

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**ECOLE SUPERIEURE EN SCIENCES APPLIQUEES DE TLEMCEM**  
المدرسة العليا في العلوم التطبيقية لتلمسان

**Département de la formation préparatoire**  
قسم التكوين التحضيري

**COURS DE PHYSIQUE 03**

Auteur : HABCHI Mohammed  
Grade : Maître de conférences A



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités sur les oscillations</b>	<b>8</b>
1.1	Définitions générales . . . . .	9
1.1.1	Oscillation (vibration) . . . . .	9
1.1.2	Oscillateur . . . . .	9
1.1.3	Coordonnées généralisées et nombre de degrés de liberté . . . . .	13
1.1.4	Énergies cinétique, potentielle et totale . . . . .	15
1.2	État d'équilibre . . . . .	15
1.2.1	État d'équilibre stable . . . . .	16
1.2.2	État d'équilibre instable . . . . .	16
1.2.3	Exemple . . . . .	16
1.3	Méthodes d'étude des oscillations . . . . .	17
1.3.1	Méthode de Newton . . . . .	17
1.3.2	Théorème de l'énergie mécanique . . . . .	17
1.3.3	Formalisme de Lagrange . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Oscillations harmoniques libres : Systèmes à un (01) degré de liberté</b>	<b>19</b>
2.1	Définitions et propriétés . . . . .	20
2.1.1	Oscillation libre . . . . .	20
2.1.2	Formalisme de Lagrange pour les systèmes conservatifs . . . . .	20
2.1.3	Équation de mouvement . . . . .	21
2.2	Exemples d'application . . . . .	23
2.2.1	Pendule élastique . . . . .	23
2.2.2	Pendule simple . . . . .	24
2.2.3	Pendule de torsion . . . . .	24
2.2.4	Oscillateur électrique libre . . . . .	24
2.2.5	Oscillateur acoustique (résonateur d'Helmholtz) . . . . .	25
2.3	Bilan énergétique . . . . .	25
2.3.1	Variation temporelle de $T(t)$ et de $U(t)$ . . . . .	26
2.3.2	Variation spatiale de $U(x)$ . . . . .	26

<b>3</b>	<b>Oscillations harmoniques libres amorties : Systèmes à un (01) degré de liberté</b>	<b>27</b>
3.1	Définitions et propriétés . . . . .	28
3.1.1	Oscillation libre amortie . . . . .	28
3.1.2	Formalisme de Lagrange pour les systèmes non conservatifs . . . . .	29
3.1.3	Équation différentielle du mouvement . . . . .	29
3.1.4	Équation horaire du mouvement . . . . .	31
3.2	Grandeurs caractéristiques . . . . .	35
3.2.1	Pseudo-période $T_a$ . . . . .	35
3.2.2	Décrément logarithmique $\delta$ . . . . .	35
3.2.3	Facteur de qualité $Q$ . . . . .	36
3.3	Oscillateur électrique : circuit $(R, L, C)$ série . . . . .	36
3.3.1	Mise en équation du système . . . . .	37
3.3.2	Analogie électromécanique . . . . .	38
3.4	Bilan énergétique . . . . .	38
3.4.1	Variation de l'énergie totale . . . . .	39
3.4.2	Énergie dissipée durant une pseudo-période . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Oscillations harmoniques forcées : Systèmes à un (01) degré de liberté</b>	<b>41</b>
4.1	Définitions et propriétés . . . . .	42
4.1.1	Oscillation forcée . . . . .	42
4.1.2	Equation différentielle du mouvement . . . . .	43
4.2	Résolution de l'équation différentielle . . . . .	44
4.2.1	Cas d'une excitation (force) constante . . . . .	44
4.2.2	Cas d'une excitation (force) sinusoïdale . . . . .	46
4.3	Phénomène de résonance . . . . .	50
4.3.1	Étude de l'amplitude $A$ en fonction de la pulsation $\Omega$ . . . . .	50
4.3.2	Étude de la phase $\phi$ en fonction de la pulsation $\Omega$ . . . . .	51
4.4	Bande passante et facteur de qualité $Q$ . . . . .	52
4.5	Bilan énergétique . . . . .	54
4.5.1	Résonance en énergie . . . . .	56
4.6	Oscillateur électrique : $(R, L, C)$ série forcé . . . . .	56
4.6.1	Équation en intensité $i(t)$ . . . . .	57
4.6.2	Équation en charge $q(t)$ . . . . .	57
4.6.3	Équation en tension au borne du condensateur $U_C(t)$ . . . . .	58
4.7	Notion d'impédance mécanique . . . . .	58
4.7.1	Amortisseur . . . . .	59
4.7.2	Masse . . . . .	59
4.7.3	Ressort . . . . .	59
4.8	Excitation périodique non-sinusoïdale . . . . .	60

<b>5</b>	<b>Oscillations à plusieurs degrés de liberté : Cas particulier des systèmes à deux degrés de liberté</b>	<b>61</b>
5.1	Définitions . . . . .	62
5.2	Système libre à deux degrés de liberté . . . . .	65
5.2.1	Pulsations propres . . . . .	66
5.2.2	Modes propres (normaux) . . . . .	67
5.2.3	Solution générale . . . . .	68
5.2.4	Situations particulières . . . . .	70
5.3	Système forcé à deux degrés de liberté . . . . .	72
5.3.1	Résolution du système d'équations . . . . .	73
5.3.2	Représentation graphique . . . . .	74
5.3.3	Cas d'un système non amorti . . . . .	75
5.4	Équivalence électromécanique . . . . .	76
5.4.1	Équivalence Force-tension . . . . .	76
5.4.2	Équivalence Force-courant . . . . .	77

# Table des figures

1.1	Réponse d'un oscillateur quelconque. . . . .	10
1.2	Réponse d'un oscillateur harmonique. . . . .	11
1.3	Régime pseudo-périodique Amortissement fort. . . . .	12
1.4	Principales formes d'excitation. . . . .	12
1.5	Régime permanent. . . . .	13
1.6	Réponse d'un oscillateur anharmonique. . . . .	13
1.7	Pendule pesant. . . . .	14
1.8	État d'équilibre stable vs État d'équilibre instable . . . . .	16
1.9	État d'équilibre . . . . .	17
2.1	Réponse d'un oscillateur harmonique. . . . .	23
2.2	Pendule élastique. . . . .	23
2.3	Pendule simple. . . . .	24
2.4	Pendule de torsion . . . . .	24
2.5	Oscillateur électrique libre . . . . .	24
2.6	Résonateur d'Helmholtz . . . . .	25
2.7	Variation temporelle de $T(t)$ et de $U(t)$ . . . . .	26
2.8	Variation spatiale de $U(x)$ . . . . .	26
3.1	Modélisation de l'effet de l'amortissement par un amortisseur. . . . .	28
3.2	Pendule élastique Vs Pendule simple. . . . .	30
3.3	Régime apériodique pour (03) différentes conditions initiales avec les caractéristiques : $\lambda = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_0 = 0.99 \text{ rad.s}^{-1}$ ce qui donne $\Delta' = 0.01 > 0$ . . . . .	32
3.4	Régime critique pour (03) différentes conditions initiales avec les caractéristiques : $\lambda = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ ce qui donne $\Delta' = 0$ . . . . .	33
3.5	Régime pseudo-périodique pour (03) différentes conditions initiales avec les caractéristiques : $\lambda = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_0 = \sqrt{4\pi^2 + 1} = 6.361 \text{ rad.s}^{-1}$ ce qui donne $\Delta' = -4\pi^2 < 0$ . . . . .	34
3.6	Circuit <i>RLC</i> série. . . . .	36
3.7	Variation de l'énergie totale (mécanique) d'un oscillateur harmonique amorti. . . . .	40
4.1	Principales formes d'excitation. . . . .	42

4.2	Première ligne : excitation en force / Deuxième ligne : excitation en déplacement.	43
4.3	Système masse-ressort-amortisseur forcé : Cas d'une force constante. . . . .	45
4.4	Réponse du système masse-ressort-amortisseur forcé : Cas d'une force constante.	46
4.5	Réponse en régime permanent : Cas d'une force sinusoïdale. . . . .	49
4.6	Exemples de réponses à des excitations en force harmonique. . . . .	49
4.7	Variation de l'amplitude $A$ en fonction de la pulsation $\Omega$ . . . . .	51
4.8	Variation de la phase $\phi$ en fonction de la pulsation $\Omega$ . . . . .	52
4.9	Bande passante. . . . .	53
4.10	Résonance en énergie. . . . .	56
4.11	Circuit $RLC$ série forcé. . . . .	57
5.1	Système à deux degrés de liberté non couplé. . . . .	62
5.2	Système à deux degrés de liberté couplé. . . . .	63
5.3	Couplage par élasticité. . . . .	63
5.4	Couplage par viscosité. . . . .	64
5.5	Couplage par inertie. . . . .	64
5.6	Couplage par induction mutuelle. . . . .	64
5.7	Deux pendules simple identique couplés par un ressort. . . . .	65
5.8	Oscillations en phase. . . . .	70
5.9	Oscillations en opposition de phase. . . . .	71
5.10	Oscillations en battement. . . . .	72
5.11	Système à deux degrés de liberté forcé. . . . .	72
5.12	Réponse d'un système à deux degrés de liberté amorti forcé. . . . .	75
5.13	Réponse d'un système à deux degrés de liberté forcé non-amorti. . . . .	75
5.14	Système à deux degrés de liberté couplé. . . . .	76
5.15	Système analogue à deux masses et trois ressorts. . . . .	76
5.16	Système à deux degrés de liberté couplé. . . . .	77
5.17	Système à deux degrés de liberté couplé. . . . .	77

# Chapitre 1

## Généralités sur les oscillations

### Sommaire

---

<b>1.1 Définitions générales</b> . . . . .	<b>9</b>
1.1.1 Oscillation (vibration) . . . . .	9
1.1.2 Oscillateur . . . . .	9
1.1.3 Coordonnées généralisées et nombre de degrés de liberté . . . . .	13
1.1.4 Énergies cinétique, potentielle et totale . . . . .	15
<b>1.2 État d'équilibre</b> . . . . .	<b>15</b>
1.2.1 État d'équilibre stable . . . . .	16
1.2.2 État d'équilibre instable . . . . .	16
1.2.3 Exemple . . . . .	16
<b>1.3 Méthodes d'étude des oscillations</b> . . . . .	<b>17</b>
1.3.1 Méthode de Newton . . . . .	17
1.3.2 Théorème de l'énergie mécanique . . . . .	17
1.3.3 Formalisme de Lagrange . . . . .	18

---

## Introduction

Un grand nombre de systèmes physiques de types différents, mécanique, électrique, acoustique et microscopique sont représentés et étudiés par le modèle de l'oscillateur harmonique, sans ou avec amortissement, en régime libre ou forcé. En régime forcé, pour des conditions particulières, les phénomènes de résonance apparaissent. Les systèmes simples : la masse accrochée à un ressort, le pendule, le circuit électrique RLC sont utilisés pour illustrer les phénomènes d'oscillations des systèmes réels tels que l'exemple du mouvement de l'enfant sur une balançoire, le balancier d'une horloge, un arbre ou un pont dans une tempête ou le système de l'équilibre vertical de l'oreille interne du corps humain.

## 1.1 Définitions générales

### 1.1.1 Oscillation (vibration)

C'est un mouvement qui s'effectue de part et d'autre (aller-retour) d'une position d'équilibre. Une vibration désigne les oscillations rapides des systèmes mécaniques qui restent aux alentours d'un état de repos (équilibre). Un tel mouvement peut soit :

- ▷ *Provoqué* par une *excitation* : on parle alors de *vibrations forcées (oscillations forcées)*.
- ▷ Le *résultat* d'une *action imposée* à un *instant donné*, comme écarter le système de sa *position de repos (équilibre)*, ou lui *imposer une impulsion initiale* : on parle alors de *vibrations libres (oscillations libres)*

En général, les systèmes mécaniques présentent de l'amortissement et les vibrations libres décroissent au cours du temps pour devenir insignifiantes : on parle alors de vibrations libres amorties (oscillations libres amorties). Au contraire, les vibrations forcées subsistent tant qu'il y a excitation.

### 1.1.2 Oscillateur

Le système physique est appelé oscillateur ou système oscillant lorsque son équation horaire  $q(t)$  varie périodiquement de part et d'autre d'une valeur notée  $q_e$ , entre deux valeurs extrêmes notées  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  telles que  $q_1(t) < q_e < q_2(t)$ .

L'oscillation, de forme quelconque et de période  $T$ , se reproduit de façon régulière au cours du temps, quel que soit  $t$  :

$$q(t) = q(t + T)$$

Un exemple de réponse d'un oscillateur est donné sur la figure 1.1.

Suivant la **nature du système** la grandeur  $q$  représente par exemple la **position** d'un point matériel  $(x, y, z)$ , une **intensité** ( $i$ ) ou une **tension électrique** ( $u$ ), une **charge**

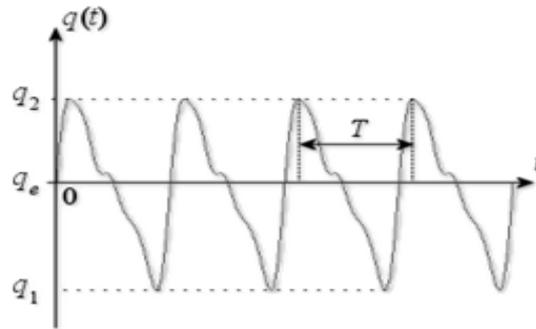


FIGURE 1.1 – Réponse d'un oscillateur quelconque.

( $Q$ ) portée par un condensateur, un **moment dipolaire** ( $\mu$ ), une **densité moyenne d'électrons** ( $n_m$ ) dans un plasma.

$$q \Rightarrow x, y, z, \theta, i, u, Q \dots$$

**Remarque :** Dans ce qui suit les dérivations première et seconde par rapport au temps sont notées respectivement :

$$q'(t) = \frac{dq}{dt} = \dot{q}(t) \quad \text{et} \quad q''(t) = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}(t) \quad \text{ou simplement} \quad \dot{q} \quad \text{et} \quad \ddot{q}$$

### Oscillateur harmonique

Dans le cas où la **forme des oscillations** est **sinusoïdale** (figure 2.1) ou **harmonique**, l'oscillateur est appelé **oscillateur harmonique**.

L'**excitation** appliquée au système est **très brève**, elle disparaît dès que le système oscille, cette excitation est produite par **les conditions initiales** imposées au système (par exemple position et vitesse initiales dans le cas d'un système mécanique). Les oscillations sont dites **libres**.

L'**énergie totale** du système **se conserve** au cours du temps, le système ne dissipe pas d'énergie.

**Définition :** la dissipation désigne le phénomène selon lequel un système dynamique (onde, oscillation...) perd de l'énergie au cours du temps.

La réponse de l'oscillateur harmonique s'écrit :

$$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \phi)$$

ou en choisissant convenablement l'origine des temps :

$$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t)$$

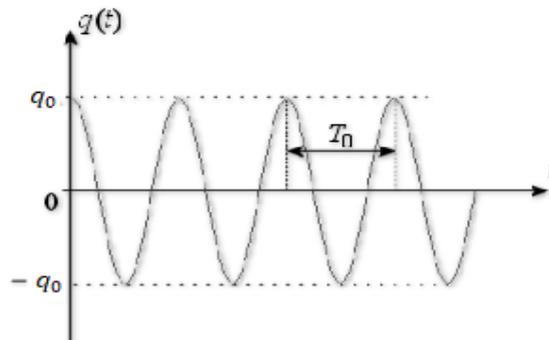


FIGURE 1.2 – Réponse d'un oscillateur harmonique.

Les oscillations sont caractérisées par une amplitude  $q_m$  et par une période  $T_0$ , appelée période propre. Celle-ci est liée à la pulsation propre  $\omega_0$  et à la fréquence propre  $f_0$  par les relations

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0}$$

### Oscillateur harmonique amorti

Un système physique en évolution **dissipe généralement de l'énergie** (par frottement, par effet Joule, etc.) : **l'énergie totale ne se conserve plus dans le temps**. Le système est dit **amorti**. On constate alors que **l'amplitude** des oscillations **décroit** au cours du temps : les oscillations sont **harmoniques amorties** (ou **pseudo-sinusoïdales** ou **pseudo-périodiques**).

Les oscillations sont libres (excitation très brève produite par les conditions initiales, il n'y a pas d'excitation pendant les oscillations). Le système physique est décrit par le modèle de l'oscillateur harmonique amorti. On distingue différents régimes d'évolution : apériodique, critique et pseudo-périodique.

A titre d'exemples, deux réponses de tels oscillateurs (figure 3.1). Remarquez que, dans les deux cas, l'amplitude des oscillations décroît en fonction du temps. Dans le cas d'un amortissement fort, il n'y a plus d'oscillations.

### Oscillateur harmonique forcé

Lorsqu'un système oscillatoire (libre ou amorti) est soumis à une excitation permanente produite par un dispositif extérieur, les oscillations sont dites **forcées**.

L'excitation peut être de différentes formes. Ces principales formes d'excitation sont représentées dans la figure 1.4.

L'excitation fournit de façon permanente de l'énergie au système.

Dans le cas d'une excitation sinusoïdale appliquée à un système amorti, l'excitation fournit au système à chaque période, une quantité d'énergie exactement égale à celle dissipée par le système. Au bout d'un certain temps, les oscillations du système ne sont plus ainsi

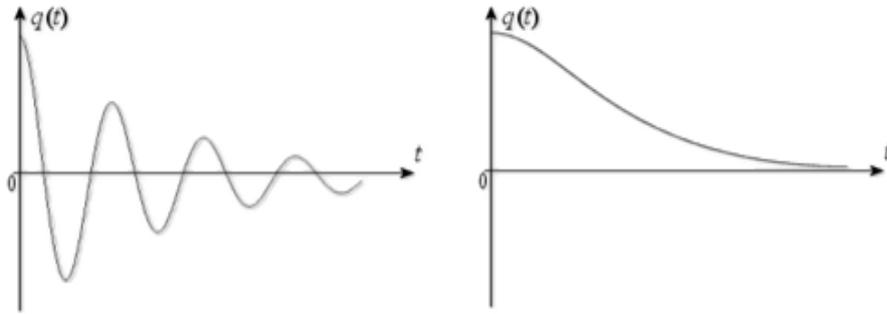


FIGURE 1.3 – Régime pseudo-périodique Amortissement fort.

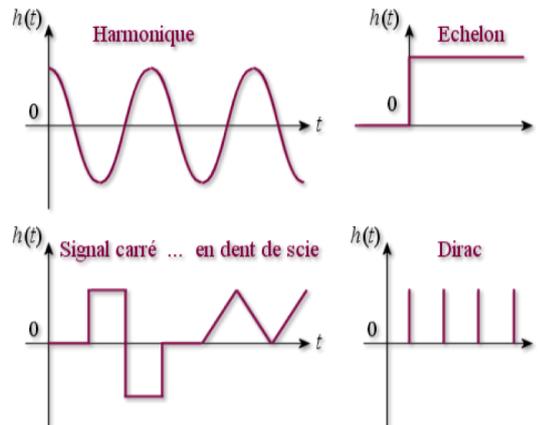


FIGURE 1.4 – Principales formes d'excitation.

amorties, elles sont harmoniques de pulsation égale à celle de l'excitation, le système évolue en régime permanent.

Sous certaines conditions, l'excitation conduit à un phénomène de résonance. Le système physique est décrit par le modèle de l'oscillateur harmonique forcé.

La figure ci-dessous représente la réponse d'un tel oscillateur en régime permanent :

### Oscillateur anharmonique

Lorsqu'un système physique *évolue* suivant une *loi périodique*, celle-ci est généralement de *forme quelconque*, le système *n'est donc pas décrit* par un *oscillateur harmonique*. Cependant :

- ▷ D'une part, *à condition de ne considérer que des petites variations* de  $q(t)$  (*approximation des petites oscillations*), on constate que certains systèmes, se comportent *comme des oscillateurs harmoniques*.
- ▷ D'autre part, *on montre mathématiquement* que toute *oscillation périodique*

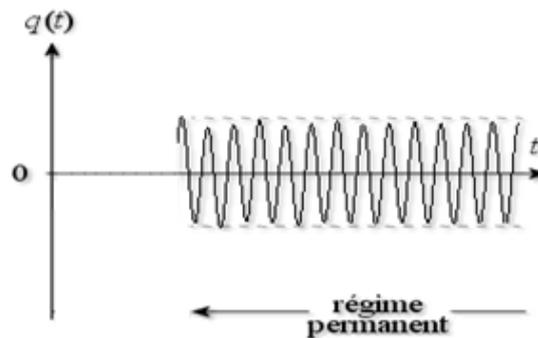


FIGURE 1.5 – Régime permanent.

se *décompose* en une *somme d'oscillations harmoniques*, de *pulsations multiples* d'une pulsation donnée appelée *pulsation fondamentale* (*décomposition de Fourier*). L'oscillateur est dit *anharmorique*.

Le système physique dont la réponse est représentée dans la figure 1.6 est un oscillateur anharmorique.

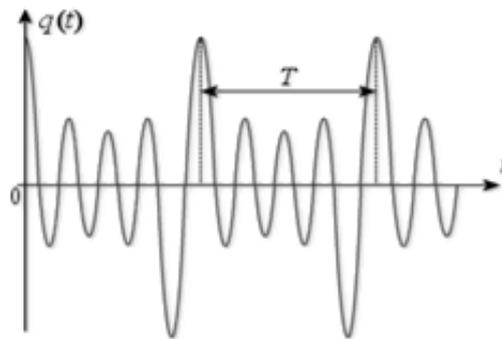


FIGURE 1.6 – Réponse d'un oscillateur anharmorique.

En effet  $q(t)$  :

- ▷ est une fonction périodique du temps,
- ▷ elle est de forme quelconque,
- ▷ elle se décompose en une somme de quatre fonctions harmoniques, la première de pulsation  $w_0$ , les trois autres de pulsations multiples de celle-ci, soit :

$$q(t) = 2 \sin(0.8t) + 3 \sin(1.6t) + 4 \sin(2.4t) + 5 \sin(3.2t) \text{ (unitéSI)}$$

avec  $w_0 = 0.8$ ,  $w_1 = 2w_0 = 1.6$ ,  $w_2 = 3w_0 = 2.4$ ,  $w_3 = 4w_0 = 3.2$  ( $rad.s^{-1}$ ).

### 1.1.3 Coordonnées généralisées et nombre de degrés de liberté

On appelle *coordonnées généralisées* d'un système physique, *un ensemble de variables réelles* qui *décrivent* les *différents mouvements du système*.

Le nombre de coordonnées pour **un point** est de **trois (03)** (03 directions de l'espace), et donc un système de  $N$  points matériels possède  $3N$  coordonnées.

Le nombre de coordonnées pour **un corps rigide** est de **six (06)** (03 directions plus 03 rotations), et donc un système de  $M$  corps rigides possède  $6M$  coordonnées.

**Définition :** Un corps rigide est celui dont la forme géométrique ne varie pas même s'il est soumis à l'action de forces externes.

On appelle **degré de liberté (ddl)** d'un système **sa capacité d'effectuer un mouvement de translation** ou de **rotation** par rapport aux **trois directions de l'espace**.

Le **nombre de degré de liberté  $n$**  d'un système est le nombre **de coordonnées généralisées minimum** (ou **indépendantes**) **nécessaire** à la **description complète d'un système**. Il est égal au nombre de coordonnées moins le nombre de **contraintes (liaisons ou relations)  $C$** . Pour un système de  $M$  corps rigides et  $N$  points matériels, Le nombre de degré de liberté  $n$  est donné par :

$$n = (6M + 3N) - C$$

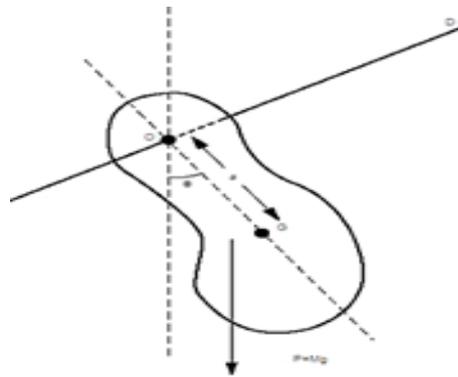


FIGURE 1.7 – Pendule pesant.

**Exemple** Le pendule de l'exemple est un corps rigide et donc le nombre de coordonnées est de six (06) :  $x_G$ ,  $y_G$  et  $z_G$  pour le centre de masse  $G$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  et  $\Phi$  pour les rotations autour des axes principaux.

Les contraintes sont ;  $z_G = 0$ ,  $\phi = 0$ ,  $\Phi = 0$ ,  $x_G = OG \cos \theta$  et  $y_G = OG \sin \theta$ . 05 contraintes.

$$n = 6 - 5 = 1 \text{ ddl} \quad \text{Le système est à un degré de liberté}$$

### 1.1.4 Énergies cinétique, potentielle et totale

#### Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un système à un degré de liberté est fonction de  $\dot{q}$ . Elle s'écrit sous la forme générale :

$$T(q) = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2$$

où  $a(q)$  est une fonction de la coordonnée généralisée  $q$  représentant le coefficient d'inertie.

#### Énergie Potentielle

Lorsque les amplitudes par rapport à la position d'équilibre sont faibles, il est toujours possible, de développer l'énergie potentielle  $U(q)$  en série de Taylor au voisinage de la position d'équilibre  $q = 0$ . En négligeant les puissances de  $q$  d'ordre supérieur à deux, on obtient :

$$U(q) = U(0) + \left. \frac{dU}{dq} \right|_{q=0} q + \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=0} q^2 + \dots$$

$q = 0$  correspond à un minimum de  $U(q)$  pour lequel  $\left. \frac{dU}{dq} \right|_{q=0} = 0$  et  $\left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=0} > 0$  (condition d'oscillation ou condition d'équilibre stable). Prenant l'origine de l'énergie potentielle à cette position d'équilibre ( $U(0) = 0$ ), l'énergie potentielle  $U(q)$  peut s'écrire sous la forme quadratique :

$$U(q) \simeq \frac{1}{2} b_0 q^2$$

Où  $b_0 = \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=0}$ .

#### Énergie Totale

L'énergie totale est tout simplement la somme des énergies cinétique et potentielle.

$$E = T + U$$

## 1.2 État d'équilibre

L'état ou la position d'équilibre d'un système mécanique oscillant correspond aux extremums de l'énergie potentielle. La condition d'équilibre s'écrit alors :

$$\left. \frac{dU}{dq} \right|_{q=q_0} = 0$$

On distingue deux type de position d'équilibre, la première correspond au minimum et la deuxième au maximum de l'énergie potentielle.

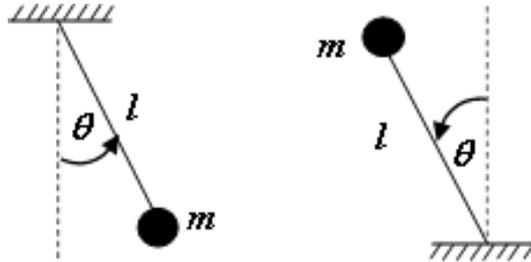


FIGURE 1.8 – État d'équilibre stable vs État d'équilibre instable

### 1.2.1 État d'équilibre stable

Il correspond au minimum de l'énergie potentielle qui se traduit par ;

$$\frac{d^2U}{dq^2} \Big|_{q=q_0} > 0$$

Le système, une fois écarté de sa position d'équilibre, il y retourne

### 1.2.2 État d'équilibre instable

Il correspond au maximum de l'énergie potentielle qui se traduit par ;

$$\frac{d^2U}{dq^2} \Big|_{q=q_0} < 0$$

Le système, une fois écarté de sa position d'équilibre, il ne la regagne pas

### 1.2.3 Exemple

$$U = -mgh = -mg(l - l \cos \theta)$$

$$\frac{dU}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = -mgl \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0$$

Les positions d'équilibres sont donc :

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad \theta = \pi$$

- $\frac{d^2U}{d\theta^2} \Big|_{\theta=0} = -mgl \cos \theta \Big|_{\theta=0} = -mgl < 0 \Rightarrow \theta = 0$  correspond à l'équilibre instable.
- $\frac{d^2U}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\pi} = -mgl \cos \theta \Big|_{\theta=\pi} = mgl < 0 \Rightarrow \theta = \pi$  correspond à l'équilibre stable.

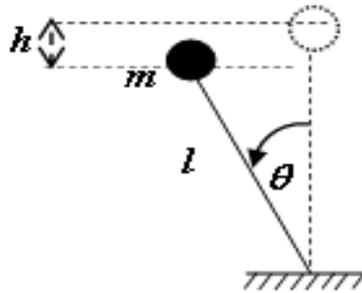


FIGURE 1.9 – État d'équilibre

## 1.3 Méthodes d'étude des oscillations

### 1.3.1 Méthode de Newton

La méthode de Newton consiste en l'utilisation du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ connu sous la forme } \sum \vec{F} = m\vec{a} \text{ pour les mouvements de translation}$$

Ou du théorème du moment cinétique :

$$\sum M_O(\vec{F}) = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \text{ qui est une conséquence du PFD pour les mouvements de rotation}$$

.

### 1.3.2 Théorème de l'énergie mécanique

La variation de l'énergie mécanique d'un système entre deux points  $A$  et  $B$  est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées au système entre ces deux points.

$$\Delta E_m = \sum W_{AB}(F_{ext}^{\vec{N}C})$$

Si le système est conservatif, ne subissant aucune force non conservative. L'application du théorème de l'énergie mécanique donne :

$$\Delta E_m = 0$$

L'énergie mécanique se conserve au cours du temps, donnant  $\frac{dE_m}{dt} = 0$ , équation de la conservation de l'énergie.

### 1.3.3 Formalisme de Lagrange

L'équation de Lagrange ou Formalisme de Lagrange pour les systèmes conservatifs s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

Avec  $\mathcal{L} = T - U$  le Lagrangien du système. Dans le cas des systèmes non conservatifs subissant des forces de frottement, L'équation de Lagrange devient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = f_q$$

Si la force de frottement est de type visqueux dépendant de la vitesse  $f_q = -\beta \dot{q} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}}$ , l'équation de Lagrange devient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}}$$

$\mathcal{D}$  est la Fonction dissipation.

Dans le cas d'un système subissant une force extérieure  $F_{e,q}$  (système forcé) en plus de la force de frottement l'équation de Lagrange peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = F_{e,q}$$

# Chapitre 2

## Oscillations harmoniques libres : Systèmes à un (01) degré de liberté

### Sommaire

---

<b>2.1 Définitions et propriétés</b> . . . . .	<b>20</b>
2.1.1 Oscillation libre . . . . .	20
2.1.2 Formalisme de Lagrange pour les systèmes conservatifs .	20
2.1.3 Équation de mouvement . . . . .	21
<b>2.2 Exemples d'application</b> . . . . .	<b>23</b>
2.2.1 Pendule élastique . . . . .	23
2.2.2 Pendule simple . . . . .	24
2.2.3 Pendule de torsion . . . . .	24
2.2.4 Oscillateur électrique libre . . . . .	24
2.2.5 Oscillateur acoustique (résonateur d'Helmholtz) . . . . .	25
<b>2.3 Bilan énergétique</b> . . . . .	<b>25</b>
2.3.1 Variation temporelle de $T(t)$ et de $U(t)$ . . . . .	26
2.3.2 Variation spatiale de $U(x)$ . . . . .	26

---

## 2.1 Définitions et propriétés

### 2.1.1 Oscillation libre

Si un système, abandonné à lui-même autour d'une position d'équilibre, évolue ensuite de part et d'autre, on parle d'oscillateur libre. Un tel mouvement peut avoir lieu :

- Soit en imposant une action à un instant donné, comme écarter le système de sa position de repos (équilibre).
- Soit en lui imposant une impulsion initiale

L'excitation appliquée au système est très brève, elle disparaît dès que le système oscille. Cette excitation est produite par les conditions initiales imposées au système (position et vitesse initiales). Les oscillations sont dites libres et l'énergie totale du système se conserve au cours du temps, le système ne dissipe pas d'énergie.

### 2.1.2 Formalisme de Lagrange pour les systèmes conservatifs

L'équation de Lagrange ou Formalisme de Lagrange pour un système à un degré de liberté s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = F_q$$

$F_q$  est la force généralisée conjuguée de  $q$ , ou  $q$ -composante de la force  $F$  et  $T$  l'énergie cinétique du système.

Dans les systèmes conservatifs, la force appliquée au système dérive d'un potentiel  $U$  et elle s'écrit :

$$F_q = - \frac{\partial U}{\partial q}$$

L'équation de Lagrange devient alors :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial U}{\partial q}$$

Généralement l'énergie potentielle  $U$  ne dépend pas de la vitesse, c'est-à-dire que  $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = 0$ . L'équation de Lagrange peut alors s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q} = 0$$

On introduit la fonction de Lagrange (ou le Lagrangien) du système  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L} = T - U$$

D'où la forme de l'équation de Lagrange dans le cas d'un système conservatif :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

### 2.1.3 Équation de mouvement

l'équation différentielle du mouvement d'un système oscillant à un (01) degré de liberté de coordonnée généralisée  $q$  (variable dynamique) s'écrit :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Cette équation peut être déterminée en utilisant le formalisme de Lagrange et elle est dite linéaire si la grandeur  $q(t)$  est linéaire.

#### Énergie Cinétique

Dans le cas d'un système à un degré de liberté, dont la position est repérée par la coordonnée généralisée  $q$ . L'énergie cinétique en fonction de  $q$  et  $\dot{q}$  peut s'écrire sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$$

Où  $a$  est un coefficient d'inertie.

#### Énergie potentielle

Lorsque les amplitudes par rapport à la position d'équilibre sont faibles, il est toujours possible, d'écrire l'énergie potentielle  $U(q)$  sous la forme quadratique :

$$U(q) = \frac{1}{2} b q^2$$

#### Lagrangien du système et équations de mouvement

Le Lagrangien du système à un degrés de liberté s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} a \dot{q}^2 - \frac{1}{2} b q^2$$

Pour obtenir l'équation différentielle du mouvement, on utilise le formalisme de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = a \dot{q}$$

$$- \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = a \ddot{q}$$

$$- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -b q$$

Ce qui donne

$$a \ddot{q} + b q = 0$$

ou encore

$$\ddot{q} + \frac{b}{a} q = 0$$

Qui s'écrit sous la forme générale

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

où  $\omega_0^2 = \frac{b}{a}$  la pulsation propre du système.

Pour obtenir l'équation horaire du mouvement, on doit résoudre l'équation différentielle du mouvement

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

La solution  $q(t)$  de l'équation différentielle donne l'équation horaire du mouvement. On rappelle que le discriminant de l'équation caractéristique  $r^2 + \omega_0^2 = 0$  associé à l'équation différentielle s'écrit :

$$\Delta = b^2 - 4ac = -4ac < 0$$

Cette résolution montre que  $q(t)$  s'écrit sous l'une des trois formes équivalentes suivantes :

$$q(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$q(t) = q_m \sin(\omega_0 t + \psi)$$

$q(t)$  dépend de deux constantes  $(A, B)$ ,  $(q_m, \varphi)$  ou  $(q_m, \psi)$ . Il faut se donner deux relations pour les déterminer. Ces deux relations décrivent physiquement l'état initial du système, elles sont appelées conditions initiales. Elles s'écrivent à  $t = 0$  :

$$q(t=0) = q_0 \quad \text{et} \quad \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0$$

La réponse est harmonique  $q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

avec  $q_m$  l'amplitude,  $\varphi$  la phase initiale et  $\omega_0^2 = \frac{T_0}{2}$  la pulsation propre.

### Exemple

Réponse d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0$  avec les conditions initiales  $q(t=0) = q_0 > 0$  et  $\dot{q}(t) = 0$ .

On montre que  $q_m = q_0$  et  $\varphi = 0$  et donc  $q(t)$  s'écrit :

$$q(t) = q_0 \cos \omega_0 t$$

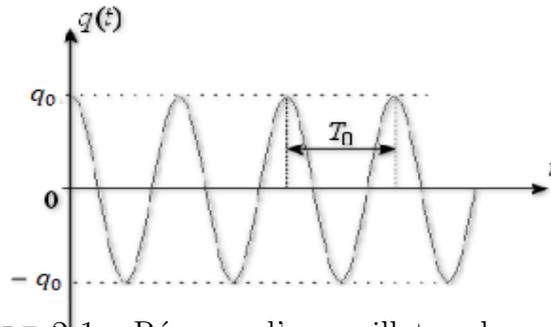


FIGURE 2.1 – Réponse d'un oscillateur harmonique.

**Relation entre les constantes**

En développant  $\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos \omega_0 t \cos \varphi - \sin \omega_0 t \sin \varphi$  et en identifiant terme à terme les deux premières expressions de la solution  $q(t)$

$$q(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad \text{et} \quad q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

on obtient les relations

$$A = q_m \cos \varphi \quad \text{et} \quad B = -q_m \sin \varphi$$

On en déduit :

$$q_m = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Autre relation :

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

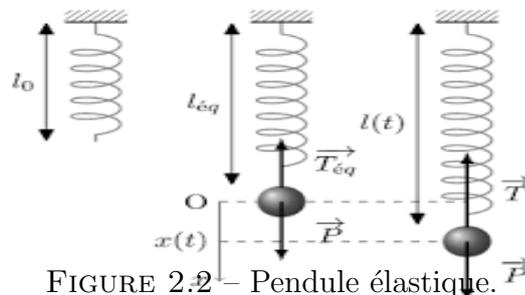
**2.2 Exemples d'application****2.2.1 Pendule élastique**

FIGURE 2.2 – Pendule élastique.

Le pendule élastique se compose d'une masse  $m$  accrochée à un ressort généralement de masse négligeable et de constante de raideur  $k$ .

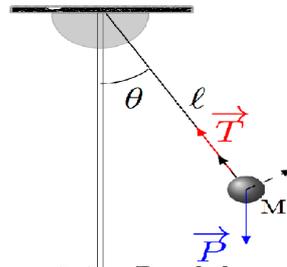


FIGURE 2.3 – Pendule simple.

### 2.2.2 Pendule simple

Le pendule simple se compose d'une masse  $m$  accrochée à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur  $l$  ou à une tige rigide de masse négligeable et de longueur  $l$ .

### 2.2.3 Pendule de torsion

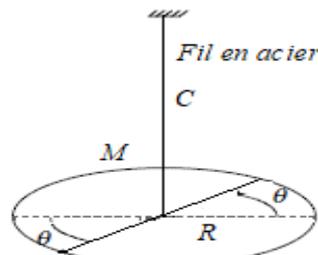


FIGURE 2.4 – Pendule de torsion

Le pendule de torsion se compose d'un disque de masse  $m$  (ou d'une tige masse  $m$ ) soudé en son centre à un fil de torsion de masse négligeable et de constante de torsion  $C$  (notée parfois  $D$  ou même  $k$ ). L'autre extrémité du fil est fixe.

### 2.2.4 Oscillateur électrique libre

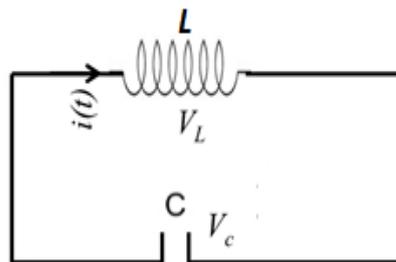


FIGURE 2.5 – Oscillateur électrique libre

Un circuit  $LC$  est un circuit  $RLC$  sans résistance. Ce circuit est dit idéal, puisqu'il ne peut être réalisé. Il contient une bobine  $L$  et un condensateur  $C$  initialement chargé. Il peut être utilisé entre autres comme un résonateur électrique.

### 2.2.5 Oscillateur acoustique (résonateur d'Helmholtz)

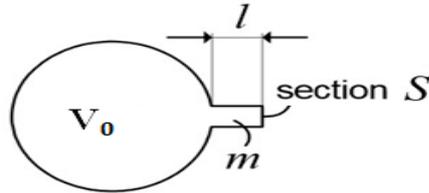


FIGURE 2.6 – Résonateur d'Helmholtz

En acoustique, les cavités résonantes possèdent une fréquence caractéristique qui est déterminée par leur forme géométrique. La résonance de Helmholtz est utilisée par exemple dans une guitare, où elle forme le mode le plus grave de sa caisse. La cavité de résonance est excitée pour produire des vibrations à sa fréquence de résonance (par un bruit de fond ou à l'aide d'un signal excitateur).

## 2.3 Bilan énergétique

L'énergie totale ou énergie mécanique, notée  $\mathcal{E}$ , de l'oscillateur harmonique de type mécanique, est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle, notées respectivement  $T$  et  $U$  ;

$$\mathcal{E} = T + U$$

On peut vérifier que l'énergie mécanique reste constante  $\mathcal{E} = C^{st}$  puisque les forces qui travaillent sont conservatives.

Prenons le cas, par exemple, du pendule élastique (masse+ressort) :

$U = \frac{1}{2} k x^2$  est l'énergie potentielle associée à la force de rappel du ressort.

$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$  est l'énergie cinétique associée à la masse.

(l'origine des énergies potentielles est choisie ici en  $x = 0$ )

Comme  $x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  et  $\dot{x} = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ , on en déduit

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

Finalement,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 = C^{st} \quad \text{ou encore} \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} k x_m^2 = C^{st}$$

L'énergie mécanique du système est égale à une constante dont la valeur est déterminée par les conditions initiales. Cette propriété est générale; quel que soit le type de système, l'énergie totale d'un système se comportant comme un oscillateur harmonique libre se conserve au cours des oscillations.

### 2.3.1 Variation temporelle de $T(t)$ et de $U(t)$

Les énergies cinétique et potentielle varient en fonction du temps, leur somme restant constante. Il y a, à tout instant, transformation d'énergie d'un type à l'autre.  $T$  et  $U$  sont des fonctions sinusoïdales de période  $\frac{T_0}{2}$  et de valeur moyenne  $\frac{\mathcal{E}}{2}$ .

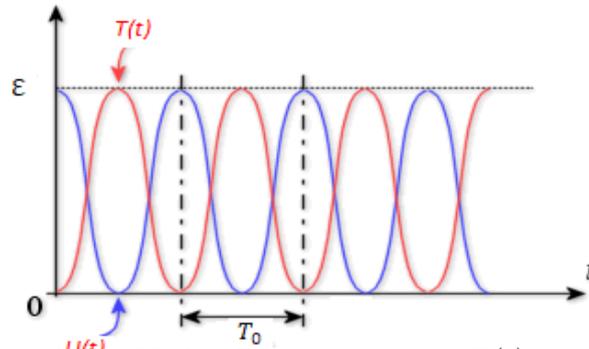


FIGURE 2.7 – Variation temporelle de  $T(t)$  et de  $U(t)$

### 2.3.2 Variation spatiale de $U(x)$

$T$  et  $U$ , définies par les expressions précédentes, ont des valeurs positives ou nulles ; l'énergie mécanique est fixée à la valeur  $\mathcal{E}$  déterminée par les conditions initiales. Le graphe montre que  $-x_m < x < x_m$ , les oscillations de  $m$  sont limitées à ce domaine.

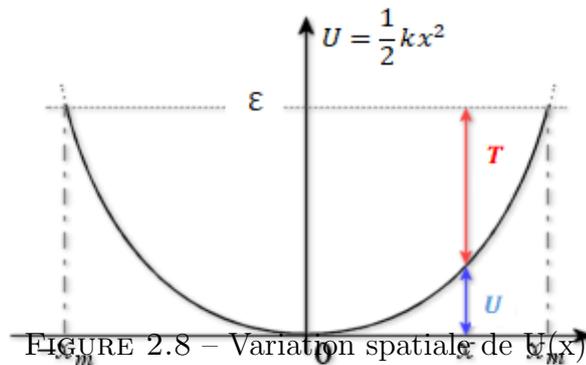


FIGURE 2.8 – Variation spatiale de  $U(x)$

# Chapitre 3

## Oscillations harmoniques libres amorties : Systèmes à un (01) degré de liberté

### Sommaire

---

<b>3.1 Définitions et propriétés</b>	<b>28</b>
3.1.1 Oscillation libre amortie	28
3.1.2 Formalisme de Lagrange pour les systèmes non conservatifs	29
3.1.3 Équation différentielle du mouvement	29
3.1.4 Équation horaire du mouvement	31
<b>3.2 Grandeurs caractéristiques</b>	<b>35</b>
3.2.1 Pseudo-période $T_a$	35
3.2.2 Décrément logarithmique $\delta$	35
3.2.3 Facteur de qualité $Q$	36
<b>3.3 Oscillateur électrique : circuit <math>(R, L, C)</math> série</b>	<b>36</b>
3.3.1 Mise en équation du système	37
3.3.2 Analogie électromécanique	38
<b>3.4 Bilan énergétique</b>	<b>38</b>
3.4.1 Variation de l'énergie totale	39
3.4.2 Énergie dissipée durant une pseudo-période	40

---

## 3.1 Définitions et propriétés

### 3.1.1 Oscillation libre amortie

La réalité physique nous impose de tenir compte des forces de frottements qui sont généralement présentes. Ces forces sont à l'origine de la perte d'énergie mécanique. Les amplitudes des oscillations ou des vibrations libres décroissent au cours du temps, en présence des frottements, pour devenir insignifiantes : on parle alors de vibrations libres amorties (oscillations libres amorties). Cet amortissement peut être de nature visqueuse ou solide.

Dans le cas de frottement de type visqueux, la viscosité d'un fluide impose une résistance au mouvement d'un oscillateur et cet effet de frottement peut être modéliser par un amortisseur.

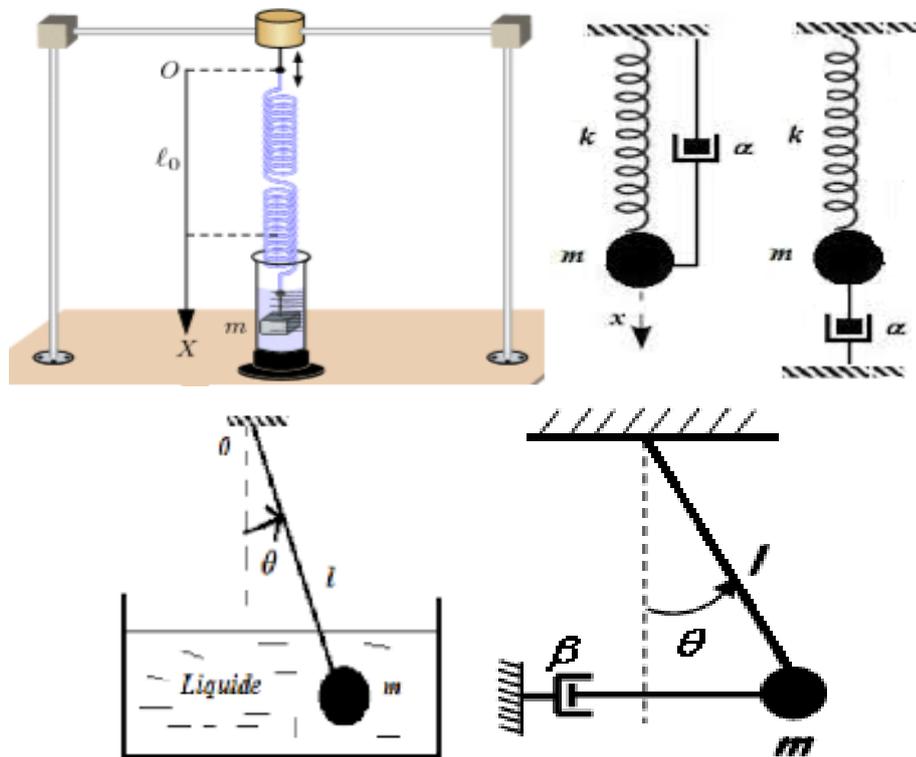


FIGURE 3.1 – Modélisation de l'effet de l'amortissement par un amortisseur.

### 3.1.2 Formalisme de Lagrange pour les systèmes non conservatifs

L'équation de Lagrange ou Formalisme de Lagrange pour un système conservatif ou pour un oscillateur harmonique libre à un degré de liberté s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

Pour les systèmes non conservatifs, la force de frottement appliquée au système s'ajoute au formalisme de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = f_q$$

Dans le cas d'une force de type visqueux proportionnelle à la vitesse  $f_q = -\beta \dot{q}$ , l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\beta \dot{q}$$

et comme, par définition, la fonction de dissipation de Rayleigh  $\mathcal{D}$  est égale à la moitié de la puissance dissipée  $\mathcal{P}_{dissipée}$  :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \mathcal{P}_{dissipée} \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}_{dissipée} = \frac{\partial Q}{\partial t} = \beta \dot{q}^2 \quad \text{et} \quad Q : \text{chaleur dgage}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D} = \frac{1}{2} \beta \dot{q}^2 \quad \text{et} \quad f_q = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = -\beta \dot{q}$$

D'où la forme de l'équation de Lagrange des systèmes non conservatifs :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}}$$

ou encore

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = 0$$

### 3.1.3 Équation différentielle du mouvement

l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur libre amorti à un (01) degré de liberté de coordonnée généralisée  $q$  (variable dynamique) s'écrit :

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Où  $\omega_0$  est la pulsation propre du système et  $\lambda$  le coefficient (facteur) d'amortissement. Cette équation peut être déterminée en utilisant le formalisme de Lagrange pour les systèmes non conservatifs (systèmes amortis)

Prenons le cas général d'un oscillateur à faibles amplitudes de Lagrangien  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} a \dot{q}^2 - \frac{1}{2} b q^2$  et de fonction de dissipation  $\mathcal{D} = \frac{1}{2} \beta \dot{q}^2$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = a \dot{q} \quad | \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = a \ddot{q} \quad | \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -b q \quad | \quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = \beta \dot{q}$$

Ce qui donne

$$a \ddot{q} + b q + \beta \dot{q} = 0$$

ou encore

$$\ddot{q} + \frac{\beta}{a} \dot{q} + \frac{b}{a} q = 0$$

Qui s'écrit sous la forme générale

$$\ddot{q} + 2 \lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

où  $\omega_0^2 = \frac{b}{a}$  est la pulsation propre du système et  $\lambda = \frac{\beta}{2a}$  le coefficient (facteur) d'amortissement.

### Exemple

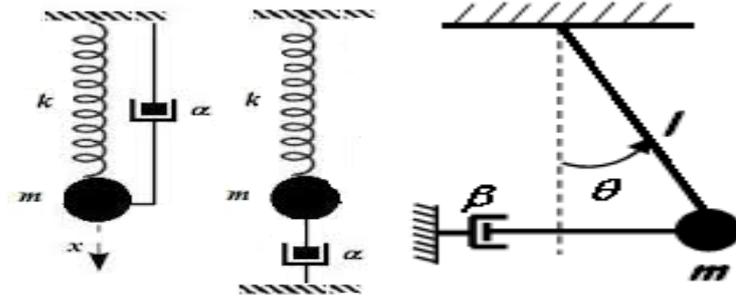


FIGURE 3.2 – Pendule élastique Vs Pendule simple.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = \frac{1}{2} \beta \dot{x}^2 \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m g l \theta^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = \frac{1}{2} \beta (l \dot{\theta})^2$$

$$\ddot{x} + 2 \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \ddot{\theta} + 2 \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\beta}{2m} \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\beta}{2m}$$

### 3.1.4 Équation horaire du mouvement

Pour obtenir l'équation horaire du mouvement, on doit résoudre l'équation différentielle du mouvement

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

La solution  $q(t)$  de l'équation différentielle donne l'équation horaire du mouvement. On propose des solutions de type

$$q(t) = e^{rt} \quad | \quad \dot{q}(t) = r e^{rt} \quad | \quad \ddot{q}(t) = r^2 e^{rt}$$

La substitution dans l'équation différentielle donne :

$$\begin{aligned} e^{rt} (r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2) &= 0 \\ \Rightarrow r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

Le discriminant réduit  $\Delta'$  associé à l'équation caractéristique s'écrit :

$$\Delta' = b'^2 - ac = \lambda^2 - \omega_0^2$$

Selon le signe de  $\Delta'$  trois cas de figure se présentent :

- $\Delta' > 0 \Rightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 > 0 \Rightarrow \lambda^2 > \omega_0^2$ ; on parle d'amortissement fort
- $\Delta' = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \omega_0^2$ ; on parle d'amortissement critique
- $\Delta' < 0 \Rightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \lambda^2 < \omega_0^2$ , on parle d'amortissement faible

L'équation caractéristique possède en général deux racines  $r_1$  et  $r_2$  et donc  $q_1(t) = e^{r_1 t}$  et  $q_2(t) = e^{r_2 t}$  sont des solutions de l'équation différentielle. La superposition des deux solutions est aussi une solution et s'écrit alors :

$$q(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

#### Régime ou mouvement apériodique; $\lambda > \omega_0$

$\Delta' > 0 \Rightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 > 0 \Rightarrow \lambda^2 > \omega_0^2$ ; le système est fortement amorti. Les deux racines sont réelles et négatives :

$$\begin{aligned} r_1 &= -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ r_2 &= -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

La solution générale est alors la somme des deux solutions :

$$q(t) = A e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + B e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}$$

ou encore

$$q(t) = A e^{(-\lambda+\alpha)t} + B e^{(-\lambda-\alpha)t} \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Ce qui donne

$$q(t) = e^{-\lambda t} [A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}]$$

$A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires à déterminer en utilisant les conditions initiales  $q(t=0) = q_0$  et  $\dot{q}(t=0) = \dot{q}_0$ .

Autre forme de  $q(t)$  : en rappelant que  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , on montre que :

$$q(t) = e^{-\lambda t} [(A+B) \cosh \alpha t + (A-B) \sinh \alpha t]$$

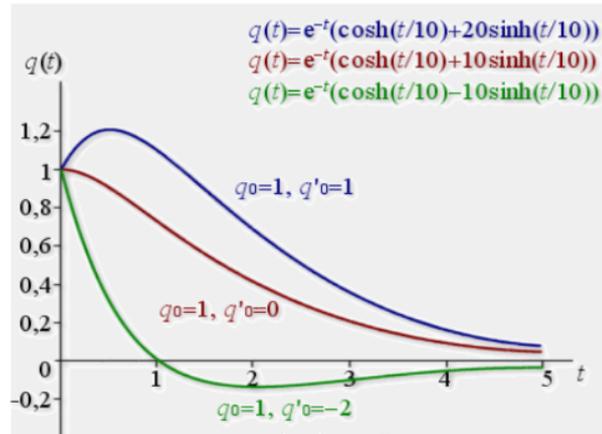


FIGURE 3.3 – Régime aperiodique pour (03) différentes conditions initiales avec les caractéristiques :  $\lambda = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_0 = 0.99 \text{ rad.s}^{-1}$  ce qui donne  $\Delta' = 0.01 > 0$ .

L'amortissement est tellement important que la fonction  $q(t)$  tend exponentiellement vers zéro sans oscillation.

**Remarque** Le système retrouve sa position d'équilibre sans osciller ; cela veut dire que le système n'est plus un oscillateur.

**Régime ou mouvement critique ;  $\lambda = \omega_0$**

$\Delta' = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \omega_0^2$  La racine est double. Elle est réelle et négative :

$$r_1 = r_2 = -\lambda$$

La solution générale est alors :

$$q(t) = A e^{-\lambda t} + B t e^{-\lambda t}$$

Dans ce cas les deux solutions sont linéairement dépendantes et donc nous devons chercher une solution linéairement indépendante de  $e^{-\lambda t}$ . Ce qui donne une solution de la forme :

$$q(t) = e^{-\lambda t} (At + B)$$

$A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires à déterminer en utilisant les conditions initiales  $q(t=0) = q_0$  et  $\dot{q}(t=0) = \dot{q}_0$ .

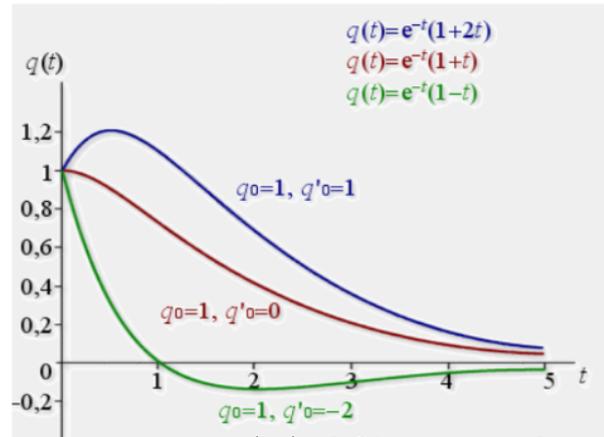


FIGURE 3.4 – Régime critique pour (03) différentes conditions initiales avec les caractéristiques :  $\lambda = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  ce qui donne  $\Delta' = 0$ .

la fonction  $q(t)$  tend vers zéro sans oscillation. Le système retrouve sa position d'équilibre au bout d'un temps fini sans effectuer aucune oscillation.

**Remarque** Le système retrouve sa position d'équilibre plus vite dans le mouvement critique que dans mouvement aperiodique.

**Régime ou mouvement pseudo-périodique ;  $\lambda < \omega_0$**

$\Delta' < 0 \Rightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \lambda^2 < \omega_0^2$ ; le système est faiblement amorti.

Dans ce cas le discriminant est réécrit sous la forme :

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = -(\omega_0^2 - \lambda^2) = i^2(\omega_0^2 - \lambda^2)$$

Les deux racines sont complexes conjuguées :

$$\begin{aligned} r_1 &= -\lambda + i \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\ r_2 &= -\lambda - i \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} r_1 &= -\lambda + i \omega_a \\ r_2 &= -\lambda - i \omega_a \end{aligned}$$

avec  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

La solution générale est alors la somme des deux solutions :

$$q(t) = A e^{(-\lambda+i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2})t} + B e^{(-\lambda-i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2})t}$$

ou encore

$$q(t) = A e^{(-\lambda+i\omega_a)t} + B e^{(-\lambda-i\omega_a)t}$$

Ce qui donne

$$q(t) = e^{-\lambda t} [A e^{i\omega_a t} + B e^{-i\omega_a t}]$$

Le calcul montre que  $q(t)$  s'écrit sous l'une des trois formes équivalentes suivantes :

$$q(t) = e^{-\lambda t} [C \cos \omega_a t + D \sin \omega_a t]$$

$$q(t) = e^{-\lambda t} q_m \cos(\omega_a t + \varphi)$$

$$q(t) = e^{-\lambda t} q_m \sin(\omega_a t + \psi)$$

$q(t)$  dépend de deux constantes ( $C, D$ ),  $(q_m, \varphi)$  ou  $(q_m, \psi)$  arbitraires à déterminer en utilisant les conditions initiales  $q(t=0) = q_0$  et  $\dot{q}(t=0) = \dot{q}_0$ .

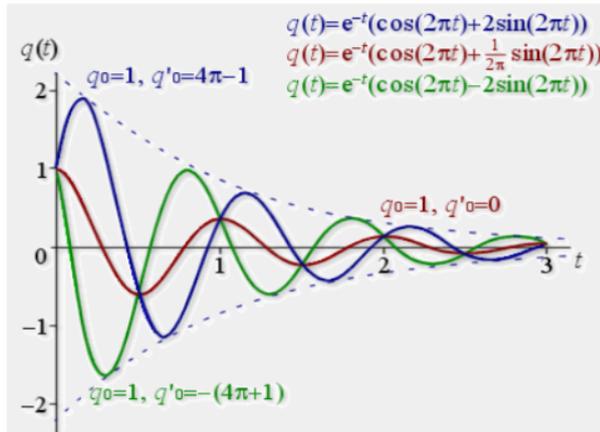


FIGURE 3.5 – Régime pseudo-périodique pour (03) différentes conditions initiales avec les caractéristiques :  $\lambda = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega_0 = \sqrt{4\pi^2 + 1} = 6.361 \text{ rad.s}^{-1}$  ce qui donne  $\Delta' = -4\pi^2 < 0$ .

C'est le mouvement pseudo-périodique (périodique amorti, sinusoïdal amorti ou oscillatoire amorti) avec une pulsation  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ , l'amortissement est assez faible pour permettre au système d'osciller autour de la position d'équilibre. Les amplitudes de l'oscillateur décroissent jusqu'à tendre vers 0 et l'oscillateur finit toujours par s'arrêter en regagnant sa position d'équilibre.

**Remarque** La courbe de variation de  $q(t)$  est comprise entre les deux fonctions exponentielles  $q_m e^{-\lambda t}$  et  $-q_m e^{-\lambda t}$  (enveloppes exponentielles : voir figure 3.5 traits bleus discontinus).

## 3.2 Grandeurs caractéristiques

### 3.2.1 Pseudo-période $T_a$

On définit la pseudo-période par :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}}$$

En rappelant que l'expression de la période propre est  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ,  $T_a$  devient :

$$T_a = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}}$$

$T_a < T_0$ , mais pratiquement la différence entre les deux périodes est généralement négligeable et elle ne devient mesurable que si  $\lambda$  le coefficient d'amortissement devient de l'ordre de la pulsation propre  $\omega_0$  du système.

### 3.2.2 Décrément logarithmique $\delta$

On définit le décrément logarithmique  $\delta$  par :

$$\delta = \ln \frac{q(t_n)}{q(t_n + T_a)} = \lambda T_a$$

où  $q(t_n)$  et  $q(t_n + T_a)$  représentent les amplitudes des oscillations aux instants  $t_n$  et  $t_n + T_a$  ; généralement ces deux instants sont choisis comme correspondant à deux extrema successifs de même signe. Cette quantité mesure la décroissance des amplitudes.

#### Démonstration

$$\begin{aligned} \frac{q(t_n)}{q(t_n + T_a)} &= \frac{e^{-\lambda t_n} q_m \cos(\omega_a t_n + \varphi)}{e^{-\lambda(t_n + T_a)} q_m \cos(\omega_a(t_n + T_a) + \varphi)} = e^{\lambda T_a} \\ \Rightarrow \ln \frac{q(t_n)}{q(t_n + T_a)} &= \ln(e^{\lambda T_a}) = \lambda T_a \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de  $\delta$  pour  $N$  pseudo-période  $N T_a$

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{q(t_n)}{q(t_n + N T_a)}$$

**Remarque** La pseudo-période  $T_a$  et le décrement logarithmique  $\delta$  n'ont de sens que si le régime est pseudo-périodique.

### 3.2.3 Facteur de qualité $Q$

On définit le facteur de qualité par l'expression :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$$

Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système est grande. Or est d'autant plus grand, à  $\omega_0$  donnée, que l'amortissement est faible, d'où le nom de facteur de qualité.

Il existe également une autre définition de  $Q$  liées à l'énergie :

$$Q = -2\pi \frac{\mathcal{E}}{\Delta \mathcal{E}}$$

où  $\mathcal{E}$  est l'énergie totale du système à l'instant  $t_n$ , et  $\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}(t_n + T_a) - \mathcal{E}(t_n)$  est l'énergie dissipée pendant la pseudo-période suivant l'instant  $t_n$ .

### 3.3 Oscillateur électrique : circuit $(R, L, C)$ série

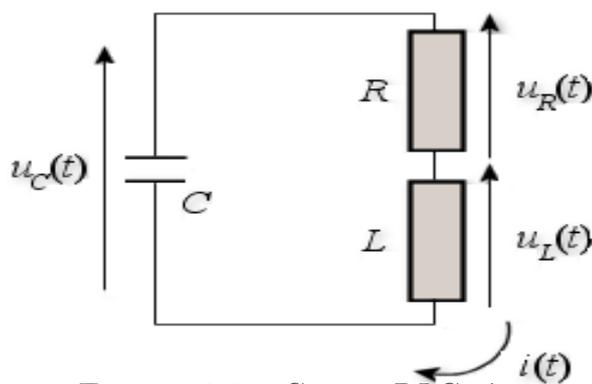


FIGURE 3.6 – Circuit  $RLC$  série.

Dans ce circuit, appelé aussi circuit oscillateur ou circuit vibrant, nous étudions la décharge d'un condensateur à travers une bobine et une résistance.

Désignons à un instant  $t$  par  $q(t)$  la charge du condensateur, par  $i(t)$  l'intensité du circuit et par  $U_L(t)$ ,  $U_R(t)$  et  $U_C(t)$  les tensions respectives aux bornes de la bobine, de la résistance et du condensateur.

### 3.3.1 Mise en équation du système

#### Équation en intensité $i(t)$

$$U_L(t) + U_R(t) = U_C(t)$$

explicitons les tensions,

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = -\frac{1}{C} \int i(t) dt$$

dérivons par rapport à  $t$ , il vient,

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{C} i(t) \quad \text{ou} \quad L \ddot{i}(t) + R \dot{i}(t) + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

ou simplement

$$\ddot{i} + 2\lambda \dot{i} + \omega_0^2 i = 0$$

Où  $2\lambda = \frac{R}{L}$  et  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

L'équation différentielle ci-dessus est du type oscillateur harmonique amorti de coefficient d'amortissement  $\lambda = \frac{R}{2L}$  et de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ .

#### Équation en charge $q(t)$

D'après les conventions utilisées sur la figure, on établit facilement à partir de l'équation différentielle précédente l'équation satisfaite par la charge instantanée du condensateur :

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = -\frac{1}{C} \int i(t) dt$$

En remplaçant  $i(t)$  et  $q(t)$  par  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$  et  $q(t) = \int i(t) dt$  on obtient :

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{1}{C} q(t) \quad \text{ou} \quad L \ddot{q}(t) + R \dot{q}(t) + \frac{1}{C} q(t) = 0$$

ou simplement

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

#### Équation en tension au borne du condensateur $U_C(t)$

Sachant que  $U_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ , on déduit de l'équation relative à la charge, l'équation satisfaite par la tension instantanée aux bornes du condensateur :

$$C \left( L \ddot{U}_C(t) + R \dot{U}_C(t) + \frac{1}{C} U_C(t) \right) = 0$$

ou simplement

$$\ddot{U}_C + 2\lambda \dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = 0$$

### 3.3.2 Analogie électromécanique

Système mécanique		Circuit électrique
<i>Rotation</i>	<i>Translation</i>	<i>analogie</i> $m/L$ (masse/inductance)
angle $\theta$	déplacement $x$	charge $q$
vitesse $\dot{\theta}$	$\dot{x}$	$\dot{q}$ ou courant $i$
moment d'inertie $I$	masse $m$	inductance $L$
constante de torsion $\mathcal{C}$	constante de raideur $k$	$\frac{1}{C}$
coefficient de frottement $\beta$		résistance $R$
<b>Énergie cinétique <math>T</math></b>		
$\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$	$\frac{1}{2} m \dot{x}^2$	$\frac{1}{2} L i^2$
<b>Énergie potentielle <math>U</math></b>		
$\frac{1}{2} \mathcal{C} \theta^2$	$\frac{1}{2} k x^2$	$\frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$
<b>Fonction de dissipation <math>\mathcal{D}</math></b>		
$\frac{1}{2} \beta v^2$ ( $v = \text{longueur} * \dot{\theta}$ ou $v = \dot{x}$ )		$\frac{1}{2} R i^2$

Tableau de correspondance

## 3.4 Bilan énergétique

Les systèmes physiques réelles, quel que soient leur types (mécanique, électrique ou autre), sont des systèmes dissipatifs ou amortis. L'énergie totale n'est pas conservée et décroît au cours du temps, ainsi l'énergie est perdue par des phénomènes de dissipation (amortissement, frottement, effet Joule...). Le travail des forces d'amortissement est à l'origine de cette dissipation.

$$a \ddot{q} + b \dot{q} = -\beta \dot{q}$$

multiplions les deux membres par  $\dot{q}$

$$\dot{q}(a \ddot{q} + b \dot{q}) = \dot{q}(-\beta \dot{q})$$

$$a \dot{q} \ddot{q} + b \dot{q}^2 = -\beta \dot{q}^2$$

multiplions les deux membres par  $dt$

$$dt \left( a \dot{q} \frac{d\dot{q}}{dt} + b \frac{dq}{dt} \dot{q} \right) = -\beta \dot{q}^2 dt$$

$$a \dot{q} d\dot{q} + b q dq = -\beta \dot{q}^2 dt$$

$$d\left(\frac{1}{2} a \dot{q}^2 + \frac{1}{2} b q^2\right) = -\beta \dot{q}^2 dt$$

$$d(T + U) = -\beta \dot{q}^2 dt$$

$$d\mathcal{E} = -\beta \dot{q}^2 dt \quad \text{ou encore} \quad d\mathcal{E} = -\beta v^2 dt$$

En principe la diminution de l'énergie totale  $-\beta v^2 dt$  correspond au travail des forces d'amortissement.

### vérification

Calculons le travail élémentaire  $dW$  effectué par la force de frottement  $f$  pendant un déplacement élémentaire  $dx$  :

$$dW = f dx = \beta \dot{x} dx = \beta \dot{x} dx \frac{dt}{dt} = \beta \dot{x} \frac{dx}{dt} dt = \beta \dot{x} \dot{x} dt = \beta \dot{x}^2 dt = \beta v^2 dt$$

### 3.4.1 Variation de l'énergie totale

Prenons l'exemple du système masse-ressort faiblement amorti :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -A \lambda e^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi) - A \omega_a e^{-\lambda t} \sin(\omega_a t + \varphi) \\ &= -A e^{-\lambda t} [\lambda \cos(\omega_a t + \varphi) + \omega_a \sin(\omega_a t + \varphi)] \\ &= -A \sqrt{\lambda^2 + \omega_a^2} e^{-\lambda t} \left[ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_a^2}} \cos(\omega_a t + \varphi) + \frac{\omega_a}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_a^2}} \sin(\omega_a t + \varphi) \right] \end{aligned}$$

Sachant que  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \Rightarrow \omega_a^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \Rightarrow \omega_0^2 = \omega_a^2 + \lambda^2$  ou encore  $\omega_0 = \sqrt{\omega_a^2 + \lambda^2}$ , nous pouvons écrire :

$$\cos \psi = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_a^2}}$$

$$\sin \psi = -\frac{\omega_a}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_a^2}}$$

ce qui donne :

$$\dot{x}(t) = -A \omega_0 e^{-\lambda t} [\cos \psi \cos(\omega_a t + \varphi) - \sin \psi \sin(\omega_a t + \varphi)]$$

ou encore

$$\dot{x}(t) = -A \omega_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi + \psi)$$

L'énergie totale s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 e^{-2\lambda t} \cos^2(\omega_a t + \varphi + \psi) + \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\lambda t} \cos^2(\omega_a t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\lambda t} [\cos^2(\omega_a t + \varphi + \psi) + \cos^2(\omega_a t + \varphi)] \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-2\lambda t} [\cos^2(\omega_a t + \varphi + \psi) + \cos^2(\omega_a t + \varphi)] \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} k A^2$$

### Énergie totale moyenne

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E} dt = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-2\lambda t} = \mathcal{E}_0 e^{-2\lambda t}$$

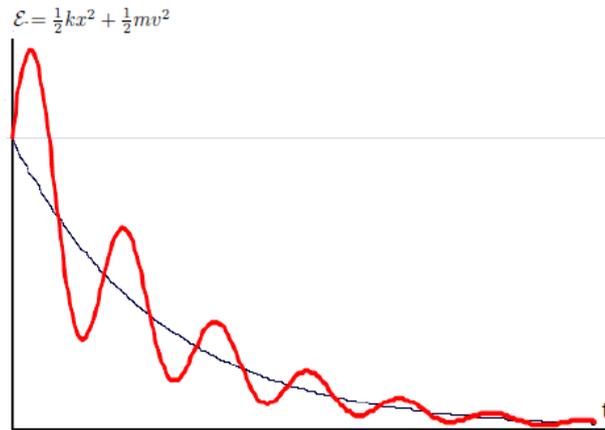


FIGURE 3.7 – Variation de l'énergie totale (mécanique) d'un oscillateur harmonique amorti.

### 3.4.2 Énergie dissipée durant une pseudo-période

L'énergie dissipée entre deux instants  $t_n$  et  $t_n + T_a$  (deux extrema successifs ; vitesse nulle  $\Rightarrow T = 0$ ) s'écrit :

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}(t_n + T_a) - \mathcal{E}(t_n) = \frac{1}{2} k x^2(t_n + T_a) - \frac{1}{2} k x^2(t_n) = \frac{1}{2} k x^2(t_n) \left[ \frac{x^2(t_n + T_a)}{x^2(t_n)} - 1 \right]$$

Ce qui donne :

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}(t_n) [e^{-2\delta} - 1]$$

En rappelant que  $\delta = \ln \frac{q(t_n)}{q(t_n + T_a)}$  d'où  $e^\delta = \frac{q(t_n)}{q(t_n + T_a)}$ .

$\Delta \mathcal{E}$  est négatif : l'énergie du système décroît en fonction du temps.  $|\Delta \mathcal{E}|$  représente l'énergie dissipée par l'oscillateur au cours d'une pseudo-période.

On en déduit finalement le rapport :

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}(t_n)} = e^{-2\delta} - 1$$

Ce rapport (sans dimension) représente l'énergie relative dissipée par l'oscillateur au cours d'une pseudo-période. Il est constant.

# Chapitre 4

## Oscillations harmoniques forcées : Systèmes à un (01) degré de liberté

### Sommaire

---

<b>4.1 Définitions et propriétés</b> . . . . .	<b>42</b>
4.1.1 Oscillation forcée . . . . .	42
4.1.2 Equation différentielle du mouvement . . . . .	43
<b>4.2 Résolution de l'équation différentielle</b> . . . . .	<b>44</b>
4.2.1 Cas d'une excitation (force) constante . . . . .	44
4.2.2 Cas d'une excitation (force) sinusoïdale . . . . .	46
<b>4.3 Phénomène de résonance</b> . . . . .	<b>50</b>
4.3.1 Étude de l'amplitude $A$ en fonction de la pulsation $\Omega$ . . . . .	50
4.3.2 Étude de la phase $\phi$ en fonction de la pulsation $\Omega$ . . . . .	51
<b>4.4 Bande passante et facteur de qualité <math>Q</math></b> . . . . .	<b>52</b>
<b>4.5 Bilan énergétique</b> . . . . .	<b>54</b>
4.5.1 Résonance en énergie . . . . .	56
<b>4.6 Oscillateur électrique : <math>(R, L, C)</math> série forcé</b> . . . . .	<b>56</b>
4.6.1 Équation en intensité $i(t)$ . . . . .	57
4.6.2 Équation en charge $q(t)$ . . . . .	57
4.6.3 Équation en tension au borne du condensateur $U_C(t)$ . . . . .	58
<b>4.7 Notion d'impédance mécanique</b> . . . . .	<b>58</b>
4.7.1 Amortisseur . . . . .	59
4.7.2 Masse . . . . .	59
4.7.3 Ressort . . . . .	59
<b>4.8 Excitation périodique non-sinusoïdale</b> . . . . .	<b>60</b>

---

## 4.1 Définitions et propriétés

### 4.1.1 Oscillation forcée

Un oscillateur abandonné à lui-même finit par s'arrêter en perdant toute son énergie rapidement ou lentement. La solution pour maintenir les oscillations est de fournir régulièrement de l'énergie pour compenser celle dissipée par frottement. Il faut donc forcer le système à osciller

Lorsque le système, oscillateur harmonique ou oscillateur harmonique amorti, est soumis à une excitation permanente produite par un dispositif extérieur. Les oscillations sont dites forcées.

L'excitation peut être de différentes formes. Les principales formes d'excitation sont représentées dans la figure ci-dessous.

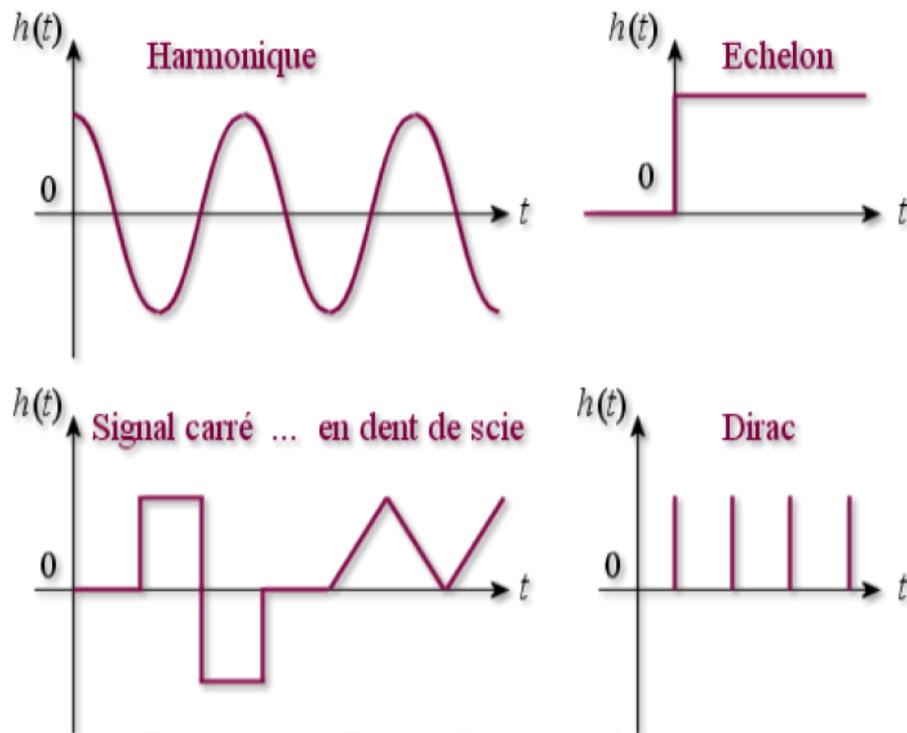


FIGURE 4.1 – Principales formes d'excitation.

Pour forcer un oscillateur, nous distinguons deux types d'excitation : excitation en force en imposant une force extérieure et excitation en déplacement en imposant un mouvement. La figure 4.2 montre différents types de forçage.

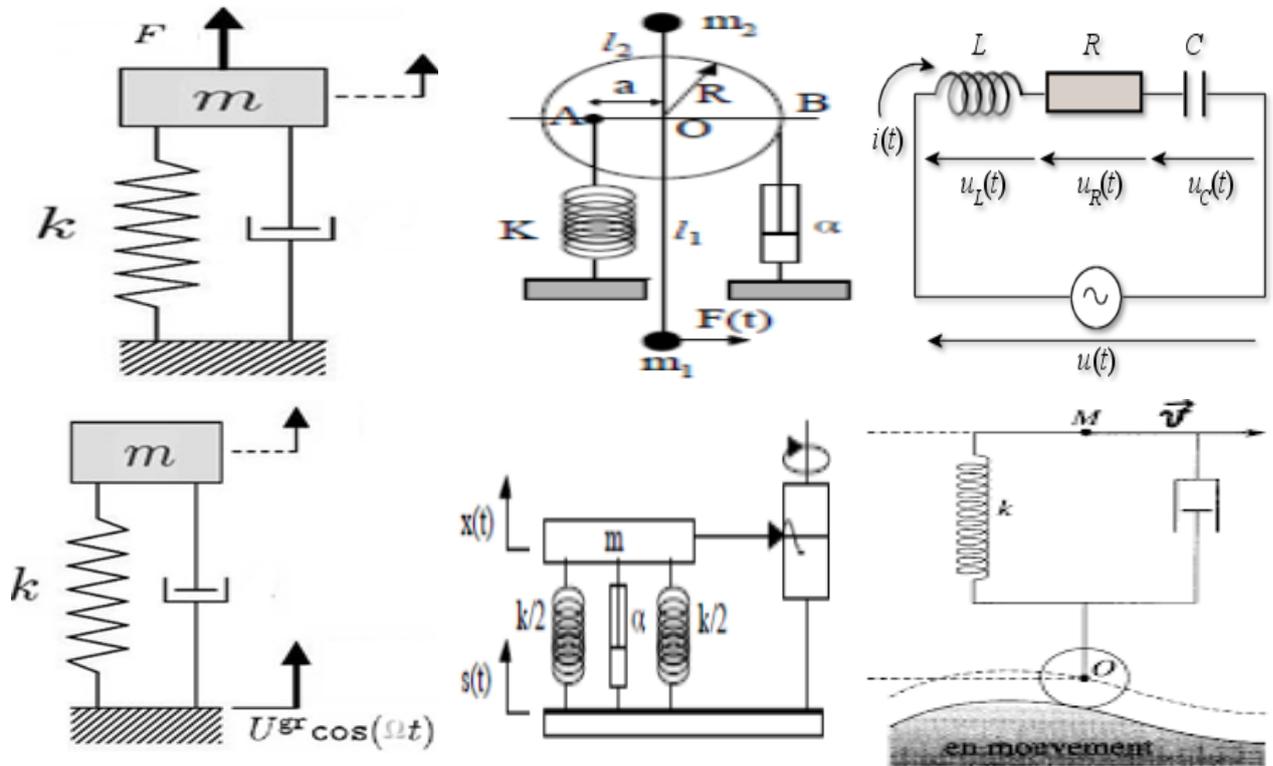


FIGURE 4.2 – Première ligne : excitation en force / Deuxième ligne : excitation en déplacement.

### 4.1.2 Equation différentielle du mouvement

L'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur amorti forcé à (01) degré de liberté de coordonnée généralisée  $q$  (variable dynamique) s'écrit :

$$a \ddot{q} + \beta \dot{q} + b q = F_{q,ext}$$

Ou encore

$$\ddot{q} + \frac{\beta}{A} \dot{q} + \frac{b}{a} q = \frac{F_{q,ext}}{a}$$

Ce qui donne

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = A(t)$$

Où  $\lambda = \frac{\beta}{2a}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{b}{a}$  et  $A(t) = \frac{F_{q,ext}}{a}$

## 4.2 Résolution de l'équation différentielle

L'équation différentielle du mouvement oscillatoire forcé  $\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t)$  est une équation du second ordre à coefficients constants avec second membre.

La solution  $q(t)$  de cette équation différentielle s'écrit :

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t) \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} q_h(t) : \text{solution homogène de l'équation sans second membre.} \\ q_p(t) : \text{solution particulière de l'équation avec second membre.} \end{array}$$

### Remarque

—  $q_h(t)$  finit par tendre vers 0 selon les trois cas vus en mouvement amorti.

—  $q_p(t)$  représente le régime permanent.

Selon les cas de la solution  $q_h(t)$ , la solution  $q(t)$  s'écrit :

—  $\Delta' > 0$  amortissement fort :

$$q(t) = e^{-\lambda t} [A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}] + q_p(t)$$

—  $\Delta' = 0$  amortissement critique :

$$q(t) = e^{-\lambda t} (At + B) + q_p(t)$$

—  $\Delta' < 0$  amortissement faible :

$$q(t) = e^{-\lambda t} A \cos(\omega_a t + \varphi) + q_p(t)$$

**Remarque** L'intervalle de temps, dans lequel la solution  $q_h(t)$  de l'équation sans second membre est non nulle, est appelé régime transitoire.

### 4.2.1 Cas d'une excitation (force) constante

Prenons l'exemple du système masse-ressort-amortisseur forcé.

La force  $F$  est constante quelque soit  $t$  et  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Le déplacement est dû à la force  $F$ .

$$m \ddot{x} + \beta \dot{x} + kx = F \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}$$

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ ,  $x_p(t)$  a la même forme que le second membre.

$$x_p = Cst \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_p = 0 \text{ et } \ddot{x}_p = 0$$

$$\text{Ce qui donne } \omega_0^2 x_p = \frac{F}{m} \quad \Rightarrow \quad x_p = \frac{F}{m \omega_0^2} = \frac{F}{k}$$

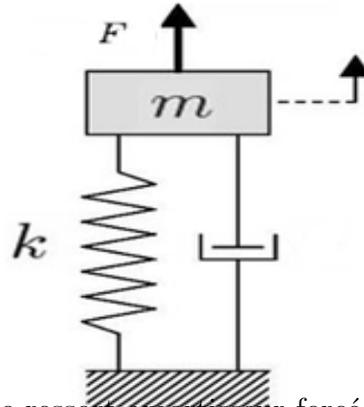


FIGURE 4.3 – Système masse-ressort-amortisseur forcé : Cas d'une force constante.

— **a.**  $\lambda < \omega_0$  amortissement faible :

$$x(t) = e^{-\lambda t} A \cos(\omega_a t - \varphi) + x_p(t) \text{ avec } x_p = \frac{F}{k}$$

Pour  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  :  $\tan \varphi = \frac{\lambda}{\omega_a}$  et  $A = \frac{-x_p}{\cos \varphi} = -x_p \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = -x_p \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega_a^2}}$

$$\Rightarrow x(t) = x_p(t) \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega_a^2}} e^{-\lambda t} \cos(\omega_a t - \varphi) \right]$$

La masse  $m$  oscille autour de  $x_p = \frac{F}{k}$  avant de s'immobiliser à  $x = x_p = \frac{F}{k}$ .

— **b.**  $\lambda = \omega_0$  amortissement critique :

$$x(t) = e^{-\lambda t} (At + B) + x_p(t) \text{ avec } x_p = \frac{F}{k}$$

Pour  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  :  $A = -\lambda x_p$  et  $B = -x_p$

$$\Rightarrow x(t) = x_p(t) [1 - (1 + \lambda t) e^{-\lambda t}]$$

La masse  $m$  n'oscille pas et finit par s'immobiliser à  $x = x_p = \frac{F}{k}$ .

— **c.**  $\lambda > \omega_0$  amortissement fort :

$$x(t) = e^{-\lambda t} [A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}] + x_p(t) \text{ avec } x_p = \frac{F}{k}$$

Pour  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  :  $A = \frac{x_p}{2} (1 - \frac{\lambda}{\alpha})$  et  $B = \frac{x_p}{2} (1 + \frac{\lambda}{\alpha})$

$$\Rightarrow x(t) = x_p(t) \left[ 1 - e^{-\lambda t} (\cosh \alpha t + \frac{\lambda}{\alpha} \sinh \alpha t) \right]$$

La masse  $m$  n'oscille pas et finit par s'immobiliser à  $x = x_p = \frac{F}{k}$ .

La figure 4.4 représente la réponse du système masse-ressort faiblement amorti et forcé avec une force constante

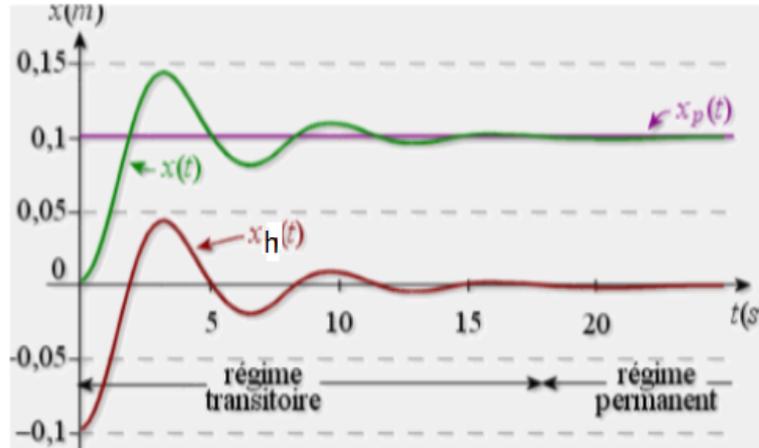


FIGURE 4.4 – Réponse du système masse-ressort-amortisseur forcé : Cas d'une force constante.

### 4.2.2 Cas d'une excitation (force) sinusoïdale

$F(t) = F_0 \cos \Omega t$  (certains ouvrages utilise  $\omega$  au lieu de  $\Omega$ ) et  $f = -\beta \dot{x}$

Continuons avec l'exemple du système masse-ressort-amortisseur forcé. L'équation différentielle s'écrit dans ce cas :

$$m \ddot{x} + \beta \dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

La solution s'écrit alors :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$x_h(t)$  est connue pour les trois cas de  $\lambda$  par rapport à  $\omega_0$  ; elle tend vers zéro et sa présence avec  $x_p(t)$  marque le régime transitoire.

- Quand on excite le système à une pulsation  $\Omega \neq \omega_0$  : La réponse du système ( $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$ ) aura lieu à la pulsation  $\Omega$ .
- Si on arrête l'excitation extérieure, le système retrouve le régime amorti.
- Une fois tous les effets transitoires disparaissent, le système entre en régime permanent  $x(t) = x_p(t)$ . Nous pouvons supposé une solution particulière sous la forme :

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \quad \dot{x}(t) = -A \Omega \sin(\Omega t + \phi) \quad \ddot{x}(t) = -A \Omega^2 \cos(\Omega t + \phi)$$

Si on ne considère que le régime permanent, l'équation différentielle s'écrit :

$$-A\Omega^2 \cos(\Omega t + \phi) - 2\lambda A\Omega \sin(\Omega t + \phi) + \omega_0^2 A \cos(\Omega t + \phi) = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

$$\Rightarrow (-A\Omega^2 + A\omega_0^2) \cos(\Omega t + \phi) - 2\lambda A\Omega \sin(\Omega t + \phi) = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A [(\omega_0^2 - \Omega^2)(\cos \Omega t \cos \phi - \sin \Omega t \sin \phi) - (2\lambda\Omega)(\sin \Omega t \cos \phi + \cos \Omega t \sin \phi)] \\ = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A \{[(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \phi - (2\lambda\Omega) \sin \phi] \cos \Omega t - [(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \phi + (2\lambda\Omega) \sin \phi] \sin \Omega t\} \\ = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t \end{aligned}$$

Par identification :

$$A [(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \phi - (2\lambda\Omega) \sin \phi] = \frac{F_0}{m} \quad (1)$$

$$-A [(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \phi + (2\lambda\Omega) \sin \phi] = 0 \quad (2)$$

de (2)

$$\Rightarrow \tan \phi(\Omega) = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

de (1)

$$\Rightarrow A [(\omega_0^2 - \Omega^2) - (2\lambda\Omega) \tan \phi] = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\cos \phi} = \frac{F_0}{m} \sqrt{1 + \tan^2 \phi}$$

Ce qui donne :

$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

**Deuxième méthode** En utilisant la notation complexe la force  $F(t)$  et la solution  $x(t)$  peuvent s'écrire comme :

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t = \Re \left\{ \tilde{F}(t) \right\} \quad \text{avec} \quad \tilde{F} = F_0 e^{i\Omega t}$$

et

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \phi) = \Re \{ \tilde{x}(t) \} \quad \text{avec} \quad \tilde{x}(t) = A e^{i(\Omega t + \phi)} = \tilde{A} e^{i\Omega t} \quad \text{où} \quad \tilde{A} = A e^{i\phi}$$

Les dérivées première et deuxième de  $\tilde{x}(t)$  donnent :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A} i \Omega e^{i \Omega t} \quad \text{et} \quad \ddot{\tilde{x}}(t) = -\tilde{A} \Omega^2 e^{i \Omega t}$$

L'équation différentielle devient (régime permanent) :

$$\tilde{A} e^{i \Omega t} (-\Omega^2 + 2 \lambda i \Omega + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} e^{i \Omega t}$$

Ce qui donne :

$$\tilde{A} = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i 2 \lambda \Omega}$$

ou encore

$$A e^{i \phi} = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i 2 \lambda \Omega}$$

de la forme générale  $Z_1 = \frac{Z_2}{Z_3}$  alors  $|Z_1| = \frac{|Z_2|}{|Z_3|}$  et  $\arg Z_1 = \arg Z_2 - \arg Z_3$ . Ce qui donne :

$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2 \lambda \Omega)^2}}$$

et

$$\tan \phi(\Omega) = \frac{-2 \lambda \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

La réponse en régime permanent est harmonique (ou sinusoïdale), elle s'écrit alors :

$$x(t) = x_p(t) = A(\Omega) \cos(\Omega t + \phi(\Omega))$$

La figure 4.5 représente la réponse en régime permanent de l'oscillateur pour une pulsation excitatrice  $\Omega$  donnée (fixe).

La figure 4.6 représente deux exemples de réponses à des excitations en force harmonique pour une pulsation excitatrice  $\Omega$  donnée (fixe). Le premier est fortement amorti et le second est faiblement amorti.

— À gauche  $\Delta' > 0$  :  $\omega_0 = 1 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\lambda = 5 \text{ rad}^{-1}$

$$x(t) = e^{-\lambda t} [A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}] + A(\Omega) \cos(\Omega t + \phi(\Omega))$$

— À droite  $\Delta' < 0$  :  $\omega_0 = 1 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $\lambda = 0.01 \text{ rad}^{-1}$

$$x(t) = e^{-\lambda t} A \cos(\omega_a t - \varphi) + A(\Omega) \cos(\Omega t + \phi(\Omega))$$

**Commentaires concernant le cas de l'excitation harmonique**

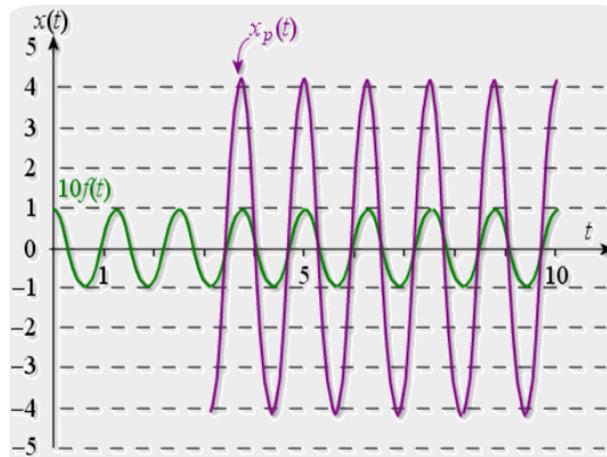


FIGURE 4.5 – Réponse en régime permanent : Cas d'une force sinusoïdale.

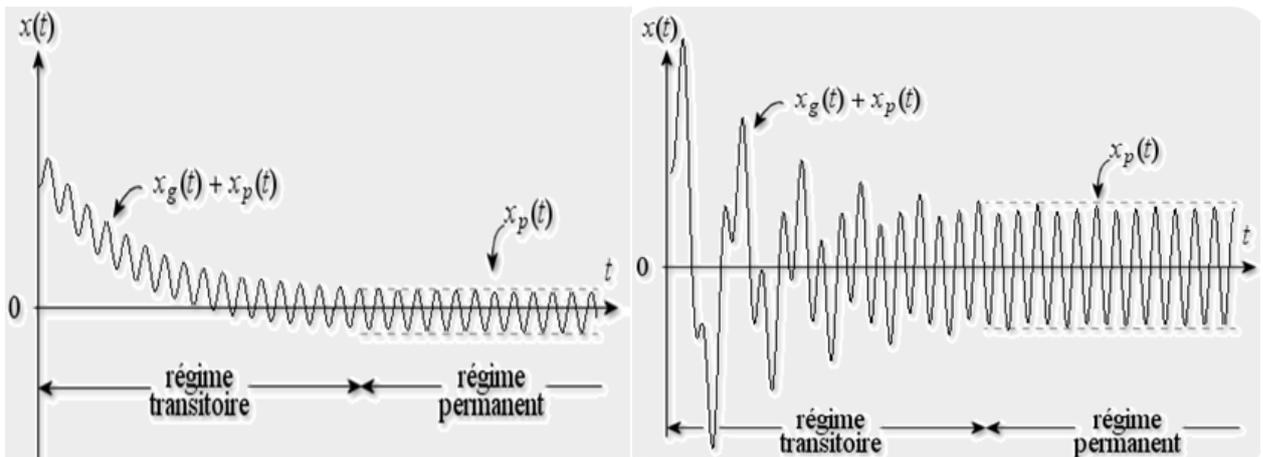


FIGURE 4.6 – Exemples de réponses à des excitations en force harmonique.

- En régime transitoire forcé : les oscillations, de forme compliquée, sont amorties,  $x(t)$  décroît en fonction du temps.
- En régime permanent : tout se passe comme si les oscillations n'étaient plus amorties, elles sont sinusoïdales pures d'amplitude constante  $A(\Omega)$  et de pulsation  $\Omega$

$$x(t) = A(\Omega) \cos(\Omega t + \phi(\Omega))$$

La réponse de l'oscillateur forcé amorti est alors équivalente à celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre égale à la pulsation de l'excitation  $\Omega$   
 L'excitateur fournit à l'oscillateur, à chaque période, une quantité d'énergie qui compense exactement l'énergie dissipée par celui-ci

### 4.3 Phénomène de résonance

#### 4.3.1 Étude de l'amplitude $A$ en fonction de la pulsation $\Omega$

La fonction  $A(\Omega) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$  est positive, elle est définie dans l'intervalle  $[0, +\infty[$  et tend vers 0 par valeur positive lorsque  $\Omega \rightarrow +\infty$ .

Elle présente un extrémum pour les valeurs de  $\Omega$  satisfaisant à l'équation  $\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0$  ou simplement  $\frac{dD(\Omega)}{d\Omega} = 0$ , où  $D(\Omega)$  est la quantité sous le radical. Calculons cette dérivée, il vient :

$$\frac{dD(\Omega)}{d\Omega} = 2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 2(2\lambda\Omega)2\lambda = 4\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2) = 0$$

La fonction présente donc des extrema pour  $\Omega = 0$  et pour  $(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2)$  soit pour  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ . Remarquons que cette valeur, appelée pulsation de résonance et notée  $\Omega_r$ , est définie si  $\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0$ , soit si  $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ .

L'étude complète de la fonction montre qu'il existe :

- si  $\lambda > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$  : un maximum pour  $\Omega = 0$ ,
- si  $\lambda = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$  : un maximum pour  $\Omega = 0$ ,
- si  $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$  : un maximum pour  $\Omega = \Omega_r$  et un minimum pour  $\Omega = 0$ , dans ce dernier cas la fonction présente un pic de résonance pour la pulsation de résonance

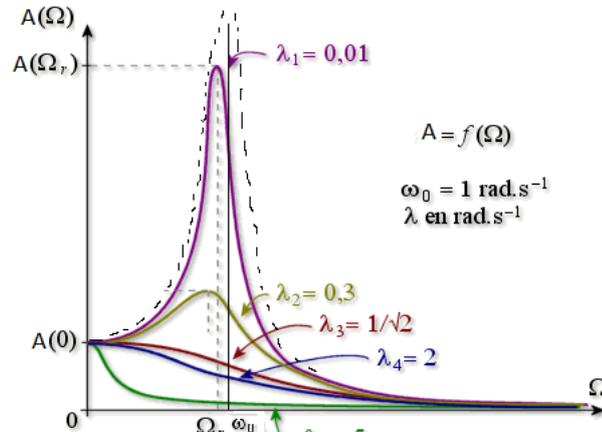
$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

Le calcul des amplitudes pour  $\Omega = 0$  et  $\Omega = \Omega_r$  conduit aux résultats :

$$A(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \quad \text{et} \quad A(\Omega_r) = \frac{F_0}{2\lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

La figure 4.7 représente les graphes de la fonctions  $A(\Omega)$  correspondant à un oscillateur de pulsation propre  $\omega_0 = 1 \text{ rad s}^{-1}$  pour des coefficients d'amortissement décroissant de 5 à  $0.01 \text{ rad s}^{-1}$ .

**Remarque :** Pour les valeurs de  $\lambda$  satisfaisant à la condition  $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ , le pic de résonance est d'autant plus marqué que la valeur de  $\lambda$  est petite et on remarque que la valeur de  $\Omega_r$  augmente lorsque la valeur de  $\lambda$  diminue. Lorsque  $\lambda = 0$ ;  $A(\Omega)$  devient infinie autour de  $\omega_0$ .

FIGURE 4.7 – Variation de l'amplitude  $A$  en fonction de la pulsation  $\Omega$ .

### Facteur de résonance $R$

Il est défini par le rapport des amplitudes à la résonance et à la pulsation nulle, soit

$$R = \frac{A(\Omega_r)}{A(0)} = \frac{\omega_0^2}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}}$$

Exprimé en fonction du facteur de qualité  $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$ ,  $R$  s'écrit :

$$R = Q \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Le phénomène de résonance est d'autant plus marqué que le facteur de qualité  $Q$  est plus grand.

Dans le cas de l'amortissement très faible  $\lambda \ll \omega_0$  :

$\Omega_r \approx \omega_0 \Rightarrow A(\Omega_r) = \frac{F_0}{2\lambda\omega_0}$ , on en déduit :

$$R = \frac{\omega_0}{2\lambda}, \text{ soit finalement } : R = Q$$

Lorsque l'amortissement est très faible, la pulsation de résonance et le facteur de résonance sont très peu différents respectivement de la pulsation propre et du facteur de qualité de l'oscillateur.

### 4.3.2 Étude de la phase $\phi$ en fonction de la pulsation $\Omega$

L'expression du déphasage de la réponse de l'oscillateur par rapport à l'excitation :

$$\tan \phi(\Omega) = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad \text{ou encore} \quad \phi(\Omega) = \arctan \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

montre que l'oscillateur est toujours en retard de phase par rapport à l'excitation et ce retard augmente lorsque la pulsation excitatrice augmente :

- L'oscillateur et l'excitateur sont en phase pour  $\Omega = 0$  et en opposition de phase pour  $\Omega = \Omega_r$ .
- L'oscillateur est en quadrature retard ( $\phi = -\frac{\pi}{2}$ ) par rapport à l'excitateur à la résonance.

La figure 4.8 représente les graphes de la fonction  $\phi(\Omega)$  correspondant à un oscillateur de pulsation propre  $\omega_0 = 1 \text{ rad s}^{-1}$  pour des coefficients d'amortissement décroissant de 5 à  $0.01 \text{ rad s}^{-1}$ .

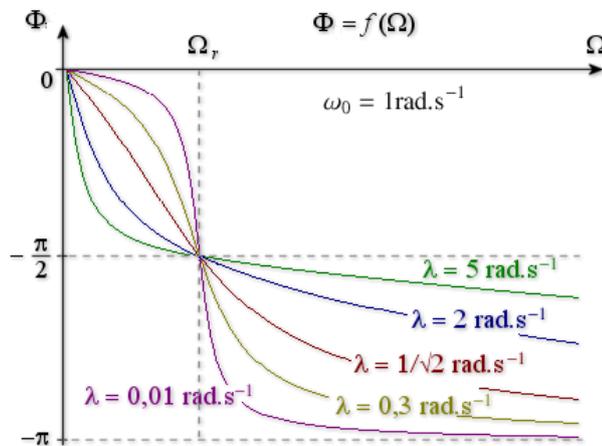


FIGURE 4.8 – Variation de la phase  $\phi$  en fonction de la pulsation  $\Omega$ .

Plus le coefficient d'amortissement est faible, plus la rotation de phase autour de  $\Omega_r$  est marquée, c'est-à-dire la valeur de  $\phi$  varie rapidement de  $0$  à  $-\pi$  lorsque la valeur de la pulsation de l'excitation  $\Omega$  varie de  $\Omega_r - \psi$  à  $\Omega_r + \psi$  (étant une quantité petite).

Lorsque l'amortissement est très faible, l'oscillateur passe instantanément de l'accord (en phase) à l'opposition de phase quand la pulsation franchit la valeur de la résonance.

#### 4.4 Bande passante et facteur de qualité $Q$

Dans le cas d'une excitation sinusoïdale de pulsation  $\Omega$  variable et dans le cas où  $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ , on définit la bande passante en pulsation de l'oscillateur par l'intervalle :

$$\Delta \Omega = \Omega_2 - \Omega_1$$

où les pulsations  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  correspondent aux amplitudes  $A(\Omega_1)$  et  $A(\Omega_2)$  telles que :

$$A(\Omega_1) = A(\Omega_2) = \frac{A_{max}(\Omega)}{\sqrt{2}} = \frac{A(\Omega_r)}{\sqrt{2}}$$

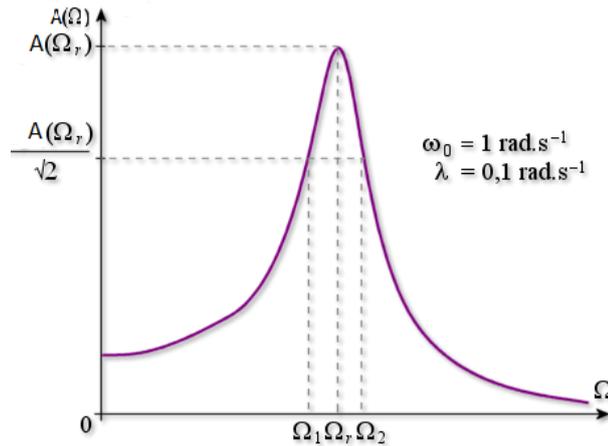


FIGURE 4.9 – Bande passante.

Les pulsation  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  définissant la bande passante vérifient donc l'équation :

$$A(\Omega) = \frac{A_{max}(\Omega)}{\sqrt{2}}$$

Ce qui donne :

$$\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\frac{F_0}{m}}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \quad \text{avec } \Omega = \Omega_{1,2}$$

Dans le cas de l'amortissement très faible, la courbe de résonance en amplitude présente un pic très marqué ; ce qui signifie que le pulsations  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont très proches de la pulsation de résonance  $\Omega_r$ , on pose :

$$\Omega_{1,2}^2 = \Omega_r^2 + \epsilon$$

Où  $\epsilon$  est un terme petit, positif ou négatif. En remplaçant  $\Omega_r$  par son expression de il vient :

$$\Omega_{1,2} = \omega_0 - 2\lambda\epsilon$$

Reportons cette valeur dans l'équation ci-dessus. On obtient la nouvelle équation :  $\epsilon = \pm 2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ .

On en déduit :  $\epsilon = \pm 2\lambda\omega_0\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}} \simeq \pm 2\lambda\omega_0$  (amortissement très faible,  $\lambda \ll$

$\omega_0$ )

Et également :  $\epsilon \simeq \pm 2 \lambda \Omega_r$  (amortissement faible,  $\omega_0 \simeq \Omega_r$ ),

D'autre part :  $\Omega_{1,2} = \sqrt{\Omega_r^2 + \epsilon} = \Omega_r \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{\Omega_r^2}} \simeq \Omega_r \left(1 + \frac{\epsilon}{2\Omega_r^2}\right) = \Omega_r + \frac{\epsilon}{2\Omega_r}$ .

Introduisons la dernière expression de  $\epsilon$ , il vient :  $\Omega_{1,2} \simeq \Omega_r \pm \frac{2 \lambda \Omega_r}{2\Omega_r} = \Omega_r \pm \lambda$ , et par suite :

$$\Omega_1 \simeq \Omega_r - \lambda \quad \text{et} \quad \Omega_2 \simeq \Omega_r + \lambda$$

La bande passante, dans le cas de l'amortissement très faible, s'écrit :

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \simeq 2 \lambda = \frac{\omega_0}{Q}$$

On constate que plus le facteur de qualité  $Q$  de l'oscillateur est grand plus la bande passante  $\Delta\Omega$  est étroite.

**Remarque :** Le facteur de qualité  $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$  est obtenu dans le cas de l'amortissement très faible, pour un oscillateur forcé, en utilisant la relation  $Q = 2\pi \frac{\langle \mathcal{E} \rangle_{stockée}}{\langle \mathcal{E} \rangle_{fournie}}$  ou encore  $Q = \frac{\Omega_r}{\Delta\Omega}$ .

## 4.5 Bilan énergétique

L'excitateur  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$  lors d'un déplacement  $dx$  fournit l'énergie :

$$dW = F(t) dx = F(t) \frac{dx}{dt} dt = F(t) \dot{x} dt$$

où  $F(t) \dot{x} = \mathcal{P}(t)_{fournie}$  la puissance instantanée fournie par l'excitateur en régime permanent et  $\dot{x} = -A \Omega \sin(\Omega t + \phi)$  la dérivée de  $x = A \cos(\Omega t + \phi)$ .

$$\Rightarrow \mathcal{P}(t)_{fournie} = -A \Omega F_0 \cos \Omega t (\sin \Omega t \cos \phi + \sin \phi \cos \Omega t)$$

c'est une fonction qui fluctue dans le temps et sa valeur moyenne est :

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle_{fournie} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t) dt = \frac{-A F_0 \Omega}{2} \sin \phi \quad \text{avec} \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

D'autre part  $\sin \phi = \frac{\tan \phi}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}}$  et  $\tan \phi = \frac{-2 \lambda \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

$$\Rightarrow \langle \mathcal{P}(t) \rangle_{fournie} = \frac{F_0^2}{m} \frac{\lambda \Omega^2}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2 \lambda \Omega)^2}$$

**Remarque** On peut montrer que la puissance moyenne dissipée  $\langle \mathcal{P}(t) \rangle_{dissipée}$  est égale à  $\langle \mathcal{P}(t) \rangle_{fournie}$  fournie par l'oscillateur.

**Démonstration**

$$m \ddot{x} + \beta \dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

multiplions les deux membres par  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$

$$m \ddot{x} \frac{dx}{dt} + \beta \dot{x} \frac{dx}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = F_0 \cos \Omega t \frac{dx}{dt}$$

$$m \dot{x} \dot{x} + \beta \dot{x} \dot{x} + kx \dot{x} = F_0 \cos \Omega t \dot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) + \beta \dot{x}^2 = F_0 \cos \Omega t \dot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (T + U) = \frac{d\mathcal{E}_T}{dt} = F_0 \cos \Omega t \dot{x} - \beta \dot{x}^2$$

où  $(F_0 \cos \Omega t \dot{x})$  est la puissance fournie par  $F(t)$ ,  $(-\beta \dot{x}^2)$  est la puissance dissipée par frottement et  $\mathcal{E}_T = \frac{1}{2} m A^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\Omega t + \phi)$ .

La moyenne de  $\frac{d\mathcal{E}_T}{dt}$  donne :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\mathcal{E}_T}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_0^T [-F_0 A \Omega \cos \Omega t \sin(\Omega t + \phi)] dt - \frac{1}{T} \int_0^T [\beta A^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \phi)] dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\mathcal{E}_T}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t)_{fournie} dt - \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t)_{dissipée} dt = 0$$

car  $\int_0^T \frac{d\mathcal{E}_T}{dt} dt = [\mathcal{E}_T]_0^T = 0$ . En remplaçant par 0 et puis par  $T$  dans l'expression de  $\mathcal{E}_T$ , la différence  $\mathcal{E}_T(T) - \mathcal{E}_T(0) = 0$ . Ce qui donne :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t)_{fournie} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t)_{dissipée} dt \Rightarrow \langle \mathcal{P}(t) \rangle_{fournie} = \langle \mathcal{P}(t) \rangle_{dissipée}$$

mais les valeurs instantanées sont différentes  $\mathcal{P}(t)_{dissipée} \neq \mathcal{P}(t)_{fournie}$ .  
L'énergie totale moyenne s'écrit :

$$\langle \mathcal{E}_T \rangle = \langle T \rangle + \langle U \rangle = \frac{1}{2} m \langle \dot{x}^2 \rangle + \frac{1}{2} k \langle x^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \mathcal{E}_T \rangle = \frac{m}{2T} \int_0^T A^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \phi) + \frac{k}{2T} \int_0^T A^2 \cos^2(\Omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \langle \mathcal{E}_T \rangle = \frac{1}{4} m \Omega^2 A^2 + \frac{1}{4} k A^2 = \frac{1}{4} m \Omega^2 A^2 + \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{4} m A^2 (\Omega^2 + \omega_0^2)$$

L'énergie totale stockée au cours du temps par l'oscillateur n'est pas constante mais sa valeur moyenne sur une période est constante.

### 4.5.1 Résonance en énergie

La puissance moyenne sur une période  $T$  fournie par  $F(t)$  est égale à celle dissipée

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle = \frac{F_0^2}{m} \frac{\lambda \Omega^2}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2} = \frac{F_0^2}{m} \frac{\lambda}{\left(\frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{\Omega}\right)^2 + (2\lambda)^2}$$

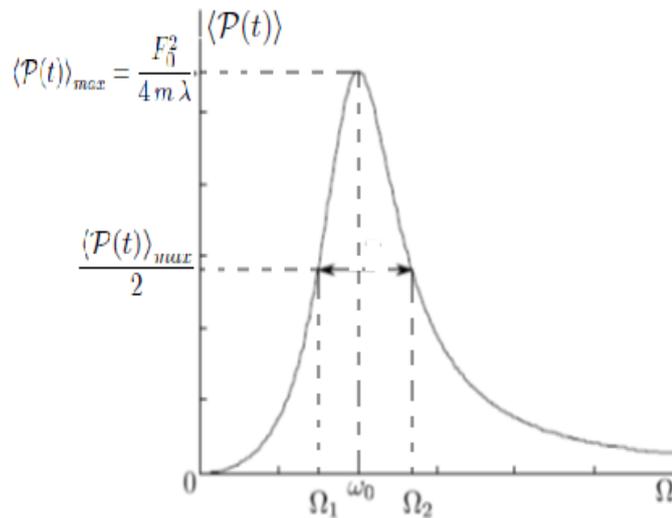


FIGURE 4.10 – Résonance en énergie.

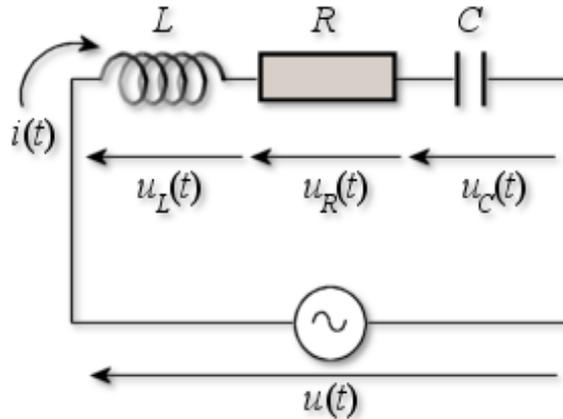
La puissance moyenne est maximale lorsque  $\Omega = \omega_0$ . Ce qui veut dire que la résonance en énergie a lieu pour  $\Omega = \omega_0$ . À la résonance la force excitatrice fournit une puissance maximale :

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle_{max} = \frac{F_0^2}{4m\lambda}$$

La bande passante est pour la puissance moyenne correspond à  $\langle \mathcal{P}(t) \rangle \geq \frac{\langle \mathcal{P}(t) \rangle_{max}}{2}$

## 4.6 Oscillateur électrique : $(R, L, C)$ série forcé

Considérons le circuit série  $(R, L, C)$  alimenté par un générateur de tension de f.é.m.  $U(t) = U_M \cos \Omega t$ ,  $U(t)$  représente l'excitation appliquée au circuit série. Désignons à un instant  $t$  par  $q(t)$  la charge du condensateur, par  $i(t)$  l'intensité de courant du circuit et par  $U_L(t)$ ,  $U_R(t)$  et  $U_C(t)$  les tensions respectives aux bornes de la bobine, de la résistance et du condensateur.

FIGURE 4.11 – Circuit  $RLC$  série forcé.

#### 4.6.1 Équation en intensité $i(t)$

À partir de l'écriture de la loi d'ohm :

$$U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = U(t)$$

explicitons les tensions,

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = U_M \cos \Omega t$$

En dérivant par rapport à  $t$ , et en divisant par  $L$ , l'équation en intensité :

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = -\Omega U_m \sin \Omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{i}(t) + \frac{R}{L} \dot{i}(t) + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{-\Omega U_m}{L} \sin \Omega t = \frac{\Omega U_m}{L} \cos(\Omega t + \frac{\pi}{2})$$

ou simplement

$$\ddot{i} + 2\lambda \dot{i} + \omega_0^2 i = \frac{\Omega U_m}{L} \cos(\Omega t + \frac{\pi}{2})$$

Où  $\lambda = \frac{R}{2L}$  et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ .

#### 4.6.2 Équation en charge $q(t)$

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = U_M \cos \Omega t$$

En rappelant que  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$  et  $\int i(t) dt = q(t)$ , l'équation par rapport à la charge instantanée du condensateur,

$$L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = U_M \cos \Omega t \quad \text{ou encore} \quad L \ddot{q}(t) + R \dot{q}(t) + \frac{1}{C} q(t) = \frac{U_M}{L} \cos \Omega t$$

ou simplement

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_M}{L} \cos \Omega t$$

### 4.6.3 Équation en tension au borne du condensateur $U_C(t)$

L'équation par rapport à la d.d.p. aux bornes du condensateur  $U_C(t)$ , en rappelant que  $U_C(t) = \frac{q(t)}{C}$  :

$$\ddot{U}_C(t) + \frac{R}{L} \dot{U}_C(t) + \frac{1}{LC} U_C(t) = \frac{U_M}{LC} \cos \Omega t$$

ou simplement

$$\ddot{U}_C + 2\lambda \dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = \frac{U_M}{LC} \cos \Omega t$$

## 4.7 Notion d'impédance mécanique

Soit un système mécanique soumis à une force,

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t$$

En régime permanent, le point d'application de la force se déplace avec la vitesse ;

$$v(t) = v_0 \cos(\Omega t + \psi)$$

On appelle impédance mécanique, le rapport des amplitude complexes de la force et de la vitesse :

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{F}_0}{\tilde{v}_0} \quad \text{équivalent à} \quad \tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} \quad \text{en électricité}$$

En utilisant la notation complexe, la réponse  $x(t)$  du système en régime permanent et la force  $F(t)$  s'écrivent :

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \phi) = \Re \{ \tilde{x}(t) \} \quad \text{avec} \quad \tilde{x}(t) = A e^{i(\Omega t + \phi)} = \tilde{A} e^{i\Omega t} \quad \text{où} \quad \tilde{A} = A e^{i\phi}$$

et

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t = \left\{ \tilde{F}(t) \right\} \quad \text{avec} \quad \tilde{F} = \tilde{F}_0 e^{i\Omega t}$$

### 4.7.1 Amortisseur

Dans le cas de l'amortisseur, la force appliquée :

$$F = \beta v \quad \text{équivalent à} \quad U = R i$$

On en déduit l'impédance complexe :

$$\tilde{Z}_\beta = \beta \quad \text{équivalent à} \quad \tilde{Z}_R = R \quad \text{en électricité}$$

### 4.7.2 Masse

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad \text{équivalent à} \quad U = L \frac{di}{dt} \quad \text{en électricité}$$

Soit en notation complexe :

$$\tilde{F} = m \frac{d\tilde{v}}{dt} = i m \Omega \tilde{v}$$

On en déduit l'impédance complexe :

$$\tilde{Z}_m = i m \Omega = m \Omega e^{i \frac{\pi}{2}} \quad \text{équivalent à} \quad \tilde{Z}_L = i L \Omega \quad \text{en électricité}$$

### 4.7.3 Ressort

La force de rappel du ressort s'écrit :

$$F = k x \quad \text{équivalent à} \quad U_C = \frac{q}{c} \quad \text{en électricité}$$

Soit en notation complexe :

$$\tilde{F} = k \tilde{x} = k \frac{\tilde{v}}{i \Omega}$$

On en déduit l'impédance complexe :

$$\tilde{Z}_k = \frac{k}{i \Omega} = -i \frac{k}{\Omega} = \frac{k}{\Omega} e^{-i \frac{\pi}{2}} \quad \text{équivalent à} \quad \tilde{Z}_C = \frac{-i}{C \Omega} \quad \text{en électricité}$$

**Exemple :** Soit le système (Masse-Ressort-amortisseur) soumis à la force  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ . L'impédance d'entrée  $\tilde{Z}$  s'obtient à partir de l'équation différentielle du mouvement :

$$m \ddot{x} + \beta \dot{x} + k x = F(t) \quad \Rightarrow \quad m \dot{v} + \beta v + k \int v dt = F(t)$$

En utilisant la notation complexe :

$$m (i \Omega)^2 \tilde{A} e^{i \Omega t} + \beta i \Omega \tilde{A} e^{i \Omega t} + k \tilde{A} e^{i \Omega t} = \tilde{F}_0 e^{i \Omega t}$$

Sachant que :

$$\tilde{v}(t) = \dot{\tilde{x}}(t) = i \Omega \tilde{A} e^{i \Omega t} = \tilde{v}_0 e^{i \Omega t} \quad \text{avec} \quad \tilde{v}_0 = i \Omega \tilde{A}$$

l'équation différentielle devient :

$$m i \Omega \tilde{v}_0 e^{i \Omega t} + \beta \tilde{v}_0 e^{i \Omega t} + \frac{k}{i \Omega} \tilde{v}_0 e^{i \Omega t} = \tilde{F}_0 e^{i \Omega t}$$

Ce qui donne :

$$\left[ \beta + i \left( m \Omega - \frac{k}{\Omega} \right) \right] \tilde{v}_0 = \tilde{F}_0$$

L'impédance mécanique complexe  $\tilde{Z}$  est alors :

$$\tilde{Z} = \beta + i \left( m \Omega - \frac{k}{\Omega} \right)$$

Cette impédance mécanique est équivalente à l'impédance d'entrée du circuit électrique (RLC) alimenté par une source de tension  $U(t) = U_M \cos \Omega t$

$$\tilde{Z} = R + i \left( L \Omega - \frac{1}{C \Omega} \right)$$

## 4.8 Excitation périodique non-sinusoidale

Lorsque la force excitatrice  $F(t)$  est périodique non-sinusoidale, l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$a \ddot{q} + \beta \dot{q} + b q = F(t)$$

où  $F(t)$  peut être décomposée en série de forces d'amplitudes et de pulsations différentes :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + B_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right)$$

ou encore

$$F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + B_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right)$$

avec :

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} F(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} F(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

où  $t_2 = t_1 + T$ .

La réponse du système en régime permanent est la somme des réponses calculées pour chaque harmonique (terme sinusoidal).

# Chapitre 5

## Oscillations à plusieurs degrés de liberté : Cas particulier des systèmes à deux degrés de liberté

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Définitions . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>5.2</b>	<b>Système libre à deux degrés de liberté . . . . .</b>	<b>65</b>
5.2.1	Pulsations propres . . . . .	66
5.2.2	Modes propres (normaux) . . . . .	67
5.2.3	Solution générale . . . . .	68
5.2.4	Situations particulières . . . . .	70
<b>5.3</b>	<b>Système forcé à deux degrés de liberté . . . . .</b>	<b>72</b>
5.3.1	Résolution du système d'équations . . . . .	73
5.3.2	Représentation graphique . . . . .	74
5.3.3	Cas d'un système non amorti . . . . .	75
<b>5.4</b>	<b>Équivalence électromécanique . . . . .</b>	<b>76</b>
5.4.1	Équivalence Force-tension . . . . .	76
5.4.2	Équivalence Force-courant . . . . .	77

---

## 5.1 Définitions

Un système à  $n$ -degrés de liberté nécessite  $n$  variables indépendantes pour étudier son état de façon complète. On distingue deux types :

- systèmes à  $n$ -degrés de liberté non couplés : l'équation de mouvement de chaque variable n'est pas fonction des autres variables.
- systèmes à  $n$ -degrés de liberté couplés : contrairement au premier, les équations de mouvement contiennent des termes de couplage.

**Équations différentielles du mouvement** Les équations différentielles des mouvements d'un oscillateur à plusieurs degré de liberté de coordonnées généralisées  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) s'obtiennent à partir du formalisme de Lagrange qui s'écrit sous la forme générale :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = F_{q_i}(t) \text{ avec } \mathcal{L} \text{ est fonction de } q_i \text{ et } \dot{q}_i \text{ (} i = 1 \dots n \text{)}$$

Ce qui donne le système d'équations :

$$\begin{aligned} f(\ddot{q}_1, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n) &= F_{q,1} \\ f(\ddot{q}_2, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n) &= F_{q,2} \\ \dots & \\ f(\ddot{q}_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n) &= F_{q,n} \end{aligned}$$

### Exemple

- 1. Système à deux degrés de liberté non couplé

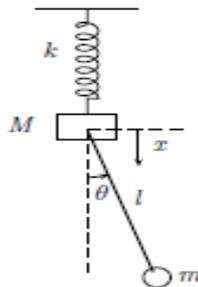


FIGURE 5.1 – Système à deux degrés de liberté non couplé.

Avec une bonne approximation :

$$T = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad U = \frac{1}{2} k x^2 - m g l \cos \theta + Cst$$

On en déduit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} m g l \theta^2$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} (M + m) \ddot{x} + k x &= 0 \\ m l^2 \ddot{\theta} + m g l \theta &= 0 \end{aligned}$$

— 2. Système à deux degrés de liberté couplé

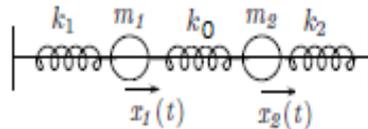


FIGURE 5.2 – Système à deux degrés de liberté couplé.

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad \text{et} \quad U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k_0 (x_2 - x_1)^2 + Cst$$

On en déduit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k_0 (x_2 - x_1)^2$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_0) x_1 - k_0 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_0) x_2 - k_0 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

**Couplage** Un système à deux degré de liberté est la réunion de deux systèmes à un degré de liberté, où le mouvement de l'un influe sur le mouvement de l'autre : les deux systèmes sont dits couplés. On peut avoir un couplage par

1. Élasticité : la liaison entre les oscillateurs est due à un ressort (système mécanique), ou à un condensateur (système électrique) (figure 5.3).

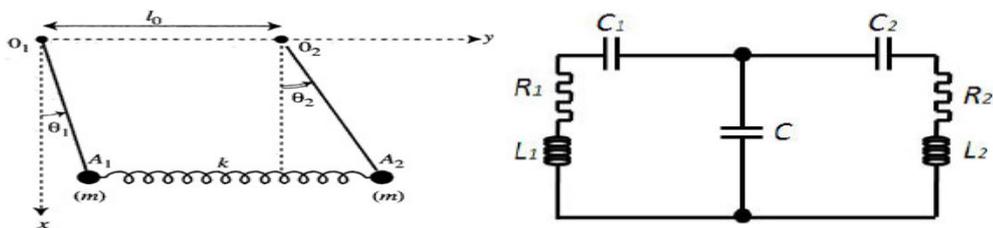


FIGURE 5.3 – Couplage par élasticité.

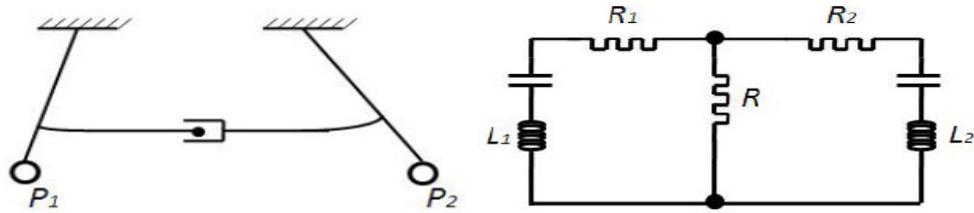


FIGURE 5.4 – Couplage par viscosité.

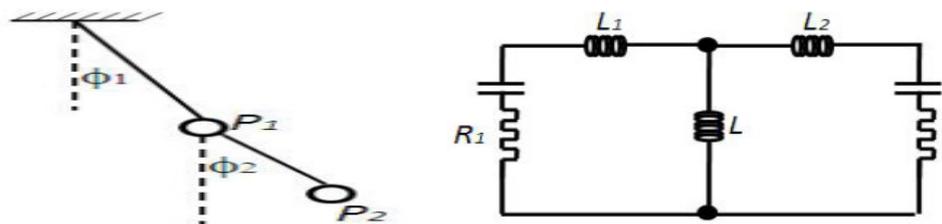


FIGURE 5.5 – Couplage par inertie.

2. Viscosité : la liaison est due à un frottement visqueux (système mécanique), ou à une résistance (système électrique) (figure 5.4).
3. Inertie : la liaison est due à une masse (mécanique), ou à une bobine (électrique) (figure 5.5).
4. Inductance mutuelle : Le couplage électrique le plus utilisé. Ce type de couplage n'a pas d'équivalent mécanique, mais se prête à la même description que les oscillateurs mécaniques (figure 5.6).

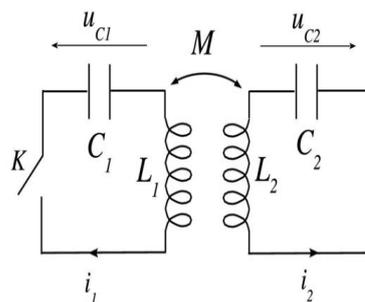


FIGURE 5.6 – Couplage par induction mutuelle.

**Mode propre (normal)** Lorsque l'équation différentielle du mouvement à deux degrés de liberté est linéaire, le mouvement le plus général est la superposition de deux mouvements. Il s'agit d'une superposition de deux mouvements harmoniques

simples indépendants et simultanés. Ces deux mouvements sont les modes propre (normaux). Si les deux parties du système oscillent selon un mouvement harmonique simple on dit que le système est dans un mode propre (normal) d'oscillation. Dans un tel mode toutes les parties du système passent en même temps par leurs positions d'équilibre. Un système à  $n$  – degrés de liberté possède  $n$  modes propres (normaux).

**Propriété d'un mode** En présence d'un seul mode, chaque partie mobile est en mouvement harmonique simple avec la même pulsation (fréquence) et la même constante de phase (Les parties mobiles du système libre oscillent soit en phase soit en opposition de phase, mais ce déphasage d'un angle  $\pi$  apparait comme un signe moins dans l'amplitude).

Dans chacun des modes, le système présente également une configuration caractéristique ou forme, donnée par le rapport des amplitudes du mouvement des parties mobiles ; qui est constant et est soit positif soit négatif.

## 5.2 Système libre à deux degrés de liberté

Soit le système composé de deux pendules simple identique de masses  $m$  et de longueurs  $l$ , couplés par un ressort de raideur  $k$  qui relie les deux masses (figure 5.7).

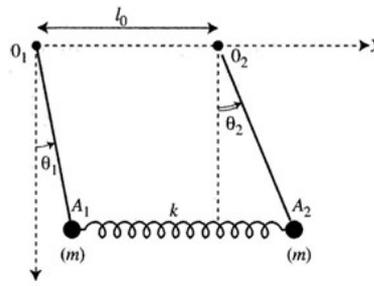


FIGURE 5.7 – Deux pendules simple identique couplés par un ressort.

Les énergies cinétique et potentielle du système sont :

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_2^2 \quad \text{et} \quad U = -m g l \cos \theta_1 - m g l \cos \theta_2 + \frac{1}{2} k (l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1)^2$$

On en déduit le Lagrangien  $\mathcal{L}$  dans le cas de faibles amplitudes :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} m g l \theta_1^2 - \frac{1}{2} m g l \theta_2^2 - \frac{1}{2} k (l \theta_2 - l \theta_1)^2$$

En utilisant le formalisme d'Euler-Lagrange pour les systèmes oscillatoires libres :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = 0 \quad \text{avec} \quad i = 1, 2$$

On obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned} m l^2 \ddot{\theta}_1 + m g l \theta_1 - k l (l \theta_2 - l \theta_1) &= 0 \\ m l^2 \ddot{\theta}_2 + m g l \theta_2 + k l (l \theta_2 - l \theta_1) &= 0 \end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \left( \frac{m g l + k l^2}{m l^2} \right) \theta_1 - \frac{k l^2}{m l^2} \theta_2 &= 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \left( \frac{m g l + k l^2}{m l^2} \right) \theta_2 - \frac{k l^2}{m l^2} \theta_1 &= 0 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \left( \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right) \theta_1 - \frac{k}{m} \theta_2 &= 0 \quad (1) \\ \ddot{\theta}_2 + \left( \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right) \theta_2 - \frac{k}{m} \theta_1 &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

### 5.2.1 Pulsations propres

Dans un mode propre d'oscillation, les deux sous-systèmes oscillent à la même pulsation  $\omega_p$  (pulsation propre), mais avec des amplitudes, généralement, différentes, et des phases différents (mouvement sinusoïdal simple). On se propose donc des solutions sinusoïdales :

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= A_1 \cos(\omega_p t + \varphi_1) \\ \theta_2(t) &= A_2 \cos(\omega_p t + \varphi_2) \end{aligned}$$

ou encore en notation complexe :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1(t) &= \tilde{A}_1 e^{i \omega_p t} \quad \text{avec} \quad \tilde{A}_1 = A_1 e^{i \varphi_1} \\ \tilde{\theta}_2(t) &= \tilde{A}_2 e^{i \omega_p t} \quad \text{avec} \quad \tilde{A}_2 = A_2 e^{i \varphi_2} \end{aligned}$$

En substituant dans les équations (1) et (2) du système d'équations différentielles et en réarrangeant les amplitudes  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{A}_2$ , on trouve :

$$\begin{aligned} (-\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}) \tilde{A}_1 - \frac{k}{m} \tilde{A}_2 &= 0 \quad (3) \\ -\frac{k}{m} \tilde{A}_1 + (-\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}) \tilde{A}_2 &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} -\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système admet une solution non-triviale (autre que  $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = 0$ ) si le déterminant des amplitude est nulle.

$$\begin{vmatrix} -\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \end{vmatrix} = 0$$

Ce qui donne :

$$\left(-\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) \left(-\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) - \left(-\frac{k}{m}\right) \left(-\frac{k}{m}\right) = 0$$

ou encore :

$$\left(-\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

Équation quadratique en  $\omega_p$  qui admet deux solutions positives  $\omega_{p1}$  et  $\omega_{p2}$  appelées les pulsations propres du système :

$$-\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} = \pm \frac{k}{m}$$

soit :

$$\omega_{p1}^2 = \frac{g}{l} \quad \text{et} \quad \omega_{p2}^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$$

**Conclusion** Un système à deux degrés de liberté possède deux pulsations propres  $\omega_{p1}$  et  $\omega_{p2}$  et donc chaque coordonnée possède deux composantes harmonique; une première pour  $\omega_{p1}$  et une deuxième pour  $\omega_{p2}$ .

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= A_{11} \cos(\omega_{p1} t + \varphi_1^{(1)}) + A_{12} \cos(\omega_{p2} t + \varphi_1^{(2)}) \\ \theta_2(t) &= A_{21} \cos(\omega_{p1} t + \varphi_2^{(1)}) + A_{22} \cos(\omega_{p2} t + \varphi_2^{(2)}) \end{aligned}$$

où les  $A_{ij}$  et les  $\varphi_i^{(j)}$  sont des constantes et  $i$  représente la coordonnée (ou la solution) et  $j$  représente le mode.

### 5.2.2 Modes propres (normaux)

**Premier mode propre,  $\omega_p = \omega_{p1}$**

En remplaçant  $\omega_p$  par  $\omega_{p1}$  et  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{A}_2$  par  $\tilde{A}_{11}$  et  $\tilde{A}_{21}$  respectivement dans l'équation (3) (même chose avec l'équation (4)), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{g}{l} + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) \tilde{A}_{11} - \frac{k}{m} \tilde{A}_{21} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{k}{m} \tilde{A}_{11} - \frac{k}{m} \tilde{A}_{21} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{A}_{11}}{\tilde{A}_{21}} = \frac{A_{11} e^{i\varphi_1^{(1)}}}{A_{21} e^{i\varphi_2^{(1)}}} = 1 \end{aligned}$$

On définit le rapport  $\tilde{\mu}_1 = \frac{\tilde{A}_{11}}{\tilde{A}_{21}}$  et  $\mu_1 = \frac{A_{11}}{A_{21}}$  :

$$\Rightarrow \frac{\tilde{A}_{11}}{\tilde{A}_{21}} = \frac{A_{11} e^{i\varphi_1^{(1)}}}{A_{21} e^{i\varphi_2^{(1)}}} = 1 = 1 e^{i0} \Rightarrow \mu_1 = \frac{A_{11}}{A_{21}} = 1 \Rightarrow A_{11} = A_{21}$$

$$\varphi_2^{(1)} - \varphi_1^{(1)} = 0 \Rightarrow \varphi_2^{(1)} = \varphi_1^{(1)}$$

Dans ce mode de vibration les deux pendules oscillent (mouvement sinusoïdal simple) à la même pulsation  $\omega_{p1} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , avec la même amplitude et en phase.

$$\begin{aligned}\theta_1^{(1)}(t) &= A_{11} \cos(\omega_{p1} t + \varphi_1^{(1)}) \\ \theta_2^{(1)}(t) &= A_{11} \cos(\omega_{p1} t + \varphi_1^{(1)})\end{aligned}$$

**Deuxième mode propre,  $\omega_p = \omega_{p2}$**

En remplaçant  $\omega_p$  par  $\omega_{p2}$  et  $\tilde{A}_1$  et  $\tilde{A}_2$  par  $\tilde{A}_{12}$  et  $\tilde{A}_{22}$  respectivement dans l'équation (3) (même chose avec l'équation (4)), on obtient :

$$\begin{aligned}\left(-\frac{g}{l} - 2\frac{k}{m} + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) \tilde{A}_{12} - \frac{k}{m} \tilde{A}_{22} &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{k}{m} \tilde{A}_{12} - \frac{k}{m} \tilde{A}_{22} = 0 &\Rightarrow \frac{\tilde{A}_{12}}{\tilde{A}_{22}} = \frac{A_{12} e^{i\varphi_1^{(2)}}}{A_{22} e^{i\varphi_2^{(2)}}} = -1\end{aligned}$$

On définit le rapport  $\tilde{\mu}_2 = \frac{\tilde{A}_{12}}{\tilde{A}_{22}}$  et  $\mu_2 = \frac{A_{12}}{A_{22}}$  :

$$\Rightarrow \frac{\tilde{A}_{12}}{\tilde{A}_{22}} = \frac{A_{12} e^{i\varphi_1^{(2)}}}{A_{22} e^{i\varphi_2^{(2)}}} = -1 = 1 e^{i\pi} \Rightarrow \mu_2 = \frac{A_{12}}{A_{22}} = 1 \Rightarrow A_{12} = A_{22}$$

$$\varphi_1^{(2)} - \varphi_2^{(2)} = \pi \Rightarrow \varphi_2^{(2)} = \varphi_1^{(2)} - \pi$$

Dans ce mode de vibration les deux pendules oscillent (mouvement sinusoïdal simple) à la même pulsation  $\omega_{p2} = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}$ , avec la même amplitude et en opposition de phase.

$$\begin{aligned}\theta_1^{(2)}(t) &= A_{12} \cos(\omega_{p2} t + \varphi_1^{(2)}) \\ \theta_2^{(2)}(t) &= A_{12} \cos(\omega_{p2} t + \varphi_1^{(2)} - \pi)\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\theta_1^{(2)}(t) &= A_{12} \cos(\omega_{p2} t + \varphi_1^{(2)}) \\ \theta_2^{(2)}(t) &= -A_{12} \cos(\omega_{p2} t + \varphi_1^{(2)})\end{aligned}$$

### 5.2.3 Solution générale

La solution générale est alors la somme des deux solutions de chaque modes :

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= A_{11} \cos(\omega_{p1} t + \varphi_1^{(1)}) + A_{12} \cos(\omega_{p2} t + \varphi_1^{(2)}) \\ \theta_2(t) &= A_{21} \cos(\omega_{p1} t + \varphi_2^{(1)}) + A_{22} \cos(\omega_{p2} t + \varphi_2^{(2)})\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= A_{11} \cos(\omega_{p1} t + \varphi_1^{(1)}) + A_{12} \cos(\omega_{p2} t + \varphi_1^{(2)}) \\ \theta_2(t) &= \frac{A_{11}}{\mu_1} \cos(\omega_{p1} t + \varphi_2^{(1)}) + \frac{A_{12}}{\mu_2} \cos(\omega_{p2} t + \varphi_2^{(2)})\end{aligned}$$

$$\text{où } \mu_1 = \frac{A_{11}}{A_{21}} \text{ et } \mu_2 = \frac{A_{12}}{A_{22}}.$$

Sachant que  $\mu_1 = 1$  et  $\mu_2 = 1$ ,  $\varphi_2^{(1)} = \varphi_1^{(1)}$  et  $\varphi_2^{(2)} = \varphi_1^{(2)} - \pi$ , la solution générale s'écrit :

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= A_{11} \cos(\omega_{p1} t + \varphi_1^{(1)}) + A_{12} \cos(\omega_{p2} t + \varphi_1^{(2)}) \\ \theta_2(t) &= A_{11} \cos(\omega_{p1} t + \varphi_1^{(1)}) - A_{12} \cos(\omega_{p2} t + \varphi_1^{(2)}) \end{aligned}$$

**Deuxième méthode** Une méthode simple pour trouver les pulsations propres et les modes propres du système qui consiste à définir de nouvelles coordonnées en fonction des coordonnées généralisées du système étudié.

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) \theta_1 - \frac{k}{m} \theta_2 &= 0 \quad (1) \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) \theta_2 - \frac{k}{m} \theta_1 &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Faisons les combinaisons linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \frac{k}{m}\right) (\theta_1 + \theta_2) = 0 \quad (1') \\ (1) - (2) &\Rightarrow \left(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2\right) + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} + \frac{k}{m}\right) (\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (2') \end{aligned}$$

Ce qui donne après le changement de variables :

$$\Theta_1 = \theta_1 + \theta_2 \quad \text{et} \quad \Theta_2 = \theta_1 - \theta_2$$

$$\begin{aligned} (1') &\Rightarrow \ddot{\Theta}_1 + \frac{g}{l} \Theta_1 = 0 \quad (1'') \\ (2') &\Rightarrow \ddot{\Theta}_2 + \left(\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\right) \Theta_2 = 0 \quad (2'') \end{aligned}$$

Ce sont là deux équations différentielles découplées, qu'on peut résoudre séparément. On fait ainsi apparaître les pulsations propres :

$$\begin{aligned} (1'') &\Rightarrow \Theta_1(t) = B_1 \cos(\omega_{p1} t + \varphi_1) \quad \text{avec} \quad \omega_{p1}^2 = \frac{g}{l} \\ (2'') &\Rightarrow \Theta_2(t) = B_2 \cos(\omega_{p2} t + \varphi_2) \quad \text{avec} \quad \omega_{p2}^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \end{aligned}$$

$\Theta_1$  et  $\Theta_2$  sont appelées coordonnées normales; puisqu'elles permettent de découpler le système d'équations différentielles. Physiquement, elles représentent deux mouvements indépendants.

Retrouvant  $\theta_1$  et  $\theta_2$  par :

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2} = \frac{B_1}{2} \cos(\omega_{p1} t + \varphi_1) + \frac{B_2}{2} \cos(\omega_{p2} t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) &= \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{2} = \frac{B_1}{2} \cos(\omega_{p1} t + \varphi_1) - \frac{B_2}{2} \cos(\omega_{p2} t + \varphi_2) \end{aligned}$$

### 5.2.4 Situations particulières

Soient  $\theta_{10}$ ,  $\theta_{20}$ ,  $\dot{\theta}_{10}$  et  $\dot{\theta}_{20}$  les valeurs initiales respectives de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$  :

$$A_{11} \cos \varphi_1^{(1)} + A_{12} \cos \varphi_1^{(2)} = \theta_{10} \quad (5)$$

$$A_{11} \cos \varphi_1^{(1)} - A_{12} \cos \varphi_1^{(2)} = \theta_{20} \quad (6)$$

et

$$-\omega_{p1} A_{11} \sin \varphi_1^{(1)} - \omega_{p2} A_{12} \sin \varphi_1^{(2)} = \dot{\theta}_{10} \quad (7)$$

$$-\omega_{p1} A_{11} \sin \varphi_1^{(1)} + \omega_{p2} A_{12} \sin \varphi_1^{(2)} = \dot{\theta}_{20} \quad (8)$$

Ce qui donne :

$$(5) + (6) \Rightarrow A_{11} = \frac{\theta_{10} + \theta_{20}}{2 \cos \varphi_1^{(1)}} \quad (5) - (6) \Rightarrow \text{et} \quad A_{12} = \frac{\theta_{10} - \theta_{20}}{2 \cos \varphi_1^{(2)}}$$

ou encore

$$(7) + (8) \Rightarrow A_{11} = \frac{-(\dot{\theta}_{10} + \dot{\theta}_{20})}{2 \omega_{p1} \sin \varphi_1^{(1)}} \quad \text{et} \quad (7) - (8) \Rightarrow A_{12} = \frac{\dot{\theta}_{20} - \dot{\theta}_{10}}{2 \omega_{p2} \sin \varphi_1^{(2)}}$$

— 1<sup>er</sup> cas particulier :  $\theta_{10} = \theta_{20} = \theta_0$  et  $\dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{20} = 0$  :

$$\Rightarrow \varphi_1^{(1)} = \varphi_1^{(2)} = 0 \quad A_{12} = 0 \quad A_{11} = \theta_0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \theta_1(t) &= \theta_0 \cos \omega_{p1} t \\ \theta_2(t) &= \theta_0 \cos \omega_{p1} t \end{aligned}$$

Oscillations en phase et à la même pulsation  $\omega_{p1}$  ; Premier mode. On dit que le système oscille dans le mode fondamental.

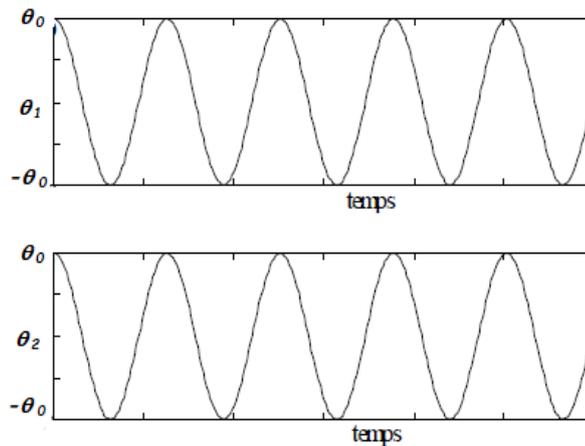


FIGURE 5.8 – Oscillations en phase.

— 2<sup>ème</sup> cas particulier :  $\theta_{10} = -\theta_{20} = \theta_0$  et  $\dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{20} = 0$  :

$$\Rightarrow \varphi_1^{(1)} = \varphi_1^{(2)} = 0 \quad A_{11} = 0 \quad A_{12} = \theta_0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \theta_1(t) &= \theta_0 \cos \omega_{p2} t \\ \theta_2(t) &= -\theta_0 \cos \omega_{p2} t \end{aligned}$$

Oscillations en opposition de phase et à la même pulsation  $\omega_{p2}$ ; Deuxième mode.

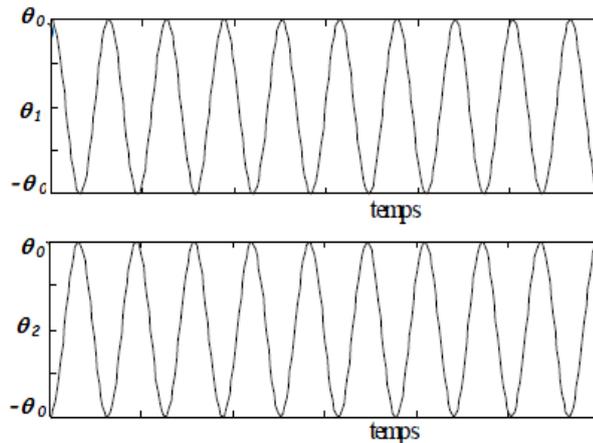


FIGURE 5.9 – Oscillations en opposition de phase.

— 3<sup>ème</sup> cas particulier :  $\theta_{10} = \theta_0, \theta_{20} = 0$  et  $\dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{20} = 0$  :

$$\Rightarrow \varphi_1^{(1)} = \varphi_1^{(2)} = 0 \quad A_{11} = A_{12} = \frac{\theta_0}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{\theta_0}{2} \cos \omega_{p1} t + \frac{\theta_0}{2} \cos \omega_{p1} t \\ \theta_2(t) &= \frac{\theta_0}{2} \cos \omega_{p1} t - \frac{\theta_0}{2} \cos \omega_{p1} t \end{aligned}$$

Rappelons les formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned} \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\Rightarrow \begin{aligned} \theta_1(t) &= \theta_0 \cos \left( \frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2} t \right) \cos \left( \frac{\omega_{p1} + \omega_{p2}}{2} t \right) \\ \theta_2(t) &= \theta_0 \sin \left( \frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2} t \right) \sin \left( \frac{\omega_{p1} + \omega_{p2}}{2} t \right) \end{aligned}$$

Ce sont là des mouvements sinusoidaux à une pulsation  $\omega_{moy} = \left( \frac{\omega_{p1} + \omega_{p2}}{2} \right)$  avec des amplitudes modulées qui varient sinusoidalement à une pulsation  $\omega_{mod} = \left( \frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2} \right)$ .  $[\theta_0 \cos \left( \frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2} t \right)]$  et  $[\theta_0 \sin \left( \frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2} t \right)]$  sont les amplitudes modulées. Le mouvement réel des masses  $m_1$  et  $m_2$  s'effectue à la pulsation  $\omega_{moy}$  et le temps

d'un battement est égale à  $T_B = \frac{T_{mod}}{2} = \frac{\frac{2\pi}{\omega_{mod}}}{2} = \frac{\pi}{\omega_{mod}}$

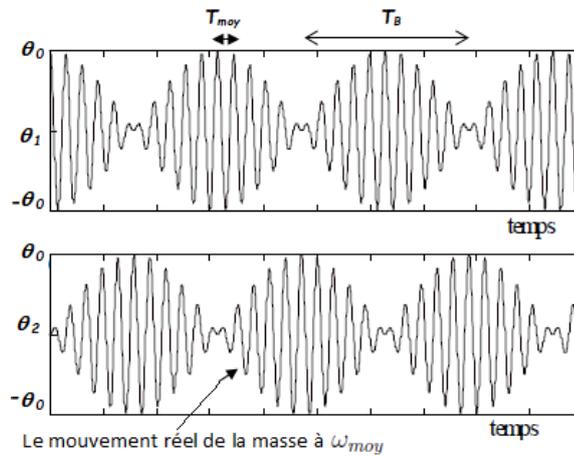


FIGURE 5.10 – Oscillations en battement.

**Remarque** On observe un phénomène de battement, si  $\omega_{p1}$  est peu différent de  $\omega_{p2}$ .

### 5.3 Système forcé à deux degrés de liberté

Soit le système à deux degrés de liberté suivant :

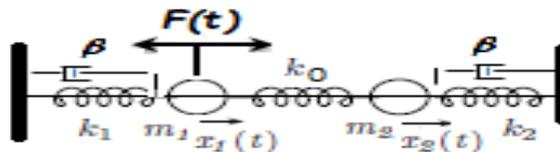


FIGURE 5.11 – Système à deux degrés de liberté forcé.

Les énergies cinétique et potentielle s'écrivent :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad \text{et} \quad U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k_0 (x_2 - x_1)^2 + Cst$$

On en déduit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k_0 (x_2 - x_1)^2$$

Ce qui donne en régime libre  $F(t) = 0$  et  $\beta = 0$  le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_0) x_1 - k_0 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_0) x_2 - k_0 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Les pulsations propres de ce système pour le cas particulier  $k_1 = k_2 = k$  et  $m_1 = m_2 = m$  s'écrivent :

$$\omega_{p1} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_{p2} = \sqrt{\frac{k + 2k_0}{m}}$$

Le formalisme de Lagrange s'écrit dans le cas des oscillations amorties forcées :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_i} = F_{xi} \quad \text{avec} \quad i = 1, 2$$

Ce qui conduit à :

$$m \ddot{x}_1 + (k + k_0) x_1 + \beta \dot{x}_1 - k_0 x_2 = F(t) \quad (9)$$

$$m \ddot{x}_2 + \beta \dot{x}_2 + (k + k_0) x_2 - k_0 x_1 = 0 \quad (10)$$

avec  $F(t)$  : force sinusoïdale de pulsation  $\Omega$

### 5.3.1 Résolution du système d'équations

La solution générale du système d'équations différentielles est égale à la somme de la solution du système homogène et d'une solution particulière  $x_i(t) = x_{h,i}(t) + x_{p,i}(t)$ , ( $i = 1, 2$ ). La solution homogène tend vers zéro lorsque le régime permanent s'établit et la solution générale devient égale à la solution permanente et s'écrit alors :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \cos(\Omega t + \phi_1) \\ x_2(t) &= X_2 \cos(\Omega t + \phi_2) \end{aligned}$$

ou encore en notation complexe :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= \tilde{X}_1 e^{i\Omega t} \quad \text{avec} \quad \tilde{X}_1 = X_1 e^{i\phi_1} \\ \tilde{x}_2(t) &= \tilde{X}_2 e^{i\Omega t} \quad \text{avec} \quad \tilde{X}_2 = X_2 e^{i\phi_2} \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{F}(t) = F_0 e^{i\Omega t}$$

En substituant dans les équations (9) et (10) du système d'équations différentielles et en réarrangeant les amplitudes  $\tilde{X}_1$  et  $\tilde{X}_2$ , on trouve :

$$(k + k_0 - m\Omega^2 + i\beta\Omega) \tilde{X}_1 - k_0 \tilde{X}_2 = F_0 \quad (11)$$

$$-k_0 \tilde{X}_1 + (k + k_0 - m\Omega^2 + i\beta\Omega) \tilde{X}_2 = 0 \quad (12)$$

En utilisant la méthode (ou règle) de Cramer, les solutions de ce système sont :

$$\tilde{X}_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k_0 \\ 0 & (k + k_0 - m\Omega^2 + i\beta\Omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (k + k_0 - m\Omega^2 + i\beta\Omega) & -k_0 \\ -k_0 & (k + k_0 - m\Omega^2 + i\beta\Omega) \end{vmatrix}} = \frac{F_0 (k + k_0 - m\Omega^2 + i\beta\Omega)}{(k + k_0 - m\Omega^2 + i\beta\Omega)^2 - k_0^2}$$

$$\tilde{X}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (k + k_0 - m \Omega^2 + i \beta \Omega) & F_0 \\ -k_0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (k + k_0 - m \Omega^2 + i \beta \Omega) & -k_0 \\ -k_0 & (k + k_0 - m \Omega^2 + i \beta \Omega) \end{vmatrix}} = \frac{k_0 F_0}{(k + k_0 - m \Omega^2 + i \beta \Omega)^2 - k_0^2}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= \frac{F_0 (k + k_0 - m \Omega^2 + i \beta \Omega)}{(k + k_0 - m \Omega^2 + i \beta \Omega - k_0) (k + k_0 - m \Omega^2 + i \beta \Omega + k_0)} \\ &= \frac{m F_0 \left( \frac{k+k_0}{m} - \Omega^2 + i 2 \lambda \Omega \right)}{m^2 \left( \frac{k}{m} - \Omega^2 + i 2 \lambda \Omega \right) \left( \frac{k+2k_0}{m} - \Omega^2 + i 2 \lambda \Omega \right)} \end{aligned}$$

Sachant  $\omega_{p1}^2 = \frac{k}{m}$  et  $\omega_{p2}^2 = \frac{k+2k_0}{m}$  et en posant  $\Omega_A^2 = \frac{k+k_0}{m}$ , les amplitudes complexes s'écrivent :

$$\tilde{X}_1 = \frac{F_0}{m} \frac{(\Omega_A^2 - \Omega^2 + i 2 \lambda \Omega)}{(\omega_{p1}^2 - \Omega^2 + i 2 \lambda \Omega) (\omega_{p2}^2 - \Omega^2 + i 2 \lambda \Omega)}$$

et

$$\tilde{X}_2 = \frac{k_0 F_0}{m^2} \frac{1}{(\omega_{p1}^2 - \Omega^2 + i 2 \lambda \Omega) (\omega_{p2}^2 - \Omega^2 + i 2 \lambda \Omega)}$$

Ce qui donne :

$$X_1 = \frac{F_0}{m} \frac{\sqrt{(\Omega_A^2 - \Omega^2)^2 + (2 \lambda \Omega)^2}}{\sqrt{(\omega_{p1}^2 - \Omega^2)^2 + (2 \lambda \Omega)^2} \sqrt{(\omega_{p2}^2 - \Omega^2)^2 + (2 \lambda \Omega)^2}}$$

et

$$X_2 = \frac{k_0 F_0}{m^2} \frac{1}{\sqrt{(\omega_{p1}^2 - \Omega^2)^2 + (2 \lambda \Omega)^2} \sqrt{(\omega_{p2}^2 - \Omega^2)^2 + (2 \lambda \Omega)^2}}$$

### 5.3.2 Représentation graphique

Application numériques :  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $k = 1. \text{s}^{-2}$ ,  $k_0 = 1.2. \text{s}^{-2}$ ,  $\beta = 0.4 \text{ kg.s}^{-1} \Rightarrow \lambda = 0.1 \text{ s}^{-1}$ , ce qui donne ;  $\Rightarrow \omega_{p1}^2 = 0.5 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_{p2}^2 = 1.7 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\Omega_A^2 = 1.1 \text{ rad.s}^{-1}$ .

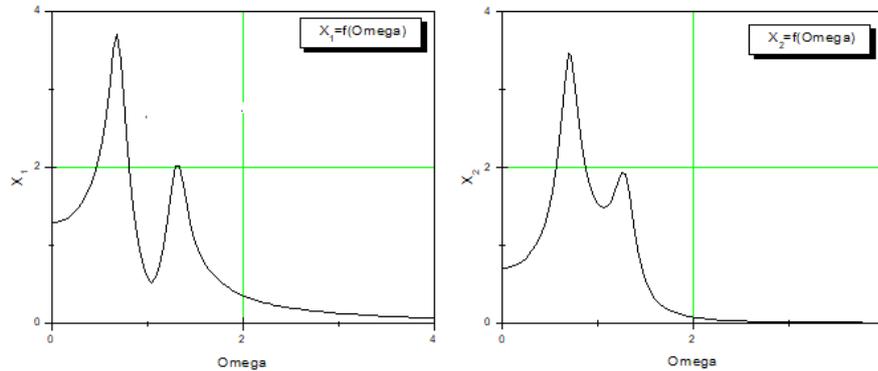


FIGURE 5.12 – Réponse d'un système à deux degrés de liberté amorti forcé.

### 5.3.3 Cas d'un système non amorti

Considérons le cas d'un système non-amorti  $\beta = 0$ . Les amplitudes des réponses des deux masses deviennent :

$$X_1 = \frac{F_0}{m} \frac{(\Omega_A^2 - \Omega^2)}{(\omega_{p1}^2 - \Omega^2)(\omega_{p2}^2 - \Omega^2)}$$

et

$$X_2 = \frac{k_0 F_0}{m^2} \frac{1}{(\omega_{p1}^2 - \Omega^2)(\omega_{p2}^2 - \Omega^2)}$$

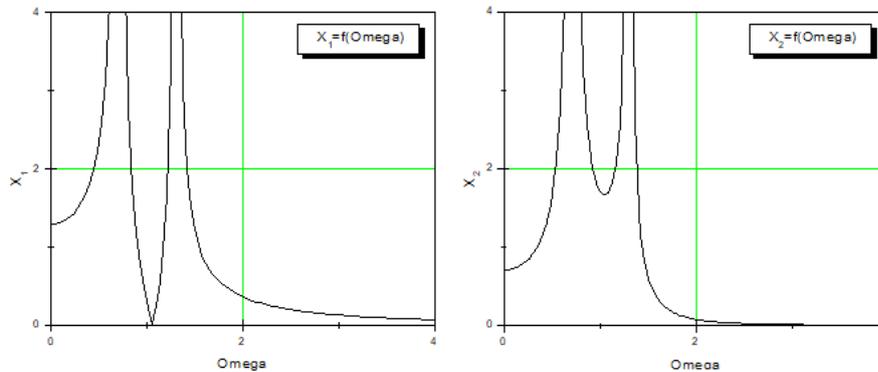


FIGURE 5.13 – Réponse d'un système à deux degrés de liberté forcé non-amorti.

- Pour  $\Omega = \omega_{p1}$  ou  $\Omega = \omega_p$  le phénomène de résonance se produit pour les deux déplacements  $x_1$  et  $x_2$  avec un amortissement qui tend vers 0 ( $\beta \approx 0$ ).
- Pour  $\Omega = \Omega_A$ ,  $x_1 = 0$ . Pour cette raison  $\Omega_A$  est appelée pulsation antirésonance.

**Remarque :** La masse  $m_1$  s'immobilise pour  $\Omega_A$  même en absence de l'amortissement. On dit que le sous système  $m_2$ ,  $k_2$  étouffe le mouvement de la masse  $m_1$ .

## 5.4 Équivalence électromécanique

### 5.4.1 Équivalence Force-tension

$$m \equiv L \quad k \equiv \frac{1}{C} \quad x \equiv q \quad \dot{x} \equiv i \quad \beta \equiv R \quad F \equiv U$$

Système libre

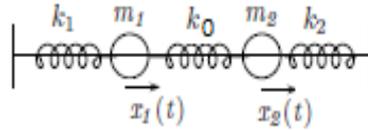


FIGURE 5.14 – Système à deux degrés de liberté couplé.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_0) x_1 - k_0 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_0) x_2 - k_0 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

le système électrique analogue est un système électrique composé de deux mailles (circuits)  $(L_1, C_1)$  et  $(L_2, C_2)$  regroupés par un condensateur

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right) q_1 - \frac{1}{C_0} q_2 &= 0 \\ L_2 \ddot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_0}\right) q_2 - \frac{1}{C_0} q_1 &= 0 \end{aligned}$$

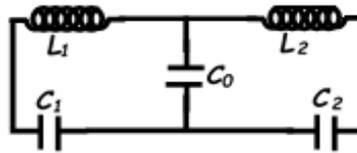


FIGURE 5.15 – Système analogue à deux masses et trois ressorts.

Système forcé

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_0) x_1 - k_0 x_2 + \beta_1 \dot{x}_1 + \beta_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= F_0 \cos \Omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_0) x_2 - k_0 x_1 + \beta_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0 \end{aligned}$$

le système électrique analogue est un système électrique composé de deux mailles

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right) q_1 - \frac{1}{C_0} q_2 + R_1 \dot{q}_1 + R_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) &= U_0 \cos \Omega t \\ L_2 \ddot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_0}\right) q_2 - \frac{1}{C_0} q_1 + R_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) &= 0 \end{aligned}$$

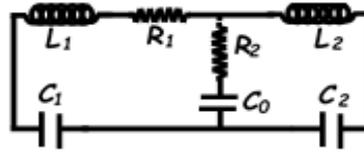


FIGURE 5.16 – Système à deux degrés de liberté couplé.

### 5.4.2 Équivalence Force-courant

$$m \equiv C \quad k \equiv \frac{1}{L} \quad x \equiv \Phi = \int U dt \text{ (flux à travers une bobine)} \quad \dot{x} \equiv U \quad \beta \equiv \frac{1}{R} \quad F \equiv I$$

**Système libre**

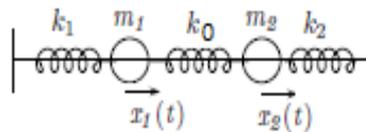


FIGURE 5.17 – Système à deux degrés de liberté couplé.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_0) x_1 - k_0 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_0) x_2 - k_0 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

le système électrique analogue est un système électrique composé de ???

**Système forcé**

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_0) x_1 - k_0 x_2 + \beta_1 \dot{x}_1 + \beta_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= F_0 \cos \Omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_0) x_2 - k_0 x_1 + \beta_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0 \end{aligned}$$

le système électrique analogue est un système électrique composé de ??????

# Bibliographie

- [1] France Chappaz, Jean-Paul Coste, Raymond Constantiel, Université en ligne (version du 01/06/2021).
- [2] Mebrouki Mohamed, Cours vibration et onde.
- [3] H. Djelouah, Vibrations et Ondes Mécaniques, Cours Exercices.
- [4] Ali Kamel Zine, Formalisme de Lagrange et oscillations linéaires.