\ =&\ddot{\rho}\vec{u_\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u_\theta}\end{aligned} \tag{2.24}$$

et de même

$$\begin{aligned}\frac{d(\rho\dot{\theta}\vec{u_\theta})}{dt} =&\frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \rho\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u_\theta} + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u_\rho}}{dt}\\ =&\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \rho\ddot{\theta}\vec{u_\theta} + \rho\dot{\theta}(-\vec{u_\rho})\dot{\theta}\\ =&(\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u_\theta} - \rho\dot{\theta}^2\vec{u_\rho}\end{aligned} \tag{2.25}$$

L'expression finale est obtenue en ajoutant les deux expressions

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\gamma} =& \left[\ddot{\rho}\vec{u_\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u_\theta}\right] + \left[(\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u_\theta} - \rho\dot{\theta}^2\vec{u_\rho}\right]\\ =&(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u_\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u_\theta}\end{aligned} \tag{2.26}$$

Le premier terme $(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)$ correspond à la composante radiale de l''accélération, le second $(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})$ à l'accélération orthoradiale.

Remarque : Cette expression est plus difficile à retenir que celle obtenue en coordonnées cartésiennes. Pour cette raison il faut savoir la retrouver rapidement en dérivant successivement le vecteur position puis le vecteur vitesse.

2.2.3 Coordonnées cylindriques

Pour repérer un point dans l'espace, il est possible d'utiliser les coordonnées cylindriques. Il suffit de compléter le système de coordonnées polaires par un troisième axe (Figure 2.6) ; l'axe Oz avec sa coordonnée cartésienne z (appelée la cote). La projection P du point M dans le plan (O, x, y) est repérée en coordonnées polaires (ρ, θ). La projection de M sur l'axe Oz donne la cote z. La base associée est composée de la base polaire $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\theta})$ et du vecteur unitaire $\vec{k}$ suivant l'axe Oz.

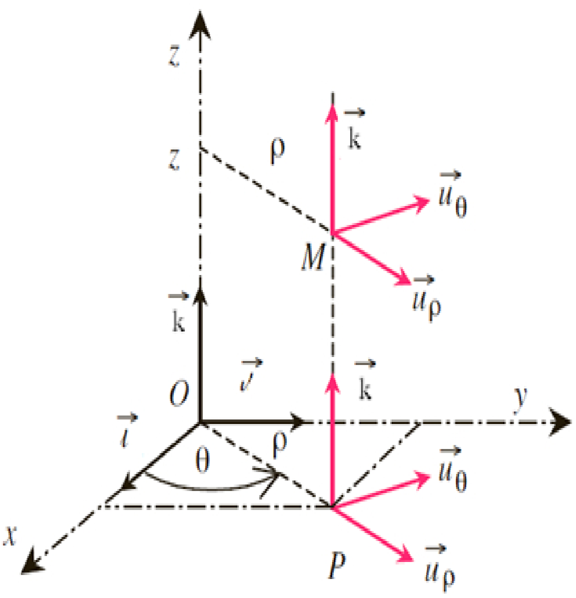

FIGURE 2.6 – Coordonnées cylindriques

Vecteur position

Le vecteur position s'obtient en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{OM}\| &= OM = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Les coordonnées cylindriques de M sont donc (ρ, θ, z). Les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont (ρ, θ, z) dans la base cylindrique $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\theta}, \vec{k})$.
Remarque : Le point M est situé sur un cylindre d'axe Oz, de rayon ρ d'où le terme coordonnées cylindriques. Pour positionner un point sur le cylindre il suffit de préciser la cote z et la coordonnée angulaire θ.

Vecteur vitesse

En dérivant l'expression du vecteur position et en tenant compte des résultats obtenus en cartésienne et en polaire, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u_\rho} + z\vec{k})}{dt} \\ &= \frac{d(\rho\vec{u_\rho})}{dt} + \frac{d(z\vec{k})}{dt} \\ &= \frac{d\rho}{dt}\vec{u_\rho} + \rho\,\frac{d\vec{u_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \\ &= \dot{\rho}\vec{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{k} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Vecteur accélération

Il suffit de rajouter la composante suivant correspondant à la dérivée par rapport au temps de la composante du vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u_\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u_\theta} + \ddot{z}\vec{k} \tag{2.30}$$

2.3 Mouvement relatif

On ne peut jamais parler de déplacement ou de vitesse absolus, pour cela on définit toujours le déplacement et la vitesse par rapport à un objet de référence qu'on suppose fixe, Donc, il faudra toujours spécifier un objet fixe (ou supposé fixe) qui sert de référence et qu'on appelle référentiel.

2.3.1 Composition des déplacements

Soit un ouvrier assis sur le côté droit d'une benne de camion. S'il traverse la benne du côté droit vers le côté gauche, il effectue un déplacement $\overrightarrow{D}_1$ par rapport au référentiel $\Re_1$ du camion. En avançant, le camion effectue un déplacement $\overrightarrow{D}_2$ par rapport au référentiel $\Re_2$ du sol (voir Figure 2.7). Si les deux bougent en même temps, le déplacement de l'ouvrier par rapport au sol vaut $\overrightarrow{D}_1 + \overrightarrow{D}_2$.

Règle : Si un mobile se déplace de $\overrightarrow{D}_1$ par rapport au référentiel $\Re_1$ qui se déplace lui même de $\overrightarrow{D}_2$ par rapport à un autre référentiel $\Re_2$, le déplacement du mobile par rapport au référentiel $\Re_2$ sera égal à :

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{D}_1 + \overrightarrow{D}_2$$

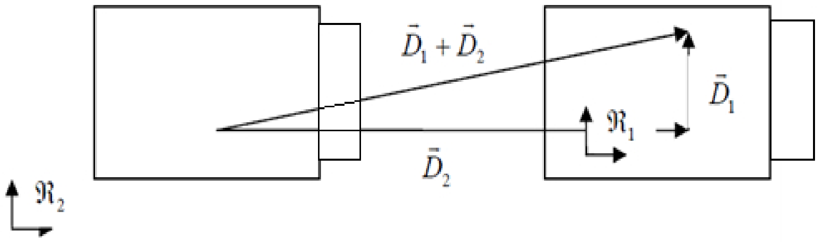

Figure 2.7 – Composition des déplacements d'un ouvrier sur la benne d'un camion

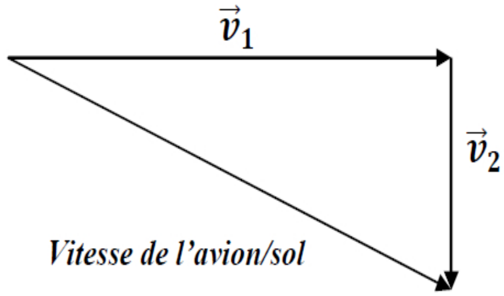

Figure 2.8 – Composition des vitesses

2.3.2 Composition des vitesses

Soit un chalutier se déplaçant à une vitesse v_1 dans une direction donnée. Il subit un courant de travers de vitesse v_2. On peut fixer le référentiel $\Re_1$ par rapport au courant et le référentiel $\Re_2$ par rapport au sol. Le chalutier se déplace à la vitesse v_1 par rapport à $\Re_1$ et le courant à la vitesse v_2 par rapport à $\Re_2$ (Figure 2.8).

Comme les déplacements, les vitesses se composent vectoriellement. La vitesse du chalutier par rapport au sol sera égale à la somme vectorielle des deux vitesses $\overrightarrow{v}_{chalutier/sol}\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$.

Règle : Si un mobile se déplace à une vitesse $\overrightarrow{v}_1$ par rapport au référentiel $\Re_1$ qui se déplace lui-même à une vitesse $\overrightarrow{v}_2$ par rapport à un autre référentiel $\Re_2$, la vitesse du mobile par rapport au référentiel $\Re_2$ sera égal à :

$$\overrightarrow{v}_{mobile/\Re_2} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 \tag{2.31}$$

Pour éudier la composition des vitesses dans le cas général, Nous procédons par la détermination des caractéristiques du mouvement d'un point par rapport à l'un des référentiels lorsqu'il est connu dans l'autre référentiel (Figure 2.9). Pour cela, nous considérerons les vecteur positions $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{O'M}$, en coordonnées cartésiennes, du mobile M dans les deux repères :

- ▷ $\Re(O, x, y, z)$, supposé fixe, appelé ***repère absolu*** ;
- ▷ $\Re'(O', x', y', z')$, en mouvement quelconque par rapport à $\Re$, appelé ***relatif***.

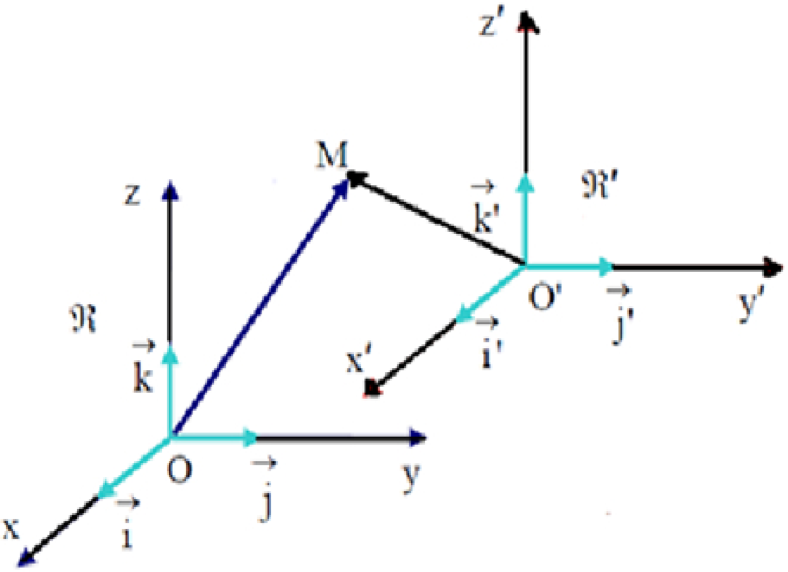

FIGURE 2.9 – Caractéristiques du mouvement dans les deux repères

Le mouvement absolu

Les caractéristiques du mouvement de M par rapport au repère absolu $\Re(O, x, y, z)$ sont données par les grandeurs suivantes :

a. Le vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{2.32}$$

b. Le vecteur vitesse absolue

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}|_{\Re} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{2.33}$$

c. Le vecteur accélération absolue

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d\vec{V_a}}{dt}|_{\Re} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \tag{2.34}$$

Remarque : les dérivations sont effectuées dans $\Re$ dans lequel la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est invariable.

Le mouvement relatif

Le même mouvement est considéré cette fois-ci par rapport au repère relatif $\Re'(O', x', y', z')$. Ses grandeurs caractéristiques sont données par :

a. Le vecteur position

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,' \tag{2.35}$$

b. Le vecteur vitesse relative

$$\vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}|_{\Re'} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}\,' \tag{2.36}$$

c. Le vecteur accélération relative

$$\vec{\gamma}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt}|_{\Re'} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}\,' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}\,' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}\,' \tag{2.37}$$

Remarque : les dérivations sont effectuées dans $\Re'$ dans lequel la base $(\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ est invariable.

Composition des vecteurs vitesses

Par définition, la vitesse absolue du point M est :

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}|_{\Re} \tag{2.38}$$

La relation de Chasles permet d'écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \tag{2.39}$$

Si on dérive par rapport au temps, en tenant compte du fait que la base $(\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ peut varier dans $\Re$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_a =& \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i}\,' + x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{j}\,' + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{k}\,' + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt} \\
=& \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}\,'\right) + \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right) \\
=& \vec{V}_r + \vec{V}_e
\end{aligned} \tag{2.40}$$

La grandeur $\overrightarrow{V}_e = \left(\frac{\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right)$ est appelée ***vitesse d'entraînement*** et représente la vitesse du repère $\Re'$ par rapport au repère $\Re$. Son expression comprend deux termes :

- ▷ $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \overrightarrow{V_a(O')}$ représente la vitesse de translation de l'origine O' par rapport à $\Re$.
- ▷ $x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}$ traduit le changement d'orientation du référentiel mobile $\Re'$.

2.3.3 Composition des accélérations

Si on dérive le vecteur vitesse absolue par rapport au temps, on obtient le vecteur accélération absolue défini dans le repère $\Re$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\gamma}_a &= \frac{d\overrightarrow{V}_a}{dt}|\Re \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}\,' + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right) \\
&= \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}\,' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}\,' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}\,'\right) + \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}\right) \\
&\quad + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right) \\
&= \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Cette expression fait apparaître trois termes

- ▷ $\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}\,' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}\,' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}\,'\right)$ représente l'accélération relative
- ▷ $\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}\right)$ représente l'accélération d'entrainement
- ▷ $2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right)$ représente l'accélération de ***Coriolis***

Chapitre 3

Dynamique du point matériel

Sommaire

La dynamique est la subdivision de la mécanique qui s'intéresse à l'étude des mouvements des corps en relation avec les causes, appelées Forces, qui les produisent.

Lorsque la vitesse d'une particule ou d'un point matériel varie soit en norme ou en direction, nous déduisons qu'il y a une raison qui a causé cette variation. L'expérience montré que la variation de la vitesse est causée par une interaction entre la particule et le milieu qui l'entoure.

Une particule se met en mouvement ou s'arrête de se mouvoir sous l'action d'une force.

La relation reliant interaction et accélération a été énoncée par ***Isaac Newton (1642-1727)*** en ***1686*** dans les ***Philosophiae Naturalis Principia Mathematica***. La dynamique de Newton ajoute à la cinématique (espace-temps) deux notions fondamentales, la ***masse*** et la ***force***.

3.1 Notions de base

3.1.1 Notion de Masse

Il est plus difficile de communiquer une vitesse à un ballon de football qu'à une balle de tennis. La vitesse d'un corps ne suffit pas pour décrire son mouvement. Il faut introduire une quantité caractérisant la ***résistance*** du corps à toute modification de son mouvement, c'est-à-dire son ***inertie***. Nous admettons qu'il est possible d'associer à un point matériel un scalaire positif, m, qui est sa masse. cette dernière représente la quantité de matière contenue dans la forme géométrique de l'objet considéré et elle est supposée indépendante de l'état du mouvement du point matériel et du référentiel choisi. Si la distribution de la quantité de matière est uniforme (distribution homogéne), la masse de l'objet est calculée à partir de l'élément de masse dm comme suit :

- ▷ $dm = \rho dv$, où ρ est la densité de masse volumique,
- ▷ $dm = \sigma ds$, où σ est la densité de masse surfacique,
- ▷ $dm = \lambda dl$, où λ est la densité de masse linéique

3.1.2 Notion de Force

Considérons un point dont le mouvement n'est pas rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen (son accélération est différente de 0). Pour expliquer un tel mouvement, on admet que le point n'est pas isolé : il est soumis à une ***interaction***. L'expérience montre que toutes les interactions peuvent être décrites par une grandeur vectorielle que nous appellerons ***Force***.

La force est donc, une interaction qui entraîne une accélération de la particule, c'est-à-dire un changement de sa vitesse. L'action de plusieurs forces sur une même particule est la même que celle de la somme vectorielle de ces forces (la résultante des forces).

3.2 Première loi de Newton ou Principe de l'inertie

3.2.1 Enoncé historique

Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, sauf si des forces imprimées le contraignent d'en changer.

3.2.2 Enoncé actuel

Il existe un référentiel d'inertie (ou galiléen) par rapport auquel une particule isolée, c'est-à-dire soustraite à toute action extérieure, est, soit immobile, soit en mouvement rectiligne uniforme.

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0} \tag{3.1}$$

La propriété ci-dessus constitue une définition des repères galiléens et le principe d'inertie postule leur existence. Le caractère spécifique des référentiels galiléens apparaît dans le fait que les lois de la mécanique et notamment le Principe Fondamental ne sont valables que dans de tels référentiels. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est aussi un référentiel d'inertie.

Interprétation de l'énoncé

Si la somme des forces agissant sur une particule est nulle :

- ▷ la particule au repos, reste au repos
- ▷ la particule en mouvement continue à se mouvoir en mouvement uniforme rectiligne.

Conséquence de l'énoncé

Un objet est en équilibre si $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$. C'est une condition nécessaire pour l'état d'équilibre, mais insuffisante.

Référentiels de Copernic et de Galilée

On introduit le ***référentiel de Copernic*** qui a, par définition son origine au barycentre du système solaire ; ses axes sont définis par les directions de trois étoiles très éloignées (dites fixes). Un repère galiléen est un repère en translation rectiligne et uniforme dans le repère de Copernic. Nous pouvons, par exemple, définir la surface de la Terre comme un référentiel d'inertie, mais seulement à condition de négliger le mouvement de la Terre.

3.3 Deuxième loi de Newton ou Principe fondamental de la dynamique

3.3.1 Enoncé historique

Le changement de mouvement est proportionnel à la force appliquée et s'effectue suivant la droite par laquelle cette force est appliquée, ou encore et plus précisément, le taux de variation de la quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ *d'un point matériel en chaque instant est égal à la résultante des forces qui s'exercent sur lui.*

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} \tag{3.2}$$

Quantité de mouvement

La quantité de mouvement, parfois appelé ***Impulsion***, pour un point matériel de masse m et de vitesse $\overrightarrow{V}$ par rapport à $\Re$ est :

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{V} \tag{3.3}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\sum \overrightarrow{F}_{ext} &= \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}\\ &= \frac{dm\overrightarrow{v}}{dt}\end{aligned}$$

soit si la masse m est constante :

$$= m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = m\overrightarrow{\gamma} \tag{3.4}$$

3.3.2 Enoncé actuel

Dans un référentiel galiléen $\Re$*, le mouvement d'un point matériel A de masse m soumis à plusieurs forces extérieures, dont la somme est* $\sum \overrightarrow{F}$*, satisfait la relation :*

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = m\overrightarrow{\gamma} \tag{3.5}$$

Remarque : La somme des forces intérieures appliquées à un point matériel ou un objet solide est nulle. Dans le cas contraire, il s'animerait d'un mouvement ou se déformerait.

3.4 Troisième loi de Newton ou Principe des actions réciproques

Soit deux points matériels M_1 et M_2 en interaction. Les forces d'interaction $\overrightarrow{F}_{12}$ et $\overrightarrow{F}_{21}$ sont opposées et colinéaires à l'axe (M_1M_2). Ce principe des actions réciproques, nommés principe de l'action et de la réaction, se traduit par : $\overrightarrow{F}_{12} = -\overrightarrow{F}_{21}$.

3.4.1 Enoncé

Lorsque deux systèmes S_1 et S_2 sont en interaction, quel que soit le référentiel d'étude et quel que soit leur mouvement (ou l'absence de mouvement), l'action du système $S1$ sur le système $S2$ est exactement opposée à l'action simultanée du système $S2$ sur le système $S1$.

Remarque :Ce principe est universel. Il s'applique aussi bien aux interactions à distance qu'aux interactions de contact, à l'échelle de l'univers comme à l'échelle des particules.

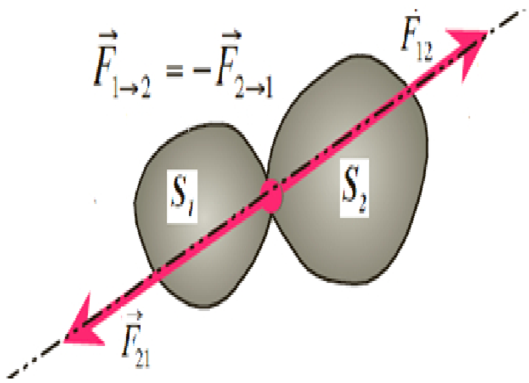

FIGURE 3.1 – Actions réciproques

3.5 Loi de gravitation universelle

3.5.1 Enoncé

Tous les objets dans l'univers s'attirent

La force exercée entre deux objets de masses m_1 et m_2 distants de r est donnée par la ***loi de gravitaion universelle*** :

$$\overrightarrow{F}_{21} = -G\frac{M_1M_2}{r^2}\vec{u} \tag{3.6}$$

où $G = 6.67\ 10^{-11} Nm^2/kg^2$.

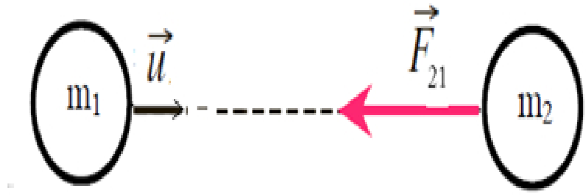

FIGURE 3.2 – Gravitation universelle

La loi de gravitation universelle, appelée aussi ***loi fondamentale de la nature***, associée aux trois lois précédentes a permis à Newton de modéliser le mouvement des planètes.

Attraction gravitationnelle entre corps

soit deux masses de $10kg$ chacune distantes de $0.1m$
- ▷ Que vaut l'attraction gravitationnelle ?
- ▷ Que vaut le rapport entre cette attraction et le poids d'une des deux masses ?

$$\begin{aligned} F_g &= G\frac{M.M}{r^2} \\ &= 6.67\ 10^{-7}N \\ P &= mg \\ &= 98.1N \end{aligned} \tag{3.7}$$

Le rapport vaut :

$$\frac{F_g}{P} = 6.81\ 10^{-9} \tag{3.8}$$

L'attraction gravitationnelle n'est pas remarquable entre objets ordinaires.

Relation entre g et G

La force d'attraction gravitationnelle entre la planète $Terre$ et une masse m sur sa surface n'est autre que le poids de la masse m :

$$p = G\frac{M_T m}{(R_T + r)^2}$$

où r, la distance de la surface de la Terre au centre d'inertie de m, est négligeable devant R_T

$$= mG\frac{M_T}{R_T^2}$$
$$= mg \tag{3.9}$$

d'où :

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2} \tag{3.10}$$

3.6 Quelques forces particulières

3.6.1 La force gravifique ou le Poids

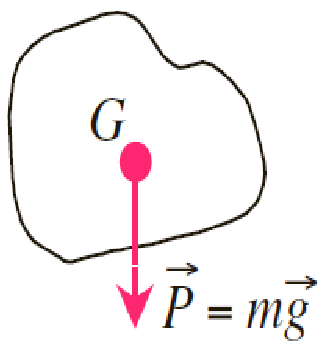

FIGURE 3.3 – Force gravifique

La force gravifique ou le poids est notée $\overrightarrow{F}_g$ ou $\overrightarrow{P}$ sur une masse m est dirigée vers le centre de la Terre et vaut $\overrightarrow{F}_g = m\overrightarrow{g}$ où $\overrightarrow{g}$ est l'accélération dans une chute libre. Cette force gravifique agit toujours, même si la particule n'est pas en chute libre; autrement dit, *il faudrait supprimer la Terre pour l'enlever!*.

3.6.2 La force de réaction normale

La force de réaction normale est notée $\overrightarrow{N}$. Quand un corps pèse sur une surface, cette dernière se déforme et réagit par une force normale à la surface.

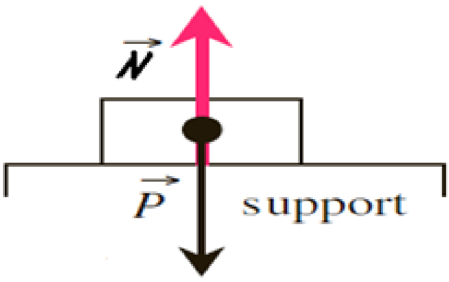

FIGURE 3.4 – Réaction Normale

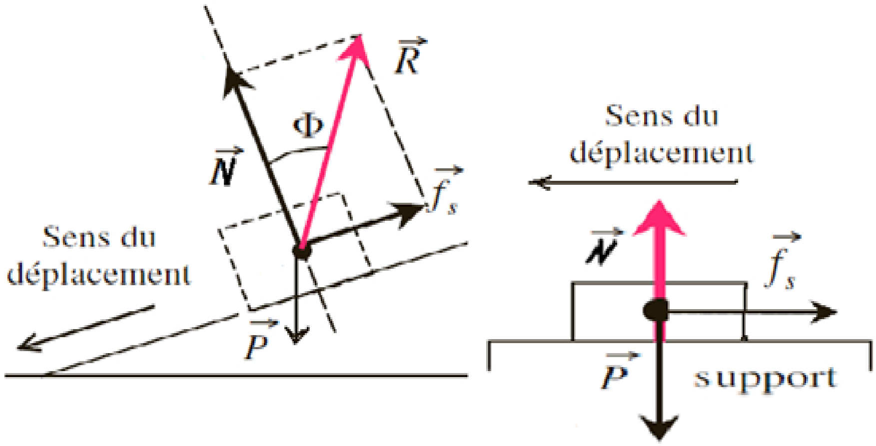

FIGURE 3.5 – Force de frottement

3.6.3 La force de frottement

La force de frottement est notée $\vec{f}$. Quand nous faisons glisser un bloc sur une surface, ou tentons de le faire, une force de frottement apparaît. Elle est proportionnelle à la charge (le poids) mais indépendante de la surface de contact.

Dire que la force de frottement est proportionnelle à la charge (au module de la force de réaction normale) est acceptable, mais qu'elle soit indépendante de la surface de contact ! En réalité, les surfaces ne sont pas lisses au niveau microscopique, les aspérités étant de l'ordre de 10^{-5}-$10^{-4}mm$; les deux surfaces se touchent aux sommets des aspérités : la surface réelle de contact est beaucoup plus petite que la surface macroscopique.

L'expérience montre qu'il faut exercer une *force minimale* pour *commencer à faire glisser* un objet sur une surface ; cette force est a la frontière de l'équilibre statique, donc elle est en même temps la *force maximale* assurant *l'équilibre statique*. Si l'objet n'est pas en mouvement, la force est appelée ***frottement statique*** $\vec{f}_s$ qui s'oppose à la force appliquée

$\overrightarrow{F}_{app} = -\overrightarrow{f}_s$. Si la force appliquée devient plus intense, l'objet commence à glisser et est alors soumis au ***frottement cinétique*** ou ***dynamique*** $\overrightarrow{f}_c$. Nous distinguons donc deux coefficients de frottement :

- ▷ le coefficient de frottement statique μ_s : $f_s(max) = \mu_s N$,
- ▷ le coefficient de frottement cinétique μ_c : $f_c = \mu_c N$
- ▷ $\mu_s > \mu_c$ d'où l'intérêt de l'ABS pour l'adhérence des voitures sur la route.

3.6.4 La tension

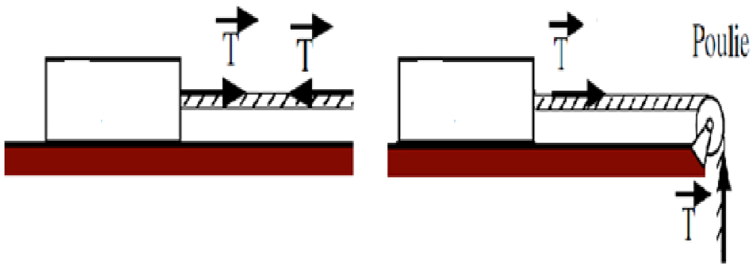

FIGURE 3.6 – Tension du fil

Elle est notée $\overrightarrow{T}$. La tension d'une corde est la force exercée par chaque partie de la corde sur la partie voisine ou sur un objet placé à son extrémité. Si la masse de la corde est négligeable, la tension dans la corde a la même valeur en tout point.

3.6.5 La force de rappel d'un ressort

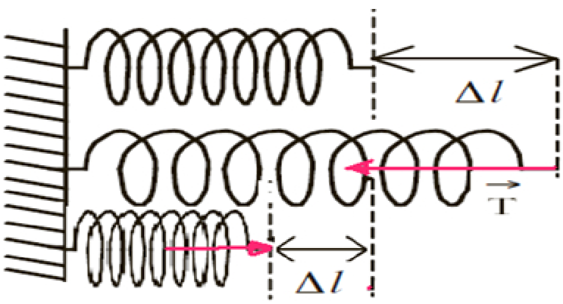

FIGURE 3.7 – Force de rappel

Elle est notée $\overrightarrow{F_r}$ et est appelée aussi la tension du ressort $\overrightarrow{T}$. Un ressort peut travailler en compression ou en extension selon la déformation qu'on lui impose par rapport à sa position d'équilibre 0 :

La tension du ressort $\overrightarrow{T}$ s'oppose à la déformation, son expression vectorielle est donnée par :

$$\overrightarrow{T} = -k.x.\vec{i} \tag{3.11}$$

Dans cette expression, k représente la **constante de raideur** du ressort et x représente la valeur algèbrique de son allongement Δl.

Chapitre 4

Mouvement de rotation

Sommaire

Dans les mouvements de rotation il est plus judicieux d'utiliser un autre théorème que le *principe fondamental de la dynamique* ou le *théorème de l'énergie cinétique* : ce théorème s'appelle le *théorème du moment cinétique*. Nous allons donc introduire de nouvelles notions au lieu de celles utilisées dans les lois de Newton. Pour traiter un mouvement de rotation, il est donc préférable d'utiliser les moments des quantités précédemment utilisées :

- ▷ La ***force*** $\vec{F}$ sera remplacée par le ***moment de la force*** $\overrightarrow{\mathscr{M}(\vec{F})}$
- ▷ La ***quantité de mouvement*** $\vec{p}$ sera remplacée par le ***moment cinétique*** $\overrightarrow{\mathscr{L}(M)}$ qui est tout simplement le ***moment de la quantité de mouvement***
- ▷ La ***masse inertielle*** m sera remplacée par le ***moment d'inertie*** I_Δ

Remarque : *même si on ne s'intéressera principalement qu'à la mécanique du point dans ce chapitre, une petite parenthèse se fera sur la mécanique du solide en parlant du moment d'inertie et de sa signification.*

Le moment cinétique est une grandeur fondamentale en mécanique. Il joue un rôle important notamment dans les systèmes en rotation. Le théorème du moment cinétique découle directement du principe fondamental de la dynamique et, par conséquent, ne possède pas plus d'information. En revanche il permet de dégager rapidement une intégrale première du mouvement dans le cas des systèmes à force centrale par exemple.

4.1 Rappel sur le produit entre deux vecteurs

4.1.1 Notion de vecteur

Un vecteur est une grandeur qui a une intensité, une direction et un sens. Il est commode de le représenter par une flèche.

4.1.2 Le produit scalaire

Le produit scalaire est une opération algébrique s'appliquant aux vecteurs. à deux vecteurs, elle associe leur produit, qui est un nombre (ou scalaire, d'où son nom). Elle permet d'exploiter les notions de la géométrie euclidienne traditionnelle : longueurs, angles, orthogonalité.

Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs, alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est défini ainsi :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz' \tag{4.1}$$

Le produit scalaire permet aussi de mesurer l'angle compris entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant le même point initial (point de départ du vecteur). Les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ forment un triangle. L'angle α au point A est donné par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{xx' + yy' + zz'}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} \tag{4.2}$$

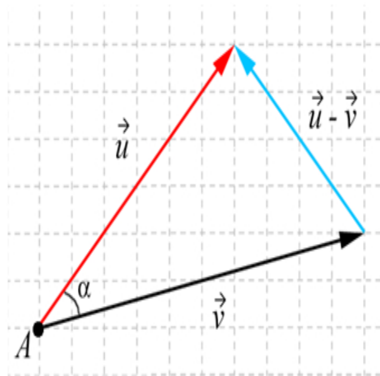

FIGURE 4.1 – Angle entre deux vecteurs

4.1.3 Le produit vectoriel

Le produit vectoriel est une opération vectorielle effectuée dans les espaces euclidiens orientés de dimension 3 (il n'existe pas en 2 dimensions).

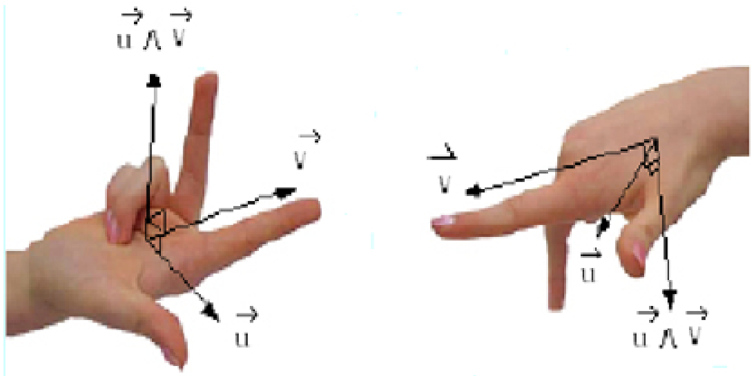

FIGURE 4.2 – Orientation du produit vectoriel

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(\acute{x}, \acute{y}, \acute{z})$ formant un angle α. Par définition, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

- ▷ la direction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonale à chacun des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- ▷ le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ donne au triplet $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ une orientation directe ; cette orientation est donnée par la règle des trois doigts de la main droite (pouce, index, majeur), illustrée dans la figure 4.2

  Remarque : Le premier vecteur $\vec{u}$ est attribué au **pouce**, le deuxième vecteur $\vec{v}$ est attribué au **l'index** et le résultat $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est attribué au **majeur**.

▷ la norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|| \sin\theta|$

Le produit vectoriel de $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ est le vecteur :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k} \tag{4.3}$$

4.2 Moment d'une force

4.2.1 Moment d'une force par rapport à un point O

Soit une force $\vec{F}$ appliquée en un point M. Alors son moment $\overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F})}$ par rapport au point O est défini par :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \tag{4.4}$$

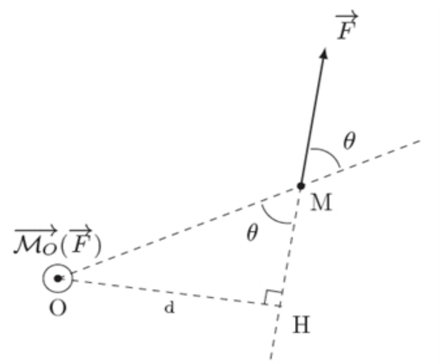

Figure 4.3 – Moment d'une force par rapport à un point

Sens du vecteur moment : le vecteur moment semble venir vers nous dans la figure ci-dessus : ce sens est obtenu par le fait que la base $(\overrightarrow{OM}, \vec{F}, \overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F})})$ est directe. Pour le retrouver, on peut utiliser les trois doigts de la main droite (pour former le trièdre) ou la règle du tire-bouchon.

On peut également exprimer le module de ce moment de force en fonction de l'angle θ :

$$\|\overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F})}\| = \|\overrightarrow{OM}\|\|\vec{F}\| \sin\theta \tag{4.5}$$

Le moment d'une force s'exprime donc en $N.m$.

Notion de bras de levier Le bras de levier est la distance $d = OH$, où H est le ***projeté orthogonal*** de O sur la ***droite d'action de la force*** $\overrightarrow{F}$. Sur la figure 4.3, on voit que le $\sin\theta$ peut être relié au bras de levier. En effet :

$$\sin\theta = d/OM \Rightarrow OM\sin\theta = d \tag{4.6}$$

Ainsi l'expression de la norme du moment devient :

$$\|\overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F})}\| = d.F \tag{4.7}$$

Elle ne dépend que du bras de levier. Cela peut être une méthode de calcul du moment, en associant cette expression à la règle de la main droite ou du tire-bouchon pour connaître le sens du vecteur moment.

4.2.2 Moment de force en $O^{'}$ différent de O

Le moment de la force dépend du point où on le calcule. On peut établir une relation entre le moment de la force en un point $O^{'}$ et celui en un point O :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{M}_{O'}(\vec{F})} =& \overrightarrow{O^{'}M} \wedge \overrightarrow{F} \\
=& (\overrightarrow{O^{'}O} + \overrightarrow{OM}) \wedge \overrightarrow{F} \\
=& \overrightarrow{O^{'}O} \wedge \overrightarrow{F} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} \\
=& \overrightarrow{O^{'}O} \wedge \overrightarrow{F} + \overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F})} \\
\Rightarrow \overrightarrow{\mathscr{M}_{O'}(\vec{F})} =& \overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F})} + \overrightarrow{O^{'}O} \wedge \overrightarrow{F}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.2.3 Moment d'une force par rapport à un axe

Cette grandeur n'est plus un vecteur mais une grandeur algébrique. Considérons un axe (Δ) muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ et soient O un point de cet axe et $\vec{F}$ une force dont on connaît le moment $\overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F})}$ par rapport à O. Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe (Δ) est :

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F})}.\vec{u}_\Delta \tag{4.9}$$

Il est la projection du moment $\overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F})}$ de $\vec{F}$ par rapport à un point de l'axe sur celui-ci (Figure 4.4).

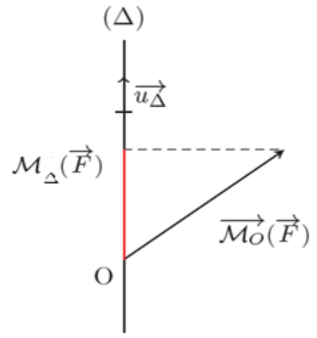

FIGURE 4.4 – Moment d'une force par rapport à un axe

4.3 Moment cinétique

4.3.1 Moment cinétique par rapport à un point O

Considérons un point matériel M de masse m, animé d'une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un référentiel $\Re$. Par définition, le moment cinétique de M en un point O est le vecteur :

$$\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} \tag{4.10}$$

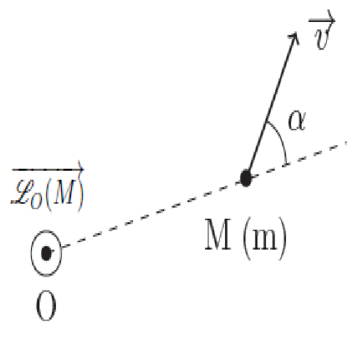

FIGURE 4.5 – Moment cinétique par rapport à un point

Sens du vecteur moment : Comme pour le vecteur moment d'une force, le sens du vecteur moment cinétique est donné par la règle de la main droite ou la règle du tire-bouchon

La norme du moment cinétique en fonction de l'angle que forme la droite (OM) et le vecteur $\vec{v}$ est donnée par :

$$\|\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)}\| = \|\overrightarrow{OM}\|.\|\overrightarrow{p}\| \sin\alpha = OM.mv.\sin\alpha \tag{4.11}$$

Le moment cinétique s'exprime donc en $kg.m^2.s^{-1}$

4.3.2 Moment cinétique en $O^{'}$ différent de O

Avec le même raisonnement que celui utilisé pour le moment d'une force, on a :

$$\overrightarrow{\mathscr{L}_{O'}(M)} = \overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} + \overrightarrow{O^{'}O} \wedge m\overrightarrow{v} \tag{4.12}$$

4.3.3 Moment cinétique par rapport à un axe

En faisant un parallèle avec ce qui a été vu sur le moment d'une force, si (Δ) est un axe muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, le moment $\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)}$ par rapport à l'axe (Δ) est :

$$\mathscr{L}_\Delta(M) = \overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)}.\vec{u}_\Delta \tag{4.13}$$

O est un point de (Δ)

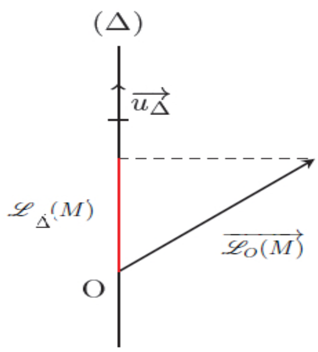

FIGURE 4.6 – Moment cinétique par rapport à un axe

C'est la projection du moment $\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)}$ par rapport à un point de l'axe sur celui-ci.

4.3.4 Exemple du moment cinétique en coordonnées polaires

Soit un point M se déplaçant dans un mouvement circulaire par rapport au référentiel $\Re$.

— Sa position en coordonnées polaires est : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho$
— Sa vitesse est : $\overrightarrow{v} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

la composante suivant $\dot{\rho}$ est nulle puisque ρ est constant (mouvement circulaire). Son moment cinétique s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} &= \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} \\ &= \rho\vec{u}_\rho \wedge m\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ &= m\rho^2\dot{\theta}\vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta \\ &= m\rho^2\dot{\theta}\vec{k} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Le moment cinétique est selon $\vec{k}$.

4.4 Théorème du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique pour les mouvements de rotation c'est l'équivalent du principe fondamental de la dynamique. Au lieu calculer la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement $\frac{d\vec{p}}{dt}$, nous calculons la dérivée du moment cinétique $\frac{d\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)}}{dt}$.

4.4.1 Par rapport à un point O

Soit O un point fixe du référentiel d'étude $\Re$:

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} = \sum_i \overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F}_i)} \tag{4.15}$$

énoncé

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point O est égale à la somme des moments des forces par rapport à O appliquées à ce point M.

Démonstration

Ce théorème est une conséquence directe du principe fondamental de la dynamique. On dérive l'expression du vecteur moment cinétique, donc le produit vectoriel :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} &= \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}) \\ &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\overrightarrow{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\end{aligned}$$

Or

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{v} \quad et \quad m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = m\overrightarrow{\gamma} = \sum_i \overrightarrow{F}_i$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} &= \overrightarrow{v} \wedge m\overrightarrow{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \sum_i \overrightarrow{F}_i \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge \sum_i \overrightarrow{F}_i\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{v} \wedge m\overrightarrow{v} = 0$ ($\overrightarrow{v}$ *et* $m\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires*)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} &= \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}_i \\ &= \sum_i \overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F}_i)} \qquad (4.16)\end{aligned}$$

4.4.2 Par rapport à un axe

L'expression du théorème du moment cinétique par rapport à un axe s'obtient aisément. il suffit de projeter le théorème par rapport à un point fixe sur l'axe (Δ) en question :

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L}_\Delta(M) = \sum_i \mathscr{M}_\Delta(\vec{F}_i) \qquad (4.17)$$

4.4.3 Exemple d'application : Pendule simple

Soit un pendule simple composé de d'un fil de longueur l et d'une masse m suspendue à son extrémité. La base des coordonnées la plus adéquate pour le problème du pendule simple est la base de coordonnées cylindriques (appelée aussi ***cylindro-polaire***). Les forces appliquées au pendule sont :

▷ Le poids $\overrightarrow{P}$ de la masse m.

▷ La tension du fil $\overrightarrow{T}$.

Appliquons le théorème du moment cinétique au point d'attache fixe O du pendule :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} = \overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{P})} + \overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{T})}$$

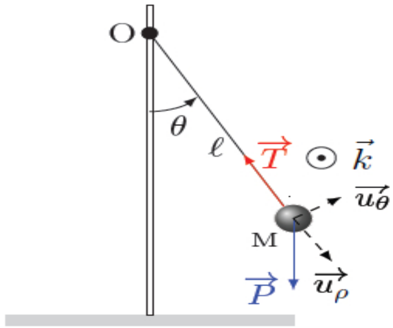

FIGURE 4.7 – Présentation du pendule simple

Moment cinétique et sa dérivée :
Exprimons tout d'abord le moment cinétique en O

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} =& \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \\ =& \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ ml\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ml^2\dot{\theta} \end{pmatrix} \\ =& ml^2\dot{\theta}\vec{k}\end{aligned}$$

Puis sa dérivée :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} = ml^2\ddot{\theta}\vec{k}$$

Moments de force :
En ce qui concerne les moments de force :

▷ le moment de la tension du fil $\overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{T})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ car la droite d'action de $\vec{T}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

▷ Pour le moment du poids, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{T})} &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} \\
&= \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mgl\sin\theta \end{pmatrix} \\
&= -\, mgl\sin\theta\vec{k}
\end{aligned}$$

Théorème du moment cinétique :
L'écriture du théorème donne :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} &= \overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{P})} + \overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{T})} \\
&\Rightarrow ml^2\ddot{\theta}\vec{k} = -mgl\sin\theta\vec{k} \\
&\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Ce résultat est une équation bien connue et qui peut être retrouvée facilement à l'aide de du principe fondamentale de la dynamique (chapitre précédent) ou à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique (prochain chapitre). La méthode du théorème du moment cinétique n'est donc pas meilleure qu'une autre.

4.5 Notion de mécanique du solide

Il a été signalé précédemment que le moment cinétique était équivalent pour la rotation à ce qu'est la quantité de mouvement pour la translation. Ainsi, comme *la quantité de mouvement* est reliée à la *masse inertielle* m (grandeur qui exprime la résistance qu'oppose un corps au changement de son mouvement) et à la *vitesse linéaire*, le *moment cinétique* relie à une quantité représentant l'*inertie de rotation* d'un corps, appelée *moment d'inertie*, et à la *vitesse angulaire*. En général, on cherche à faire tourner un corps autour d'un axe (Δ), on utilise alors le moment d'inertie par rapport à cet axe que l'on note I_Δ et dans certains ouvrages J_Δ.

On peut alors exprimer le moment cinétique d'un corps par rapport à un axe de la façon suivante : $\mathscr{L}_\Delta(M) = I_\Delta\dot{\theta}$
Remarque : Ce moment cinétique caractérise la tendance d'un objet à continuer à tourner autour de l'axe Δ, du fait de son inertie.

4.5.1 Mise en évidence du moment d'inertie

La figure suivante représente un système composé de deux particules m_1 et m_2 reliées entre elles par une tige de masse négligeable. L'ensemble est en rotation à une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour d'un axe situé à une distance r_1 de m_1 et r_2 de m_2. L'énergie cinétique (de

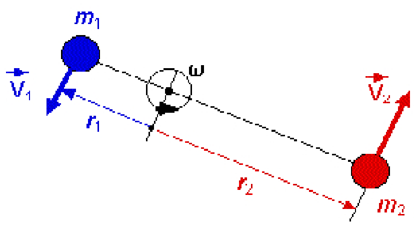

Figure 4.8 – Système à deux masses en rotation

translation) du système est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \tag{4.19}$$

Où $v = \dot{\theta}r$, en remplaçant $v_1 = \dot{\theta}r_1$ et $v_2 = \dot{\theta}r_2$ dans l'équation précédente on obtient

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}m_1(\dot{\theta}r_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\theta}r_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right)\dot{\theta}^2 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Si la forme générale de l'expression de l'énergie cinétique de rotation est $E_c = \frac{1}{2}I_\Delta\dot{\theta}^2$, l'expression du moment d'inertie du système est donc :

$$I_\Delta = \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right) \tag{4.21}$$

Cette expression met en évidence l'importance qu'a la distribution de la masse autour de l'axe de rotation. Ainsi, plus la masse est proche de l'axe de rotation, plus l'inertie de rotation (le moment d'inertie) sera petite et vice-versa. De façon plus générale, pour un système composé de n particules (masses ponctuelles), le moment d'inertie est donné par

$$I_\Delta = \sum_i^n m_i r_i^2 \tag{4.22}$$

Dans cette expression, m_i représente la masse de la *ième* particule et r_i le rayon de la trajectoire circulaire qu'elle décrit lorsque le système est en rotation.

Par extension, dans un solide (ensemble continu de points matériels) :

$$I_\Delta = \int r^2 dm \tag{4.23}$$

4.5.2 Exemple de moment d'inertie de solides simple

Par sa définition, le moment d'inertie dépend de la répartition de masse du corps en question. Cependant pour des corps homogènes et de formes géométriques simples, l'expression du moment d'inertie est simple :

- ▷ Moment d'inertie par rapport à son axe de révolution d'un *cerceau* de masse m et de rayon R : $J_\Delta = mR^2$
- ▷ Moment d'inertie par rapport à son axe de révolution d'un *cylindre* ou d'un *disque* de masse m et de rayon R : $J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2$
- ▷ Moment d'inertie par rapport à son axe de révolution d'une sphère de masse m et de rayon R : $J_\Delta = \frac{2}{5}mR^2$

4.6 Conservation du moment cinétique

Si la variation par rapport au temps du moment cinétique est nulle

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} = \vec{0}$$

alors $\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} = \overrightarrow{Cst}$, on dit que le moment cinétique est conservé. On peut citer deux cas de figures :

- ▷ Un système de points isolé ($\overrightarrow{F} = \vec{0}$), ou si la résultante des forces externes est nulle.
- ▷ Pour un système soumis à une force dont le point d'application passe par un point fixe O tout au long du mouvement (*Force centrale*), le moment cinétique sera conservé, car le moment de cette force par rapport à O sera toujours nul. Le mouvement des planètes autour du soleil est un exemple de force centrale (la force d'attraction exercée sur une planète passe toujours par le centre du soleil).

4.6.1 Exemple d'application : lois de Kepler

Considérons le mouvement d'un satellite autour de la planète Terre

La force de gravitation produite par la Terre sur un satellite est une force centrale (Figure 4.9).

Une force centrale $\overrightarrow{F}$ est toujours colinéaire à avec $\overrightarrow{OM}$ est donc le moment $\overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F})} = \vec{0}$

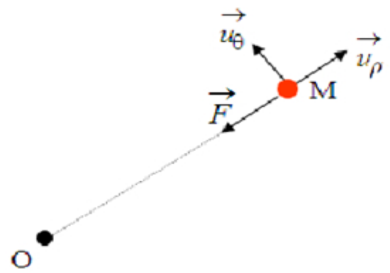

FIGURE 4.9 – Système soumis à une force centrale

Par application du théorème du moment cinétique :$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} = \sum_i \overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F}_i)} = \vec{0}$. Le moment cinétique est donc conservé, c'est à dire que $\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} = \overrightarrow{cst}$ en norme et en direction d'où l'on tire les conséquences suivantes :

- ▷ $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à $\vec{v}$: Le point M est par conséquent toujours dans le plan passant par O et orthogonal au moment cinétique ⇒ ***le mouvement est plan***, on reconnaît la $1^{ère}$ **loi de Kepler**
  énoncé : *Les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers (Kepler 1609)*
- ▷ Le mouvement étant plan, on utilise les coordonnées polaires pour repérer la position de M. Le moment cinétique s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} = mr^2\dot{\theta}\vec{k} = \overrightarrow{cst}$$

  et sa conservation se traduit par $r^2\dot{\theta} = C$, où C est connue par la *constante des aires.*
- ▷ L'aire balayée par le point M pendant l'intervalle de temps dt est :

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

  l'aire balayée par unité de temps est alors :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2} = cst$$

  On reconnaît la $2^{ème}$ **loi de Kepler**
  énoncé : *Les aires balayées par le rayon vecteur joignant le centre du Soleil au centre d'une planète sont proportionnelles aux temps employés à les décrire (Kepler 1609)*

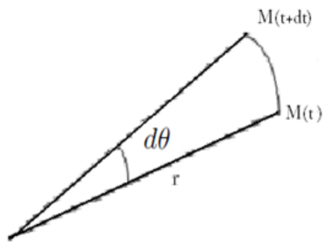

FIGURE 4.10 – aire balayée pendant dt

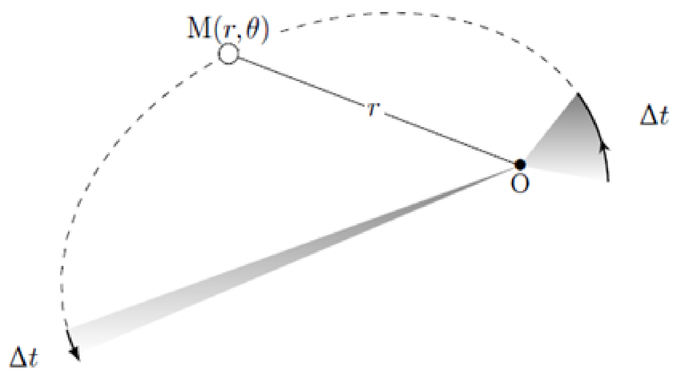

FIGURE 4.11 – Pour des durées égales, l'aire balayée par le rayon vecteur est la même

4.7 Récapitulatif : Solide en rotation autour d'un axe fixe

Supposons un solide S en rotation autour d'un axe fixe (Δ) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Chaque point M_i de masse m_i constituant le solide décrit un cercle de rayon r_i. Leur moment cinétique par rapport à l'axe vaut donc :

$$\mathscr{L}_\Delta(M_i) = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \dot{\theta} \quad car \quad v_i = r_i \dot{\theta} \tag{4.24}$$

Par conséquent, le solide S possède un moment cinétique

$$\mathscr{L}_\Delta(S) = \sum_i m_i r_i v_i = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta} = I_\Delta \dot{\theta} \tag{4.25}$$

Où $\sum_i m_i r_i^2$ désigne le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Δ)

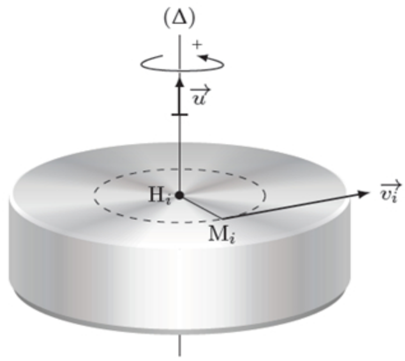

Figure 4.12 – Solide en rotation autour d'un axe fixe

En appliquant le théorème du moment cinétique :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathscr{L}_O(M)} &= \sum_i \overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F_i})} \\ &= \frac{d}{dt}(I_\Delta \dot{\theta}) \\ &= I_\Delta \frac{d\dot{\theta}}{dt} \\ &= I_\Delta \ddot{\theta}\end{aligned} \tag{4.26}$$

Finalement

$$\sum_i \overrightarrow{\mathscr{M}_O(\vec{F_i})} = I_\Delta \ddot{\theta} \tag{4.27}$$

Chapitre 5

Travail et Énergie

Sommaire

Deux notions très importantes de la dynamique sont introduite dans ce chapitre ; le ***travail*** d'une force et l'***énergie*** mécanique. Ces deux grandeurs et les relations qui les relient peuvent être utilisées pour résoudre de manière simple des problèmes de mécanique.

5.1 Travail d'une Force

L'effort fourni pour déplacer un objet est d'autant plus important que la longueur du déplacement est grande et que la force appliquée est intense. Le travail de la force est une grandeur qui rend compte de cet effort.

Considérons une force $\overrightarrow{F}$ constante (en norme, sens et direction) appliquée sur un point matériel M se déplaçant sur un segment de droite $AB = l$.

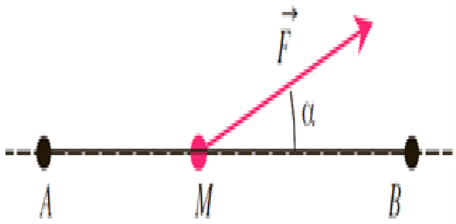

FIGURE 5.1 – Travail d'une force constante sur un déplacement rectiligne

La force $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{cste}$ sur $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned} W_{AB}(\overrightarrow{F}) &= \overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB} \\ &= Fl\cos\alpha \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.1.1 Travail élémentaire

Le travail élémentaire δW d'une force $\overrightarrow{F}$ sur un déplacement $\overrightarrow{dl}$ le long d'un trajet quelconque AB est donnée par :

$$\delta W = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} \tag{5.2}$$

Le travail total le long du trajet AB est la somme continue des travaux élémentaires ; c'est à dire l'intégrale de A à B du travail élémentaire

$$W_{AB}(\overrightarrow{F}) = \int_A^B \delta W = \int_A^B \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} \tag{5.3}$$

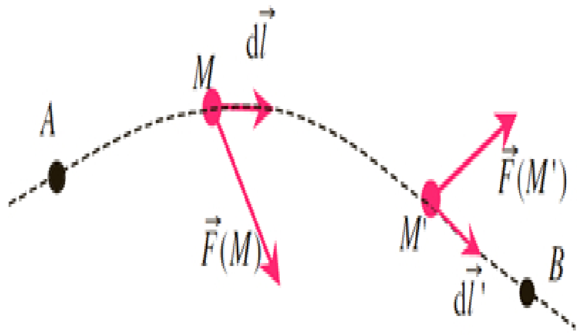

FIGURE 5.2 – Travail élémentaire sur un déplacement élémentaire

Si la force est constante :

$$W_{AB}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \int_{A}^{B} \overrightarrow{dl}$$

En utilisant la relation de Chasles, la somme des vecteurs élémentaires $\overrightarrow{dl}$ de A jusqu'à B donne le vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned} &= \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{AB} \\ &= F.AB\cos\alpha \end{aligned} \tag{5.4}$$

5.1.2 Propriété du travail

A partir de la définition du travail on peut tirer les propriétés suivantes :

- ▷ Le travail d'une force n'a de sens que si on précise le déplacement. Il est noté $W_{AB}(\overrightarrow{F})$ (initiale du mot anglais *Work*) en précisant en indice le déplacement et entre parenthèses la force.
- ▷ Le travail s'exprime en $N.m$ c'est-à-dire en $Joule(J)$. $1J$ correspond au travail d'une force de $1N$ sur une distance de $1m$.
- ▷ Le travail est non nul si la force agissant sur l'objet a une composante dans la direction du mouvement.
- ▷ Le travail est soit positif, nul ou négatif selon la direction de la force par rapport au déplacement.
- ▷ Si la force s'***oppose*** au déplacement la force est ***résistante*** et le travail est ***négatif*** ($\cos\alpha < 0$).
- ▷ Si la force est ***motrice*** le travail est ***positif*** ($\cos\alpha > 0$).

▷ Une force peut s'appliquer à un objet sans pour autant effectué un travail. Ainsi, il n'y a pas de travail lorsqu'il n'y a pas de déplacement de l'objet ($l = 0$) où lorsque la force est perpendiculaire à la direction du mouvement. La force ne contribue pas alors au déplacement de l'objet (le poids $\vec{P}$ sur un plan horizontal, la force normale $\vec{N}$, la force centrale $\vec{F_c}$ et la tension d'un fil $\vec{T}$ dans les mouvements de rotation....).

5.1.3 Puissance d'une force

La puissance $\mathscr{P}$ d'une force représente le travail effectué par cette force par unité de temps et renseigne sur la rapidité avec laquelle le travail (transfert d'énergie) est effectué. ***Un même travail peut être réalisé plus ou moins rapidement.***
Exemple : Une voiture de course n'a pas obligatoirement plus d'énergie dans son réservoir à carburant qu'une voiture touristique. La différence est que la voiture de course est capable de transférer cette énergie plus rapidement. Car sa puissance est plus importante.

Si W est le travail effectué pendant la durée Δt, la puissance moyenne $\mathscr{P}_m$ de la force est définie par :

$$\mathscr{P}_m = \frac{W}{\Delta t} \tag{5.5}$$

L'unité de la puissance est le Watt (symbole W) correspondant à un travail de $1J$ effectué en $1s$.

Soit δW le travail effectué par une force pendant la durée élémentaire (infiniment petite) dt. La puissance de cette force à l'instant t correspond à la puissance instantanée et s'écrit :

$$\mathscr{P}(t) = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\overrightarrow{F} d\vec{l}}{dt} = \overrightarrow{F} \frac{d\vec{l}}{dt} = \overrightarrow{F} \overrightarrow{v} \tag{5.6}$$

5.2 énergie en mécanique

5.2.1 énergie cinétique E_C

Définition

C'est une énergie liée au mouvement. Par définition, l'énergie cinétique E_C d'un point matériel est égale à la moitié du produit de sa masse par le carré de la vitesse de son mouvement.

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 \tag{5.7}$$

Elle est définie comme étant la capacité d'un corps matériel pour faire un travail grâce à son mouvement.

Soit une particule de masse m soumise à une résultante de forces $\sum_i \overrightarrow{F}$ et se déplaçant dans un référentiel d'inertie avec une vitesse $\vec{v}$. Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\sum_i \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

La somme des travaux élémentaires des forces extérieures, au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$, donne :

$$\begin{aligned}
\sum \delta W &= \sum (\vec{F}_{ext} d\vec{l}) \\
&= \sum (\vec{F}_{ext})\ d\vec{l} \\
&= m\ \frac{d\vec{v}}{dt}\ d\vec{l} \\
&= m\ d\vec{v}\ \frac{d\vec{l}}{dt} \\
&= m\ \vec{v}\ d\vec{v}
\end{aligned}$$

Intégrons sur un trajet (AB)

$$m \int_A^B \vec{v}\ d\vec{v} = m\left[\frac{1}{2}v^2\right]_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

et

$$\int_A^B \sum \delta W = \sum \int_A^B \delta W = \sum \int_A^B \vec{F}_{ext} d\vec{l} = \sum W_{AB}(\vec{F}_{ext})$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \sum W_{AB}(\vec{F}_{ext}) \tag{5.8}$$

Théorème de l'énergie cinétique.

Enoncé : *la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel, soumis à un ensemble de forces extérieures entre A et B est égale au travail effectué par toute les forces appliquées entre A et B.*

$$\Delta E_C = \sum W_{AB}(\vec{F}_{ext}) \tag{5.9}$$

Remarque : Ce théorème reste valable dans le cas d'une force variable et pour une trajectoire quelconque.

Propriétés de l'énergie cinétique

- ▷ L'énergie cinétique est une mesure directe du travail nécessaire pour accélérer une particule d'une vitesse $\vec{v}_1$ à une autre vitesse $\vec{v}_2$.
- ▷ L'énergie cinétique est toujours positive.

5.2.2 énergie potentielle E_P

Définition

C'est une énergie liée à la position. En changeant la position d'un point matériel son énergie potentiel peut augmenter (emmagasiner de l'énergie) ou diminuer (restituer de l'énergie)

Si on lâche une masse d'une hauteur h celle-ci en tombant (diminution de la hauteur) voit sa vitesse augmenter. La masse avait donc *potentiellement* de l'énergie qui a été restituée sous forme d'énergie cinétique au cours de la chute. La seule force exercée sur la masse est son poids qui fournit un travail positif indépendant du chemin suivi et lié uniquement à la diminution de la hauteur.
Remarque : Comme pour l'énergie cinétique définie à partir de sa variation liée au travail de toutes les forces, l'énergie potentielle va être définie à partir de sa diminution liée au travail de certaines forces : celles dont *le travail ne dépend pas du chemin suivi.*

Forces conservatives

Ce sont des forces, notées $\vec{F}^C_{ext}$, dont le travail ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des positions initiale (point de départ) et finale (point d'arrivée).

On peut citer comme exemples :
- ▹ travail du poids
- ▹ travail de la tension du ressort
- ▹ travail d'une force constante (en norme et en direction)

Forces non conservatives

Ce sont toutes les autres forces notée $\vec{F}^{NC}_{ext}$ dont le travail dépend du chemin suivi. On peut citer comme exemple les forces de frottement. Le travail de ces forces est toujours résistant (travail négatif $W < 0$).

Prenons le cas d'une force de frottement $\vec{F}_f$ de type solide. Cette force s'***oppose*** continuellement au déplacement et sa norme F_f est ***constante***. Le vecteur force sera un vecteur de même direction mais de sens opposé au vecteur déplacement élémentaire. Le travail de cette force de frottement donne :

$$\delta W = \vec{F}_f \; d\vec{l} = -F_f \; dl \Rightarrow W_{AB} = -\int_A^B F_f \; dl = -F_f \int_A^B dl = -F_f L_{AB}$$

La longueur L_{AB} est la distance effectivement parcourue entre A et B. Cette distance dépend évidemment du chemin suivi.

Remarque : Si la force de frottement est variable (coefficient de frottement variable), l'expression de la force doit être intégrer avec dl :

$$\delta W = \vec{F}_f \ d\vec{l} = -F_f \ dl \Rightarrow W_{AB} = -\int_A^B F_f \ dl$$

énergie potentielle et forces conservatives

Le travail $W_{AB}(\vec{F}^C_{ext})$ d'une force conservative $\vec{F}^C_{ext}$ ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial (A) et final (B). Ce travail peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état E_P (fonction ne dépendant que de l'état du système) appelée ***énergie potentielle***.Par définition, pour une force conservative $\vec{F}^C_{ext}$ il existe une fonction d'état E_P telle que :

$$W_{AB}(\vec{F}^C_{ext}) = E_P(A) - E_P(B) = -\Delta E_P \tag{5.10}$$

La variation d'énergie potentielle entre deux points A et B est égale à l'opposé du travail de la force conservative entre ces deux points.

✓ ***Définition intégrale de l ?énergie potentielle*** **:** La relation précédente conduit, en explicitant le travail, à l'expression intégrale de l'énergie potentielle :

$$E_P(B) - E_P(A) = -\int_A^B \vec{F}^C_{ext} d\vec{l} \tag{5.11}$$

✓ ***Définition différentielle de l ?énergie potentielle*** **:** De l'expression intégrale, on peut déduire l'expression différentielle de l'énergie potentielle en faisant apparaître le travail élémentaire de la force conservative. On aura alors :

$$\delta W(\vec{F}^C_{ext}) = \vec{F}^C_{ext} \ d\vec{l} = -dE_P \tag{5.12}$$

✓ ***Définition locale de l'énergie potentielle*** **:** La différentielle de la fonction énergie potentielle peut s'écrire en fonction du gradient de cette fonction :

$$dE_P = \vec{grad} E_P \ d\vec{l} = -\vec{F}^C_{ext} \ d\vec{l} \tag{5.13}$$

où

$$\begin{aligned} \vec{F}^C_{ext} &= -\vec{grad} E_P \\ &= -\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k} \end{aligned} \tag{5.14}$$

Il est possible de retrouver l'expression de la force $\vec{F}^C_{ext}$ en connaissant l'expression de son énergie potentielle E_P. Il suffit d'utiliser la définition locale de l'énergie potentielle.

▷ **Exemple 1**, énergie potentielle de pesanteur : avec un axe vertical ascendant et z la hauteur ou se trouve la masse m, on a $E_{pp} = mgz$:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= -\vec{grad}E_{pp} = -\frac{\partial E_{pp}}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_{pp}}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_{pp}}{\partial z}\vec{k} = -\frac{\partial E_{pp}}{\partial z}\vec{k} \\ &= -\frac{d\ mgz}{dz}\vec{k} = -mg\ \vec{k} \qquad (5.15)\end{aligned}$$

▷ **Exemple 2**, énergie potentielle élastique : avec x l'allongement du ressort, on a $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$:

$$\begin{aligned}\vec{T} &= -\vec{grad}E_{pe} = -\frac{\partial E_{pe}}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_{pe}}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_{pe}}{\partial z}\vec{k} = -\frac{\partial E_{pe}}{\partial x}\vec{i} \\ &= -\frac{d\ \frac{1}{2}kx^2}{dx}\vec{k} = -kx\ \vec{i} \qquad (5.16)\end{aligned}$$

Conclusion : Une force conservative dérive d'un potentiel.

5.2.3 énergie mécanique E_m

Définition

Soit un point matériel M de masse m soumis à un ensemble de forces extérieures $\vec{F}_{ext}$ pendant un déplacement AB. Ces forces peuvent se décomposer en forces conservatives $\vec{F}^{C}_{ext}$ et non conservatives $\vec{F}^{NC}_{ext}$. Le travail total de toutes les forces pour ce déplacement est relié à la variation d'énergie cinétique par le théorème de l'énergie cinétique :$\sum W_{AB}(\overrightarrow{F}_{ext}) = \Delta E_C$

$$\Rightarrow \sum W_{AB}(\overrightarrow{F}^{C}_{ext}) + \sum W_{AB}(\overrightarrow{F}^{NC}_{ext}) = E_C(B) - E_C(A)$$

Le travail des forces conservatives peut s'exprimer en fonction de l'énergie potentielle dont elles dérivent. On peut écrire :

$$\sum W_{AB}(\overrightarrow{F}^{C}_{ext}) = E_P(A) - E_P(B)$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} E_C(B) - E_C(A) &= \sum W_{AB}(\overrightarrow{F}^{NC}_{ext}) + [E_P(A) - E_P(B)] \\ [E_C(B) - E_C(A)] + [E_P(B) - E_P(A)] &= \sum W_{AB}(\overrightarrow{F}^{NC}_{ext}) \\ [E_C(B) + E_P(B)] - [E_C(A) + E_P(A)] &= \sum W_{AB}(\overrightarrow{F}^{NC}_{ext}) \qquad (5.17)\end{aligned}$$

Il apparaît une nouvelle fonction d'état homogène à une énergie et dont la variation s'exprime en fonction uniquement du travail des forces non conservatives. Cette nouvelle fonction correspond à ***l'énergie mécanique*** $E_m = E_C(B) + E_P(B)$.

Théorème de l'énergie mécanique

énoncé : *La variation d'énergie mécanique d'un système entre deux points A et B est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées au système entre ces deux points.*

$$\Delta E_m = \sum W_{AB}(\overrightarrow{F}^{NC}_{ext}) \tag{5.18}$$

Système conservatif et conservation de l'énergie mécanique

Un système est dit ***conservatif*** si ce système ne subit que des forces extérieures conservatives. Le système ne subissant aucune force non conservative. Le système est dit aussi ***mécaniquement isolé***. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta E_m &= E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{AB}(\overrightarrow{F}^{NC}_{ext}) = 0 \\ \Delta E_m &= o \;\Rightarrow\; E_m = constante \end{aligned} \tag{5.19}$$

L'énergie mécanique d'un système conservatif (ou mécaniquement isolé) se conserve au cours du temps.

$$Syst\grave{e}me\ conservatif \Rightarrow E_m = E_C + E_P = constante\ dans\ le\ temps \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \tag{5.20}$$

2.3.3.a *Conservation de l'rgie et accration*

L'énergie mécanique étant constante (sa dérivée par rapport au temps est nulle). L'énergie mécanique à un instant quelconque s'écrit :

$$E_m = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \tag{5.21}$$

La dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique correspond à la somme des dérivées des énergies cinétique et potentielle.

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= \frac{d}{dt}(E_C + E_{PP}) \\ &= \frac{dE_C}{dt} + \frac{dE_{PP}}{dt} \\ &= \frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt} + \frac{d(mgz)}{dt} \\ &= \frac{1}{2}m\left(2v\frac{dv}{dt}\right) + mg\frac{dz}{dt} \\ &= mv\gamma + mgv = 0 \;\Rightarrow\; \gamma = -g \end{aligned} \tag{5.22}$$

Remarque : Ce résultat s'obtient aisément en appliquant le principe fondamental de la dynamique. Cependant cette méthode peut dans certain cas être très pratique pour déterminer l'accélération du centre d'inertie d'un système.

5.3 Chocs et collisions entre particules

5.3.1 Notion d'impulsion

Considérons une particule de masse m soumise à l'action d'une force $\vec{F}$ durant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$. Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\vec{F} = m\ \vec{\gamma} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F}\ dt = m\ d\vec{v} = d\ \vec{p} \tag{5.23}$$

Intégrons cette expression entre les deux instants t_1 et t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\ dt = \int_{t_1}^{t_2} d\ \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{J} \tag{5.24}$$

Où $\vec{J}$ est ***l'impulsion*** de la force $\vec{F}$. Si $\vec{F} = \vec{cste}$ dans le temps, alors :

$$\vec{J} = \vec{F}\int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{F}\Delta t \tag{5.25}$$

L'impulsion correspond au transfert de quantité de mouvement causé par une force $\vec{F}$ appliquée durant un intervalle de temps Δt. On peut aussi la définir comme étant la quantité de mouvement qui a permis d'accélérer la particule d'une vitesse $\vec{v}_1$ à une vitesse $\vec{v}_2$ sous l'action de la force $\vec{F}$

Remarque : La définition de l'impulsion nous rappelle de celle de l'énergie cinétique. Il est donc intéressant de comparer les deux expressions suivantes :

$$W = \int \vec{F}\ d\vec{l} = \Delta\ E_C$$
$$\vec{J} = \int \vec{F}\ dt = \Delta\ \vec{p}$$

Remarque : On peut communiquer une même impulsion avec une **forte force** durant un **intervalle de temps très petit**, qu'avec une *faible force* durant un *intervalle de temps plus grand.*

Exemple : L'impulsion communiquée par le tableau de bord à un chauffeur ***sans ceinture*** est égale à celle communiquée par l'airbag (coussin d'air) de la même voiture. Le tableau de bord exerce une forte force durant un temps très petit, contrairement au coussin d'air qui exerce une faible force durant un intervalle de temps plus important.

5.3.2 Chocs entre particules

Considérons dans un référentiel d'inertie, deux points matériels indépendants de masse m_1 et m_2. Les masses prises séparément sont mécaniquement isolées ou pseudo isolées et sont donc animées d'un mouvement rectilignes et uniformes (principe d'inertie). On note par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ leurs vitesses respectives. Si les deux particules se rencontrent, on dit qu'il y a ***choc***.

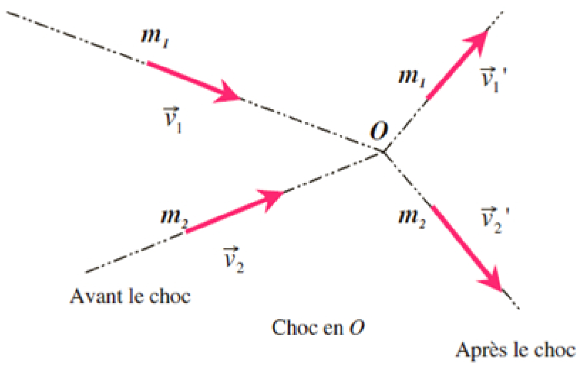

FIGURE 5.3 – Choc entre deux points matériels m_1 et m_2

Juste après le choc (durée très courte) les particules retrouvent un mouvement rectiligne uniforme avec de nouvelles vitesses $\vec{v}_1{}'$ et $\vec{v}_2{}'$ c'est à dire, elles sont de nouveau mécaniquement isolées ou pseudo isolées.

Que peut-on faire pour trouver ces vitesses ?

Réponse : Pour déterminer ces vitesses il faut rechercher les grandeurs physiques qui pourraient se conserver.

Réflexion :

La particule m_1 est mécaniquement isolée avant et après le choc. Au moment du choc, la particule m_1 subit l'action de la masse m_2 (action extérieure) et n'est donc plus isolée. Il en est de même pour la particule m_2.

Par contre, si on considère le système formé de l'ensemble des deux masses, celui-ci est isolé avant, après et au moment du choc, puisque le choc correspond à des interactions entre les différents constituants du système et sont donc des actions intérieures au système. Les actions de m_1 sur m_2 et inversement deviennent intérieures (propre au système). Aucune action extérieure n'est exercée sur le système. Ainsi la détermination des vitesses aprèss le choc est possible comme nous allons le voir dans ce qui suit.

Conservation du vecteur quantité de mouvement totale

Soit un système isolé formé de deux masses m_1 *et* m_2. D'après le principe d'inertie :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \tag{5.26}$$

Le vecteur quantité de mouvement totale correspond à la somme des vecteurs quantité de mouvement de chaque particule. On peut donc écrire une première relation en exprimant cette quantité de mouvement totale avant le choc et après le choc :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{avant} = \vec{p}_{après} \Rightarrow \vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p_1}' + \vec{p_2}' \tag{5.27}$$

Classification des chocs

Chacune des particules peut posséder de l'énergie potentielle. Cette énergie potentielle est une fonction d'état ne dépendant que de la position de la particule concernée. Le choc étant toujours de durée assez brève, la position des particules ne change pas pendant ce choc et leurs énergies potentielles ne varient pas. La variation d'énergie mécanique correspond alors à la variation d'énergie cinétique. On distingue deux types de choc

- ▷ Si le système ne présente aucune perte d'énergie, c'est à dire qu'il n'est soumis à aucune force non conservative, on parle de ***choc élastique***.
  On peut citer, le jeu de billard, le jeu de pétanques, berceau de Newton....
- ▷ Par contre, Si l'énergie cinétique aprés collision est plus petite de celle d'avant le choc, on parle de ***choc inélastique***
  On parle aussi, de ***choc mou*** ou ***choc parfaitement inélastique***, si les deux particules restent liées après le choc.

3.2.2.a ***Choc élastique :*** Dans ce cas, il y a conservation de la quantité de mouvement ($\Delta\overrightarrow{p} = 0$) et de l'énergie c'est-à-dire conservation de l'énergie cinétique ($\Delta E_C = 0$). La conservation de l'énergie cinétique observée dans un impact élastique permet de résoudre plusieurs problèmes.

Examinons, par exemple, la collision frontale de deux boules de masses différentes. L'équation de la conservation de la quantité de mouvement suivante :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{5.28}$$

Pour une boule de masse m_2 au repos avant le choc, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement devient :

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{5.29}$$

et l'équation de la conservation de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \tag{5.30}$$

On tire de l'équation (5.29) :

$$v_2' = \frac{m_1}{m_2}(v_1 - v_1') \tag{5.31}$$

en remplaçant $v_2^{'}$ dans l'équation de l'énergie cinétique, on obtient :

$$\frac{m_1}{2}(v_1^2 - v_1^{'2}) = \frac{m_2}{2}\left[\frac{m_1}{m_2}(v_1 - v_1^{'})\right]^2 \tag{5.32}$$

En simplifiant par $m_1(v_1 - v_1^{'})$ on obtient :

$$\frac{1}{2}(v_1 + v_1^{'}) = \frac{1}{2}\frac{m_1}{m_2}(v_1 - v_1^{'}) \tag{5.33}$$

c'est à dire

$$m_2 v_1 + m_2 v_1^{'} = m_1 v_1 - m_1 v_1^{'} \tag{5.34}$$

ou

$$(m_1 - m_2)v_1 = (m_1 + m_2)v_1^{'} \tag{5.35}$$

ce qui donne pour la vitesse de la première boule après collision

$$v_1^{'} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \tag{5.36}$$

et pour la deuxième boule :

$$v_2^{'} = \frac{2\ m_1}{m_1 + m_2}v_1 \tag{5.37}$$

Quand la boule m_1 (mobile) heurte de front la boule m_2 (immobile),

- ▷ Elle rebondit en arrière, si sa $m_1 << m_2$:

$$v_1^{'} = -v_1 \text{ et } v_2^{'} \sim 0$$

- ▷ Les deux boules continuent à rouler dans le sens du choc, si $m_1 > m_2$:

$$v_1^{'} \text{ et } v_2^{'} \text{ sont supérieures à } 0$$

- ▷ La première boule s'arrête et la deuxième continue avec la même vitesse de m_1, si les deux masses sont égales :

$$v_1^{'} = 0 \text{ et } v_2^{'} = v_1$$

3.2.2.b ***Choc parfaitement inélastique :*** Dans le cas d'un choc dit inélastique, comme dans le premier type, il y a conservation de la quantité de mouvement $\Delta\overrightarrow{p} = 0$, mais il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique. Au cours du choc il y a perte d'énergie par échauffement. L'énergie cinétique diminue.

$$E_C(avant) > E_C(après)$$

Examinons la même collision frontale, en admettant toujours que la boule de masse m_2 était au repos. L'équation de la conservation de la quantité de mouvement donne :

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \quad \text{(les deux masses forment un seul corps)} \tag{5.38}$$

et donc

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \tag{5.39}$$

Calculons maintenant l'énergie cinétique :

- ▷ Avant le choc :

$$E_{C,totale} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \tag{5.40}$$

- ▷ Après le choc :

$$\begin{aligned} E'_{C,totale} &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2 \end{aligned} \tag{5.41}$$

La comparaison des deux énergies cinétiques donne :

$$\frac{E'_{C,totale}}{E_{C,totale}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} < 1 \;\Rightarrow\; E'_{C,totale} < E_{C,totale}$$

Cette démonstration montre que l'énergie cinétique n'est pas conservée.