Interpolation polynômiales

Mohammed Belmekki

Département de la Formation Préparatoire
ESSA- Tlemcen- Algeria

COVID19/2021-2022

Table of contents

Exercice No. 02

Exercice No. 03

Exercice No. 04

Exercice No. 02

On veut calculer $\sqrt{7}$ en utilisant une interpolation.

1. Ecrire le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points d'appui d'abscisses :

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 9.$$

2. Ecrire le polynôme d'interpolation de Newton aux points d'appui d'abscisses :

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 9.$$

3. Calculer la valeur approchée de $\sqrt{7}$.
4. Soit $x_3 = 16$. Estimer $\sqrt{7}$ par interpolation (Justifier le choix de la méthode) aux points d'appui d'abscisses :

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 9, \quad x_3 = 16.$$

Le polynôme de Lagrange :

Le polynôme de Lagrange :
Les points d'appui sont :

$$(x_0, f(x_0)) = (1, 1), \quad (x_1, f(x_1)) = (4, 2), \quad (x_2, f(x_2)) = (9, 3).$$

Le polynôme de Lagrange :
Les points d'appui sont :

$$(x_0, f(x_0)) = (1, 1), \quad (x_1, f(x_1)) = (4, 2), \quad (x_2, f(x_2)) = (9, 3).$$

Les polynômes de base de Lagrange sont donnés par :

Le polynôme de Lagrange :
Les points d'appui sont :

$$(x_0, f(x_0)) = (1, 1), \quad (x_1, f(x_1)) = (4, 2), \quad (x_2, f(x_2)) = (9, 3).$$

Les polynômes de base de Lagrange sont donnés par :

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

Le polynôme de Lagrange :
Les points d'appui sont :

$$(x_0, f(x_0)) = (1, 1), \quad (x_1, f(x_1)) = (4, 2), \quad (x_2, f(x_2)) = (9, 3).$$

Les polynômes de base de Lagrange sont donnés par :

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 4)(x - 9)}{(1 - 4)(1 - 9)} = \frac{1}{24}(x - 4)(x - 9)$$

Le polynôme de Lagrange :
Les points d'appui sont :

$$(x_0, f(x_0)) = (1, 1), \quad (x_1, f(x_1)) = (4, 2), \quad (x_2, f(x_2)) = (9, 3).$$

Les polynômes de base de Lagrange sont donnés par :

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 4)(x - 9)}{(1 - 4)(1 - 9)} = \frac{1}{24}(x - 4)(x - 9)$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 9)}{(4 - 1)(4 - 9)} = \frac{-1}{15}(x - 1)(x - 9)$$

Le polynôme de Lagrange :
Les points d'appui sont :

$$(x_0, f(x_0)) = (1, 1), \quad (x_1, f(x_1)) = (4, 2), \quad (x_2, f(x_2)) = (9, 3).$$

Les polynômes de base de Lagrange sont donnés par :

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 4)(x - 9)}{(1 - 4)(1 - 9)} = \frac{1}{24}(x - 4)(x - 9)$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 9)}{(4 - 1)(4 - 9)} = \frac{-1}{15}(x - 1)(x - 9)$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1)(x - 4)}{(9 - 1)(9 - 4)} = \frac{1}{40}(x - 1)(x - 4)$$

d'où le polynôme de Lagrange :

d'où le polynôme de Lagrange :

$$L_2(x) = \frac{1}{24}(x-4)(x-9)(1) - \frac{1}{15}(x-1)(x-9)(2) + \frac{1}{40}(x-1)(x-4)(3)$$

d'où le polynôme de Lagrange :

$$L_2(x) = \frac{1}{24}(x-4)(x-9)(1) - \frac{1}{15}(x-1)(x-9)(2) + \frac{1}{40}(x-1)(x-4)(3)$$

qu'on peut écrire :

$$L_2(x) = \frac{1}{24}(x-4)(x-9) - \frac{2}{15}(x-1)(x-9) + \frac{3}{40}(x-1)(x-4).$$

Le polynôme de Newton :

Le polynôme de Newton :
On a le tableau des différences divisées suivants :

Le polynôme de Newton :

On a le tableau des différences divisées suivants :

x	f(x)	DDf(x)	$DD^2f(x)$
1	1		
4	2	1/3	
9	3	1/5	-1/60

Le polynôme de Newton :
On a le tableau des différences divisées suivants :

x	f(x)	DDf(x)	$DD^2 f(x)$
1	1		
4	2	$1/3$	
9	3	$1/5$	$-1/60$

d'où le polynôme de Newton :

Le polynôme de Newton :
On a le tableau des différences divisées suivants :

x	f(x)	DDf(x)	$DD^2f(x)$
1	1		
4	2	1/3	
9	3	1/5	-1/60

d'où le polynôme de Newton :

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

La valeur approchée de $\sqrt{7}$.

La valeur approchée de $\sqrt{7}$.

Le polynôme d'interpolation est unique, donc les deux formules conduisent à la même valeur au point d'abscisse $x = 7$.

La valeur approchée de $\sqrt{7}$.

Le polynôme d'interpolation est unique, donc les deux formules conduisent à la même valeur au point d'abscisse $x = 7$.
par la formule de Newton on obtient :

$$\sqrt{7} \simeq 1 + \frac{1}{3}(6) - \frac{1}{60}(6)(3) = 2.7$$

La valeur approchée de $\sqrt{7}$.

Le polynôme d'interpolation est unique, donc les deux formules conduisent à la même valeur au point d'abscisse $x = 7$.
par la formule de Newton on obtient :

$$\sqrt{7} \simeq 1 + \frac{1}{3}(6) - \frac{1}{60}(6)(3) = 2.7$$

de même, par la formule de Lagrange, on obtient :

La valeur approchée de $\sqrt{7}$.

Le polynôme d'interpolation est unique, donc les deux formules conduisent à la même valeur au point d'abscisse $x = 7$.
par la formule de Newton on obtient :

$$\sqrt{7} \simeq 1 + \frac{1}{3}(6) - \frac{1}{60}(6)(3) = 2.7$$

de même, par la formule de Lagrange, on obtient :

$$\sqrt{7} \simeq \frac{1}{24}(3)(-2) - \frac{2}{15}(6)(-2) + \frac{3}{40}(6)(3) = 2.7$$

On ajoute le point d'appui d'abscisse $x_3 = 16$.

On ajoute le point d'appui d'abscisse $x_3 = 16$.
Si on utilise la méthode de Lagrange, on doit refaire les calculs depuis le début, ce qui n'est pas le cas si on utilise la méthode de Newton.

On ajoute le point d'appui d'abscisse $x_3 = 16$.
Si on utilise la méthode de Lagrange, on doit refaire les calculs depuis le début, ce qui n'est pas le cas si on utilise la méthode de Newton.
On utilise alors la méthode de Newton.

On ajoute le point d'appui d'abscisse $x_3 = 16$.
Si on utilise la méthode de Lagrange, on doit refaire les calculs depuis le début, ce qui n'est pas le cas si on utilise la méthode de Newton.
On utilise alors la méthode de Newton.
On a le tableau des différences divisées suivant :

On ajoute le point d'appui d'abscisse $x_3 = 16$.
Si on utilise la méthode de Lagrange, on doit refaire les calculs depuis le début, ce qui n'est pas le cas si on utilise la méthode de Newton.
On utilise alors la méthode de Newton.
On a le tableau des différences divisées suivant :

x	f(x)	DDf(x)	$DD^2f(x)$	$DD^3f(x)$
1	1			
4	2	1/3		
9	3	1/5	-1/60	
16	4	1/7	-2/385	53/41580

On ajoute le point d'appui d'abscisse $x_3 = 16$.
Si on utilise la méthode de Lagrange, on doit refaire les calculs depuis le début, ce qui n'est pas le cas si on utilise la méthode de Newton.
On utilise alors la méthode de Newton.
On a le tableau des différences divisées suivant :

x	f(x)	DDf(x)	$DD^2f(x)$	$DD^3f(x)$
1	1			
4	2	1/3		
9	3	1/5	-1/60	
16	4	1/7	-2/385	53/41580

d'où

$$N_3(x) = 1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{60}(x-1)(x-4)+\frac{53}{41580}(x-1)(x-4)(x-9).$$

par suite :

$$\sqrt{7} \simeq 2.7 + \frac{53}{41580}(7-1)(7-4)(7-9) = 2.654113$$

par suite :

$$\sqrt{7} \simeq 2.7 + \frac{53}{41580}(7-1)(7-4)(7-9) = 2.654113$$

NB. La valeur théorique est :

$$\sqrt{7} = 2.645751$$

Fin

Exercice No. 03

On considère la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.

1. Dresser le tableau des valeurs en utilisant les points d'appui usuels.
2. En utilisant une interpolation adéquate, estimer la valeur approchée de $\sin(\pi/12)$.
3. L'estimation de $\sin(7\pi/12)$ sera-t-elle bonne ou mauvaise ?

Les points d'appui usuels :

Les points d'appui usuels :

$$0 \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2}$$

Les points d'appui usuels :

$$0 \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2}$$

On a le tableau des valeurs :

Les points d'appui usuels :

$$0 \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2}$$

On a le tableau des valeurs :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	0.5	0.7071	0.8660	1

Quelle méthode va-t-on utiliser ?

Quelle méthode va-t-on utiliser ?
La méthode de Newton.

Quelle méthode va-t-on utiliser ?
La méthode de Newton.
On a le tableau des valeurs :

x	f(x)	DDf(x)	$DD^2 f(x)$	$DD^3 f(x)$	$DD^4 f(x)$
0	0				
0.523598	0.5	0.954931			
0.785398	0.707106	0.791085	-0.208615		
1.047197	0.866025	0.607027	-0.351525	-0.136468	
1.570796	1	0.255873	-0.447103	-0.091269	0.028774

Quelle méthode va-t-on utiliser ?
La méthode de Newton.
On a le tableau des valeurs :

x	f(x)	DDf(x)	$DD^2f(x)$	$DD^3f(x)$	$DD^4f(x)$
0	0				
0.523598	0.5	0.954931			
0.785398	0.707106	0.791085	-0.208615		
1.047197	0.866025	0.607027	-0.351525	-0.136468	
1.570796	1	0.255873	-0.447103	-0.091269	0.028774

Le polynôme de Newton :

Quelle méthode va-t-on utiliser ?
La méthode de Newton.
On a le tableau des valeurs :

x	f(x)	DDf(x)	$DD^2f(x)$	$DD^3f(x)$	$DD^4f(x)$
0	0				
0.523598	0.5	0.954931			
0.785398	0.707106	0.791085	-0.208615		
1.047197	0.866025	0.607027	-0.351525	-0.136468	
1.570796	1	0.255873	-0.447103	-0.091269	0.028774

Le polynôme de Newton :

$$N_4(x) = 0$$

Quelle méthode va-t-on utiliser ?
La méthode de Newton.
On a le tableau des valeurs :

x	f(x)	DDf(x)	$DD^2f(x)$	$DD^3f(x)$	$DD^4f(x)$
0	0				
0.523598	0.5	0.954931			
0.785398	0.707106	0.791085	-0.208615		
1.047197	0.866025	0.607027	-0.351525	-0.136468	
1.570796	1	0.255873	-0.447103	-0.091269	0.028774

Le polynôme de Newton :

$$N_4(x) \quad = \quad 0 + 0.954931(x - 0)$$

Quelle méthode va-t-on utiliser ?
La méthode de Newton.
On a le tableau des valeurs :

x	f(x)	DDf(x)	$DD^2f(x)$	$DD^3f(x)$	$DD^4f(x)$
0	0				
0.523598	0.5	0.954931			
0.785398	0.707106	0.791085	-0.208615		
1.047197	0.866025	0.607027	-0.351525	-0.136468	
1.570796	1	0.255873	-0.447103	-0.091269	0.028774

Le polynôme de Newton :

$$N_4(x) \quad = \quad 0 + 0.954931(x-0) - 0.208615(x-0)(x-0.523598)$$

Quelle méthode va-t-on utiliser ?
La méthode de Newton.
On a le tableau des valeurs :

x	f(x)	DDf(x)	$DD^2f(x)$	$DD^3f(x)$	$DD^4f(x)$
0	0				
0.523598	0.5	0.954931			
0.785398	0.707106	0.791085	-0.208615		
1.047197	0.866025	0.607027	-0.351525	-0.136468	
1.570796	1	0.255873	-0.447103	-0.091269	0.028774

Le polynôme de Newton :

$$\begin{aligned} N_4(x) &= 0 + 0.954931(x-0) - 0.208615(x-0)(x-0.523598) \\ &- 0.136468(x-0)(x-0.523598)(x-0.785398) \end{aligned}$$

Quelle méthode va-t-on utiliser ?
La méthode de Newton.
On a le tableau des valeurs :

x	f(x)	DDf(x)	$DD^2f(x)$	$DD^3f(x)$	$DD^4f(x)$
0	0				
0.523598	0.5	0.954931			
0.785398	0.707106	0.791085	-0.208615		
1.047197	0.866025	0.607027	-0.351525	-0.136468	
1.570796	1	0.255873	-0.447103	-0.091269	0.028774

Le polynôme de Newton :

$$\begin{aligned} N_4(x) &= 0 + 0.954931(x-0) - 0.208615(x-0)(x-0.523598) \\ &- 0.136468(x-0)(x-0.523598)(x-0.785398) \\ &+ 0.028774(x-0)(x-0.523598)(x-0.785398)(x-1.047197) \end{aligned}$$

$$\sin(\pi/12) \simeq N_4(\pi/12) = 0.258589$$

$$\sin(\pi/12) \simeq N_4(\pi/12) = 0.258589$$

La valeur théorique est :

$$\sin(\pi/12) = 0.258819$$

$\sin(7\pi/12)$?

$7\pi/12$ se trouve en dehors de l'intervalle des données.

$\sin(7\pi/12)$?

$7\pi/12$ se trouve en dehors de l'intervalle des données.
La valeur obtenue sera moins précise.

$\sin(7\pi/12)$?

$7\pi/12$ se trouve en dehors de l'intervalle des données.
La valeur obtenue sera moins précise.
Dans ce cas on parle d'**Extrapolation** au lieu d'**Interpolation**.

$$\sin(7\pi/12)?$$

$7\pi/12$ se trouve en dehors de l'intervalle des données.
La valeur obtenue sera moins précise.
Dans ce cas on parle d'**Extrapolation** au lieu d'**Interpolation**.

$$N_4(7\pi/12) = 0.963515$$

$$\sin(7\pi/12)?$$

$7\pi/12$ se trouve en dehors de l'intervalle des données.
La valeur obtenue sera moins précise.
Dans ce cas on parle d'**Extrapolation** au lieu d'**Interpolation**.

$$N_4(7\pi/12) = 0.963515$$

La valeur théorique est :

$$\sin(7\pi/12) = 0.965925$$

$\sin(7\pi/12)$?

$7\pi/12$ se trouve en dehors de l'intervalle des données.
La valeur obtenue sera moins précise.
Dans ce cas on parle d'**Extrapolation** au lieu d'**Interpolation**.

$$N_4(7\pi/12) = 0.963515$$

La valeur théorique est :

$$\sin(7\pi/12) = 0.965925$$

On reste proche de la valeur théorique du fait que la fonction sin est périodique.

$$\sin(7\pi/12)?$$

$7\pi/12$ se trouve en dehors de l'intervalle des données.
La valeur obtenue sera moins précise.
Dans ce cas on parle d'**Extrapolation** au lieu d'**Interpolation**.

$$N_4(7\pi/12) = 0.963515$$

La valeur théorique est :

$$\sin(7\pi/12) = 0.965925$$

On reste proche de la valeur théorique du fait que la fonction sin est périodique.
De manière générale, plus on s'éloigne du lot de données, plus les calculs deviennent imprécis.

Exercice No. 04

On considère une fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.

1. Etudier les fonctions

$$\psi(x) = (x-1)\,(x+1) \quad x \in [-1, 1].$$

et

$$\phi(x) = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad x \in [-1, 1].$$

2. Pour interpoler la fonction f, quel système de points doit-on choisir $\{-1, 1\}$ ou $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
3. Soit $f(x) = x^3$ pour $x \in [-1, 1]$. Calculer l'erreur commise si on choisit le système de points $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Exercice No. 04

2. Pour interpoler la fonction f, quel système de points doit-on choisir $\{-1, 1\}$ et $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

Exercice No. 04

2. Pour interpoler la fonction f, quel système de points doit-on choisir $\{-1, 1\}$ et $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
   On va choisir celui qui minimise l'erreur.

Exercice No. 04

2. Pour interpoler la fonction f, quel système de points doit-on choisir $\{-1, 1\}$ et $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
   On va choisir celui qui minimise l'erreur.
   l'erreur est donné par la formule :

$$e(x) = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

   où

$$M_{n+1} = \max_{[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

Exercice No. 04

2. Pour interpoler la fonction f, quel système de points doit-on choisir $\{-1, 1\}$ et $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
On va choisir celui qui minimise l'erreur.
l'erreur est donné par la formule :

$$e(x) = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

où

$$M_{n+1} = \max_{[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

M_{n+1} ne dépent pas du système de points d'appui.

Exercice No. 04

2. Pour interpoler la fonction f, quel système de points doit-on choisir $\{-1, 1\}$ et $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

   On va choisir celui qui minimise l'erreur.
   l'erreur est donné par la formule :

   $$e(x) = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

   où

   $$M_{n+1} = \max_{[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

   M_{n+1} ne dépent pas du système de points d'appui.
   donc, si on veut minimiser l'erreur, on doit minimiser la quantité $|\omega_{n+1}(x)|$.

Exercice No. 04

Dans notre cas :

$$e(x) = |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{M_2}{2} |(x - x_0)(x - x_1)|$$

$$M_2 = \max_{x \in [-1,1]} |f''(x)|$$

Exercice No. 04

Dans notre cas :

$$e(x) = |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{M_2}{2} \left|(x - x_0)(x - x_1)\right|$$

$$M_2 = \max_{x\in[-1,1]} |f''(x)|$$

On doit alors étudier les fonctions :

$$\psi(x) = (x-1)\,(x+1) \quad x \in [-1,1].$$

et

$$\phi(x) = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad x \in [-1,1].$$

Exercice No. 04

Dans notre cas :

$$e(x) = |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{M_2}{2} |(x - x_0)(x - x_1)|$$

$$M_2 = \max_{x \in [-1,1]} |f''(x)|$$

On doit alors étudier les fonctions :

$$\psi(x) = (x-1)(x+1) \quad x \in [-1, 1].$$

et

$$\phi(x) = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad x \in [-1, 1].$$

ce qui nous ramène alors à la question 1.

Exercice No. 04

3. Soit $f(x) = x^3$ pour $x \in [-1, 1]$. Calculer l'erreur commise si on choisit le système de points $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Exercice No. 04

3. Soit $f(x) = x^3$ pour $x \in [-1, 1]$. Calculer l'erreur commise si on choisit le système de points $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
Les dérivées de f sont données par :

$$f'(x) = 3x^2, \qquad f''(x) = 6x$$

Exercice No. 04

3. Soit $f(x) = x^3$ pour $x \in [-1, 1]$. Calculer l'erreur commise si on choisit le système de points $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
   Les dérivées de f sont données par :

$$f'(x) = 3x^2, \qquad f''(x) = 6x$$

   donc

$$M_2 = \max_{x \in [-1,1]} |f''(x)| = 6$$

Exercice No. 04

3. Soit $f(x) = x^3$ pour $x \in [-1, 1]$. Calculer l'erreur commise si on choisit le système de points $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

   Les dérivées de f sont données par :

$$f'(x) = 3x^2, \qquad f''(x) = 6x$$

   donc

$$M_2 = \max_{x\in[-1,1]} |f''(x)| = 6$$

   par suite

$$e(x) \leq \frac{6}{2}0.5 = 1.5$$

Exercice No. 04

3. Soit $f(x) = x^3$ pour $x \in [-1, 1]$. Calculer l'erreur commise si on choisit le système de points $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

   Les dérivées de f sont données par :

   $$f'(x) = 3x^2, \qquad f''(x) = 6x$$

   donc

   $$M_2 = \max_{x \in [-1,1]} |f''(x)| = 6$$

   par suite

   $$e(x) \leq \frac{6}{2} 0.5 = 1.5$$

   On voit que la majoration est forte.

Exercice No. 04

Puisque la fonction f est connue

Exercice No. 04

Puisque la fonction f est connue
on peut déterminer son polynôme d'interpolation pour le système de point d'appui $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Exercice No. 04

Puisque la fonction f est connue
on peut déterminer son polynôme d'interpolation pour le système de point d'appui $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
Le polynôme d'interpolation est de degré 1, donc il s'écrit sous forme :

Exercice No. 04

Puisque la fonction f est connue
on peut déterminer son polynôme d'interpolation pour le système de point d'appui $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
Le polynôme d'interpolation est de degré 1, donc il s'écrit sous forme :$P(x) = ax + b$.

Exercice No. 04

Puisque la fonction f est connue
on peut déterminer son polynôme d'interpolation pour le système de point d'appui $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
Le polynôme d'interpolation est de degré 1, donc il s'écrit sous forme :$P(x) = ax + b$.
et vérifiant :

$$a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b \quad = P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Exercice No. 04

Puisque la fonction f est connue
on peut déterminer son polynôme d'interpolation pour le système de point d'appui $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
Le polynôme d'interpolation est de degré 1, donc il s'écrit sous forme :$P(x) = ax + b$.
et vérifiant :

$$a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b \quad = P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \; = \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

Exercice No. 04

Puisque la fonction f est connue
on peut déterminer son polynôme d'interpolation pour le système de point d'appui $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
Le polynôme d'interpolation est de degré 1, donc il s'écrit sous forme :$P(x) = ax + b$.
et vérifiant :

$$\begin{aligned}
a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b &= P\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \\
a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b &= P\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice No. 04

Puisque la fonction f est connue
on peut déterminer son polynôme d'interpolation pour le système de point d'appui $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
Le polynôme d'interpolation est de degré 1, donc il s'écrit sous forme :$P(x) = ax + b$.
et vérifiant :

$$a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b = P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

$$a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

Exercice No. 04

Puisque la fonction f est connue
on peut déterminer son polynôme d'interpolation pour le système de point d'appui $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
Le polynôme d'interpolation est de degré 1, donc il s'écrit sous forme :$P(x) = ax + b$.
et vérifiant :

$$\begin{aligned} a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b &= P\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \\ a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b &= P\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

d'où

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 0$$

Exercice No. 04

Puisque la fonction f est connue
on peut déterminer son polynôme d'interpolation pour le système de point d'appui $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
Le polynôme d'interpolation est de degré 1, donc il s'écrit sous forme :$P(x) = ax + b$.
et vérifiant :

$$\begin{aligned} a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b &= P\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \\ a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b &= P\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

d'où

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 0$$

par suite, le polynôme d'interpolation est :

$$P(x) = \frac{1}{2}x$$

Exercice No. 04

Considérons la fonction :

$$h(x) = f(x) - P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$$

Exercice No. 04

Considérons la fonction :

$$h(x) = f(x) - P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$$

donc

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Exercice No. 04

Considérons la fonction :

$$h(x) = f(x) - P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$$

donc

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

d'où

$$\max_{x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]} |f(x) - P(x)| \leq 0.14$$

Exercice No. 04

Considérons la fonction :

$$h(x) = f(x) - P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$$

donc

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

d'où

$$\max_{x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]} |f(x) - P(x)| \leq 0.14$$

par contre, si on considère tout l'intervalle $[-1, 1]$, on a

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - P(x)| \leq 1$$

Exercice No. 04

Considérons la fonction :

$$h(x) = f(x) - P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$$

donc

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

d'où

$$\max_{x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]} |f(x) - P(x)| \leq 0.14$$

par contre, si on considère tout l'intervalle $[-1, 1]$, on a

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - P(x)| \leq 1$$

ceci du fait que l'interpolation est moins précise en dehors de l'intervalle $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.