Intégration Numérique : Méthodes de Gauss

Mohammed Belmekki

Département de la Formation Préparatoire
ESSA- Tlemcen- Algeria

COVID19/2021-2022

Exercice No. 01

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction régulière.
On considère la méthode d'intégration numérique (M) donnée par :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1), \quad x_0,\ x_1 \in [-1, 1] \quad \dots (M)$$

1. Donner les conditions sur les positions $x_0,\ x_1$ et les coéfficients associés $c_0,\ c_1$ pour que la formule soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
2. Parmi ces méthode d'ordre 2, quelle est celle qui vérifie $x_0 = -x_1$?
   Montrer qu'elle reste exacte pour les polynômes de degré 3.
   Montrer qu'elle est l'unique méthode d'ordre 3.

Exercice No. 01

1. La méthode (M) est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 si et seulement si elle est exacte pour

$$P_0(x) = 1,$$

Exercice No. 01

1. La méthode (M) est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 si et seulement si elle est exacte pour

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

Exercice No. 01

1. La méthode (M) est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 si et seulement si elle est exacte pour

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2$$

Exercice No. 01

1. La méthode (M) est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 si et seulement si elle est exacte pour

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2$$

- Pour $P_0(x) = 1$, On a :

Exercice No. 01

1. La méthode (M) est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 si et seulement si elle est exacte pour

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2$$

- Pour $P_0(x) = 1$, On a :

$$I = \int_1^1 1dx = 2$$

et

Exercice No. 01

1. La méthode (M) est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 si et seulement si elle est exacte pour

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2$$

- Pour $P_0(x) = 1$, On a :

$$I = \int_1^1 1dx = 2$$

et

$$\widetilde{I} = c_0 + c_1$$

Exercice No. 01

1. La méthode (M) est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 si et seulement si elle est exacte pour

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2$$

- Pour $P_0(x) = 1$, On a :

$$I = \int_1^1 1dx = 2$$

et

$$\widetilde{I} = c_0 + c_1$$

donc

$$I = \widetilde{I} \Leftrightarrow$$

Exercice No. 01

1. La méthode (M) est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 si et seulement si elle est exacte pour

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2$$

- Pour $P_0(x) = 1$, On a :

$$I = \int_1^1 1dx = 2$$

et

$$\widetilde{I} = c_0 + c_1$$

donc

$$I = \widetilde{I} \Leftrightarrow c_0 + c_1 = 2$$

Exercice No. 01

- Pour $P_1(x) = x$, On a :

Exercice No. 01

- Pour $P_1(x) = x$, On a :

$$I = \int_1^1 x dx = 0$$

et

Exercice No. 01

- Pour $P_1(x) = x$, On a :

$$I = \int_{1}^{1} x dx = 0$$

et

$$\widetilde{I} = c_0 x_0 + c_1 x_1$$

Exercice No. 01

- Pour $P_1(x) = x$, On a :

$$I = \int_1^1 x dx = 0$$

et

$$\widetilde{I} = c_0 x_0 + c_1 x_1$$

donc

$$I = \widetilde{I} \Leftrightarrow c_0 x_0 + c_1 x_1 = 0$$

Exercice No. 01

- Pour $P_1(x) = x$, On a :

$$I = \int_{1}^{1} x dx = 0$$

et

$$\widetilde{I} = c_0 x_0 + c_1 x_1$$

donc

$$I = \widetilde{I} \Leftrightarrow c_0 x_0 + c_1 x_1 = 0$$

- Pour $P_2(x) = x^2$, On a :

Exercice No. 01

- Pour $P_1(x) = x$, On a :

$$I = \int_{1}^{1} x dx = 0$$

et

$$\widetilde{I} = c_0 x_0 + c_1 x_1$$

donc

$$I = \widetilde{I} \Leftrightarrow c_0 x_0 + c_1 x_1 = 0$$

- Pour $P_2(x) = x^2$, On a :

$$I = \int_{1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

et

Exercice No. 01

- Pour $P_1(x) = x$, On a :

$$I = \int_{1}^{1} x dx = 0$$

et

$$\widetilde{I} = c_0 x_0 + c_1 x_1$$

donc

$$I = \widetilde{I} \Leftrightarrow c_0 x_0 + c_1 x_1 = 0$$

- Pour $P_2(x) = x^2$, On a :

$$I = \int_{1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

et

$$\widetilde{I} = c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2$$

Exercice No. 01

- Pour $P_1(x) = x$, On a :

$$I = \int_1^1 x dx = 0$$

et

$$\widetilde{I} = c_0 x_0 + c_1 x_1$$

donc

$$I = \widetilde{I} \Leftrightarrow c_0 x_0 + c_1 x_1 = 0$$

- Pour $P_2(x) = x^2$, On a :

$$I = \int_1^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

et

$$\widetilde{I} = c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2$$

donc

$$I = \widetilde{I} \Leftrightarrow c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 = \frac{2}{3}$$

Exercice No. 01

La méthode (M) est au moins d'ordre 2 si et seulement si les x_i et les c_i vérifient le système d'équations non linéaires suivant :

Exercice No. 01

La méthode (M) est au moins d'ordre 2 si et seulement si les x_i et les c_i vérifient le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{cases} c_0 + c_1 & = & 2 \\ c_0 x_0 + c_1 x_1 & = & 0 \\ c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 & = & \frac{2}{3} \end{cases}$$

Exercice No. 01

La méthode (M) est au moins d'ordre 2 si et seulement si les x_i et les c_i vérifient le système d'équations non linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} c_0 + c_1 & = & 2 \\ c_0 x_0 + c_1 x_1 & = & 0 \\ c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 & = & \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

La solution si elle existe peut ne pas être unique.

Exercice No. 01

La méthode (M) est au moins d'ordre 2 si et seulement si les x_i et les c_i vérifient le système d'équations non linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_0 + c_1 & = & 2 \\ c_0 x_0 + c_1 x_1 & = & 0 \\ c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 & = & \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

La solution si elle existe peut ne pas être unique.

2. Au système précédent, on ajoute l'équation $x_0 = -x_1$. On obtient alors,

Exercice No. 01

La méthode (M) est au moins d'ordre 2 si et seulement si les x_i et les c_i vérifient le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{cases} c_0 + c_1 & = & 2 \\ c_0 x_0 + c_1 x_1 & = & 0 \\ c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 & = & \frac{2}{3} \end{cases}$$

La solution si elle existe peut ne pas être unique.

2. Au système précédent, on ajoute l'équation $x_0 = -x_1$. On obtient alors,

$$\begin{cases} c_0 + c_1 & = & 2 & \cdots(1) \\ c_0 x_0 + c_1 x_1 & = & 0 & \cdots(2) \\ c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 & = & \frac{2}{3} & \cdots(3) \\ x_0 & = & -x_1 & \cdots(4) \end{cases}$$

Exercice No. 01

En injectant (4) dans (3), on obtient :

Exercice No. 01

En injectant (4) dans (3), on obtient :

$$c_0x_0^2 + c_1x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0^2(c_0 + c_1) = \frac{2}{3}$$

Exercice No. 01

En injectant (4) dans (3), on obtient :

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0^2(c_0 + c_1) = \frac{2}{3}$$

En utilisant l'équation (1), on obtient :

Exercice No. 01

En injectant (4) dans (3), on obtient :

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0^2(c_0 + c_1) = \frac{2}{3}$$

En utilisant l'équation (1), on obtient :

$$2x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice No. 01

En injectant (4) dans (3), on obtient :

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0^2(c_0 + c_1) = \frac{2}{3}$$

En utilisant l'équation (1), on obtient :

$$2x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

On prend alors

Exercice No. 01

En injectant (4) dans (3), on obtient :

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0^2(c_0 + c_1) = \frac{2}{3}$$

En utilisant l'équation (1), on obtient :

$$2x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

On prend alors

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice No. 01

En injectant (4) dans (3), on obtient :

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0^2(c_0 + c_1) = \frac{2}{3}$$

En utilisant l'équation (1), on obtient :

$$2x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

On prend alors

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

L'équation (2) implique

Exercice No. 01

En injectant (4) dans (3), on obtient :

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0^2(c_0 + c_1) = \frac{2}{3}$$

En utilisant l'équation (1), on obtient :

$$2x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

On prend alors

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

L'équation (2) implique

$$c_0(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + c_1\frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow c_0 = c_1$$

Exercice No. 01

En injectant (4) dans (3), on obtient :

$$c_0x_0^2 + c_1x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0^2(c_0 + c_1) = \frac{2}{3}$$

En utilisant l'équation (1), on obtient :

$$2x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

On prend alors

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

L'équation (2) implique

$$c_0(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + c_1\frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow c_0 = c_1$$

En combinant avec l'équation (1), on obtient :

Exercice No. 01

En injectant (4) dans (3), on obtient :

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0^2 (c_0 + c_1) = \frac{2}{3}$$

En utilisant l'équation (1), on obtient :

$$2x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

On prend alors

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

L'équation (2) implique

$$c_0 (-\frac{1}{\sqrt{3}}) + c_1 \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow c_0 = c_1$$

En combinant avec l'équation (1), on obtient :

$$2c_0 = 2$$

Exercice No. 01

En injectant (4) dans (3), on obtient :

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0^2(c_0 + c_1) = \frac{2}{3}$$

En utilisant l'équation (1), on obtient :

$$2x_0^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

On prend alors

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

L'équation (2) implique

$$c_0(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + c_1\frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow c_0 = c_1$$

En combinant avec l'équation (1), on obtient :

$$2c_0 = 2$$

par suite

$$c_0 = c_1 = 1$$

Exercice No. 01

Finalement on obtient la formule :

Exercice No. 01

Finalement on obtient la formule :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Exercice No. 01

Finalement on obtient la formule :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

la formule obtenue est encore d'ordre 3, car

Exercice No. 01

Finalement on obtient la formule :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

la formule obtenue est encore d'ordre 3, car

$$I(x^3) = 0 = \widetilde{I}(x^3).$$

Exercice No. 01

Pour l'unicité :

Exercice No. 01

Pour l'unicité :

La méthode (M) est d'ordre 3 si les x_i et les c_i vérifient les équations :

Exercice No. 01

Pour l'unicité :
La méthode (M) est d'ordre 3 si les x_i et les c_i vérifient les équations :

$$\begin{cases} c_0 + c_1 & = & 2 & \cdots(1) \\ c_0 x_0 + c_1 x_1 & = & 0 & \cdots(2) \\ c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 & = & \frac{2}{3} & \cdots(3) \\ c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 & = & 0 & \cdots(4) \end{cases}$$

Exercice No. 01

Pour l'unicité :

La méthode (M) est d'ordre 3 si les x_i et les c_i vérifient les équations :

$$\begin{cases} c_0 + c_1 & = & 2 & \cdots (1) \\ c_0 x_0 + c_1 x_1 & = & 0 & \cdots (2) \\ c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 & = & \frac{2}{3} & \cdots (3) \\ c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 & = & 0 & \cdots (4) \end{cases}$$

On multiplie l'équation (2) par x_0^2, on obtient :

Exercice No. 01

Pour l'unicité :

La méthode (M) est d'ordre 3 si les x_i et les c_i vérifient les équations :

$$\left\{\begin{array}{lcll} c_0 + c_1 & = & 2 & \cdots(1) \\ c_0x_0 + c_1x_1 & = & 0 & \cdots(2) \\ c_0x_0^2 + c_1x_1^2 & = & \frac{2}{3} & \cdots(3) \\ c_0x_0^3 + c_1x_1^3 & = & 0 & \cdots(4) \end{array}\right.$$

On multiplie l'équation (2) par x_0^2, on obtient :

$$c_0x_0^3 + c_1x_0^2x_1 = 0$$

Exercice No. 01

Pour l'unicité :

La méthode (M) est d'ordre 3 si les x_i et les c_i vérifient les équations :

$$\begin{cases} c_0 + c_1 & = & 2 & \cdots(1) \\ c_0 x_0 + c_1 x_1 & = & 0 & \cdots(2) \\ c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 & = & \frac{2}{3} & \cdots(3) \\ c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 & = & 0 & \cdots(4) \end{cases}$$

On multiplie l'équation (2) par x_0^2, on obtient :

$$c_0 x_0^3 + c_1 x_0^2 x_1 = 0$$

On en soustrait l'équation (4) on obtient :

Exercice No. 01

Pour l'unicité :

La méthode (M) est d'ordre 3 si les x_i et les c_i vérifient les équations :

$$\begin{cases} c_0 + c_1 & = & 2 & \cdots(1) \\ c_0x_0 + c_1x_1 & = & 0 & \cdots(2) \\ c_0x_0^2 + c_1x_1^2 & = & \frac{2}{3} & \cdots(3) \\ c_0x_0^3 + c_1x_1^3 & = & 0 & \cdots(4) \end{cases}$$

On multiplie l'équation (2) par x_0^2, on obtient :

$$c_0x_0^3 + c_1x_0^2x_1 = 0$$

On en soustrait l'équation (4) on obtient :

$$c_1x_1(x_0^2 - x_1^2) = 0$$

Exercice No. 01

Pour l'unicité :

La méthode (M) est d'ordre 3 si les x_i et les c_i vérifient les équations :

$$\begin{cases} c_0 + c_1 & = & 2 & \cdots(1) \\ c_0x_0 + c_1x_1 & = & 0 & \cdots(2) \\ c_0x_0^2 + c_1x_1^2 & = & \frac{2}{3} & \cdots(3) \\ c_0x_0^3 + c_1x_1^3 & = & 0 & \cdots(4) \end{cases}$$

On multiplie l'équation (2) par x_0^2, on obtient :

$$c_0x_0^3 + c_1x_0^2x_1 = 0$$

On en soustrait l'équation (4) on obtient :

$$c_1x_1(x_0^2 - x_1^2) = 0$$

d'où

$$c_1 = 0 \quad ou \quad x_1 = 0, \quad x_0 = \pm x_1$$

Exercice No. 01

Si $c_1 = 0$, d'après l'équation (2) on a

Exercice No. 01

Si $c_1 = 0$, d'après l'équation (2) on a $x_0 = 0$ ou bien $c_0 = 0$, mais dans ce cas l'équation (3) devient impossible.

Exercice No. 01

Si $c_1 = 0$, d'après l'équation (2) on a $x_0 = 0$ ou bien $c_0 = 0$, mais dans ce cas l'équation (3) devient impossible.
Même conclusion si $x_1 = 0$.

Exercice No. 01

Si $c_1 = 0$, d'après l'équation (2) on a $x_0 = 0$ ou bien $c_0 = 0$, mais dans ce cas l'équation (3) devient impossible.
Même conclusion si $x_1 = 0$.
Si $x_0 = x_1$, l'équation (2) implique $x_0 = x_1 = 0$, ce qui contredit l'équation (3).

Exercice No. 01

Si $c_1 = 0$, d'après l'équation (2) on a $x_0 = 0$ ou bien $c_0 = 0$, mais dans ce cas l'équation (3) devient impossible.
Même conclusion si $x_1 = 0$.
Si $x_0 = x_1$, l'équation (2) implique $x_0 = x_1 = 0$, ce qui contredit l'équation (3).
La seule possibilité est que $x_0 = -x_1$ et on retrouve la méthode définie précédement.

Exercice No. 02

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

1. Soit

$$\widetilde{I} = \alpha\left[f(1/3) + f(2/3)\right] + \beta\left[f'(1/3) - f'(2/3)\right]$$

Déterminer α et β pour que l'approximation de I par $\widetilde{I}$ soit d'un degré de précision le plus élevé que possible. Préciser ce degré.

Exercice No. 02

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

1. Soit

$$\widetilde{I} = \alpha\left[f(1/3) + f(2/3)\right] + \beta\left[f'(1/3) - f'(2/3)\right]$$

Déterminer α et β pour que l'approximation de I par $\widetilde{I}$ soit d'un degré de précision le plus élevé que possible. Préciser ce degré.

2. Soit $c \in [0,1]$, et

$$\widetilde{I} = \alpha\left[f(0) + \frac{f'(0)}{2}\right] + \beta f(c)$$

Déterminer α, β et c pour que l'approximation de I par $\widetilde{I}$ soit d'un degré de précision le plus élevé que possible. Préciser ce degré.

Exercice No. 02

1. Soit

$$\widetilde{I} = \alpha \left[f(1/3) + f(2/3)\right] + \beta \left[f'(1/3) - f'(2/3)\right]$$

Exercice No. 02

1. Soit

$$\widetilde{I} = \alpha\left[f(1/3) + f(2/3)\right] + \beta\left[f'(1/3) - f'(2/3)\right]$$

- $P_0(x) = 1$ et $P_0'(x) = 0$, on a

Exercice No. 02

1. Soit

$$\widetilde{I} = \alpha \left[f(1/3) + f(2/3)\right] + \beta \left[f'(1/3) - f'(2/3)\right]$$

- $P_0(x) = 1$ et $P_0'(x) = 0$, on a

$$I = \int_0^1 1 dx = 1$$

et

Exercice No. 02

1. Soit

$$\widetilde{I} = \alpha\left[f(1/3) + f(2/3)\right] + \beta\left[f'(1/3) - f'(2/3)\right]$$

- $P_0(x) = 1$ et $P_0'(x) = 0$, on a

$$I = \int_0^1 1dx = 1$$

et

$$\widetilde{I} = \alpha(1+1) + \beta(0-0) = 2\alpha$$

d'où

Exercice No. 02

1. Soit

$$\widetilde{I} = \alpha\left[f(1/3) + f(2/3)\right] + \beta\left[f'(1/3) - f'(2/3)\right]$$

- $P_0(x) = 1$ et $P_0'(x) = 0$, on a

$$I = \int_0^1 1dx = 1$$

et

$$\widetilde{I} = \alpha(1+1) + \beta(0-0) = 2\alpha$$

d'où

$$I = \widetilde{I} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Exercice No. 02

1. Soit

$$\widetilde{I} = \alpha\left[f(1/3) + f(2/3)\right] + \beta\left[f'(1/3) - f'(2/3)\right]$$

- $P_0(x) = 1$ et $P_0'(x) = 0$, on a

$$I = \int_0^1 1dx = 1$$

et

$$\widetilde{I} = \alpha(1+1) + \beta(0-0) = 2\alpha$$

d'où

$$I = \widetilde{I} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Si $\alpha = 1/2$ la méthode est au moins d'ordre 0

Exercice No. 02

- $P_1(x) = x$ et $P_1'(x) = 1$, on a

Exercice No. 02

- $P_1(x) = x$ et $P_1'(x) = 1$, on a

$$I = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

et

Exercice No. 02

- $P_1(x) = x$ et $P_1'(x) = 1$, on a

$$I = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

et

$$\widetilde{I} = \alpha(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) + \beta(1 - 1) = \alpha$$

d'où

Exercice No. 02

- $P_1(x) = x$ et $P_1'(x) = 1$, on a

$$I = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

et

$$\widetilde{I} = \alpha(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) + \beta(1 - 1) = \alpha$$

d'où

$$I = \widetilde{I} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Exercice No. 02

- $P_1(x) = x$ et $P_1'(x) = 1$, on a

$$I = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

et

$$\widetilde{I} = \alpha(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) + \beta(1 - 1) = \alpha$$

d'où

$$I = \widetilde{I} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Pour $\alpha = 1/2$ la méthode est encore au moins d'ordre 1.

Exercice No. 02

- $P_2(x) = x^2$ et $P_2'(x) = 2x$, on a :

Exercice No. 02

- $P_2(x) = x^2$ et $P_2'(x) = 2x$, on a :

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

et

Exercice No. 02

- $P_2(x) = x^2$ et $P_2'(x) = 2x$, on a :

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

et

$$\widetilde{I} = \alpha(\frac{1}{9} + \frac{4}{9}) + \beta(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}) = \frac{5}{9}\alpha - \frac{2}{3}\beta$$

d'où

Exercice No. 02

- $P_2(x) = x^2$ et $P_2'(x) = 2x$, on a :

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

et

$$\widetilde{I} = \alpha(\frac{1}{9} + \frac{4}{9}) + \beta(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}) = \frac{5}{9}\alpha - \frac{2}{3}\beta$$

d'où

$$I = \widetilde{I} \Leftrightarrow \frac{5}{9}\alpha - \frac{2}{3}\beta = \frac{1}{3}$$

Exercice No. 02

- $P_2(x) = x^2$ et $P_2'(x) = 2x$, on a :

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

et

$$\widetilde{I} = \alpha(\frac{1}{9} + \frac{4}{9}) + \beta(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}) = \frac{5}{9}\alpha - \frac{2}{3}\beta$$

d'où

$$I = \widetilde{I} \Leftrightarrow \frac{5}{9}\alpha - \frac{2}{3}\beta = \frac{1}{3}$$

Pour $\alpha = 1/2$ et $\beta = -1/12$ la méthode est au moins d'ordre 2.

Exercice No. 02

On vérifie qu'elle reste d'ordre 3.

Exercice No. 02

On vérifie qu'elle reste d'ordre 3.

- $P_3(x) = x^3$ et $P_3'(x) = 3x^2$, on a :

Exercice No. 02

On vérifie qu'elle reste d'ordre 3.

- $P_3(x) = x^3$ et $P_3'(x) = 3x^2$, on a :

$$I = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

et

Exercice No. 02

On vérifie qu'elle reste d'ordre 3.

- $P_3(x) = x^3$ et $P_3'(x) = 3x^2$, on a :

$$I = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

et

$$\widetilde{I} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{27} + \frac{8}{27}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{3}{9} - \frac{12}{9}\right) = \frac{1}{4}$$

d'où

Exercice No. 02

On vérifie qu'elle reste d'ordre 3.

- $P_3(x) = x^3$ et $P_3'(x) = 3x^2$, on a :

$$I = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

et

$$\widetilde{I} = \frac{1}{2}(\frac{1}{27} + \frac{8}{27}) - \frac{1}{12}(\frac{3}{9} - \frac{12}{9}) = \frac{1}{4}$$

d'où

$$I = \widetilde{I}$$

Exercice No. 02

- Pour $P_4(x) = x^4$, on a

Exercice No. 02

- Pour $P_4(x) = x^4$, on a

$$I = \frac{1}{5} \neq \widetilde{I} = \frac{31}{162}.$$

Exercice No. 02

- Pour $P_4(x) = x^4$, on a

$$I = \frac{1}{5} \neq \widetilde{I} = \frac{31}{162}.$$

Pour $\alpha = 1/2$ et $\beta = -1/12$ la méthode est exactement d'ordre 3.

Exercice No. 02

2. Soit $c \in [0,1]$, et

$$\widetilde{I} = \alpha \left[f(0) + \frac{f'(0)}{2} \right] + \beta f(c)$$

Exercice No. 02

2. Soit $c \in [0, 1]$, et

$$\widetilde{I} = \alpha \left[f(0) + \frac{f'(0)}{2} \right] + \beta f(c)$$

Si $\alpha + \beta = 1$, la méthode est au moins d'ordre 0.

Exercice No. 02

2. Soit $c \in [0, 1]$, et

$$\widetilde{I} = \alpha \left[f(0) + \frac{f'(0)}{2} \right] + \beta f(c)$$

Si $\alpha + \beta = 1$, la méthode est au moins d'ordre 0.
Si de plus $\alpha/2 + \beta c = 1/2$ la méthode est au moins d'ordre 1.

Exercice No. 02

2. Soit $c \in [0, 1]$, et

$$\widetilde{I} = \alpha \left[f(0) + \frac{f'(0)}{2} \right] + \beta f(c)$$

Si $\alpha + \beta = 1$, la méthode est au moins d'ordre 0.
Si de plus $\alpha/2 + \beta c = 1/2$ la méthode est au moins d'ordre 1.
Si de plus $\beta c^2 = 1/3$, la méthode est au moins d'ordre 2.

Exercice No. 02

2. Soit $c \in [0, 1]$, et

$$\widetilde{I} = \alpha \left[f(0) + \frac{f'(0)}{2} \right] + \beta f(c)$$

Si $\alpha + \beta = 1$, la méthode est au moins d'ordre 0.
Si de plus $\alpha/2 + \beta c = 1/2$ la méthode est au moins d'ordre 1.
Si de plus $\beta c^2 = 1/3$, la méthode est au moins d'ordre 2. En résolvant ce système d'equations on obtient :

Exercice No. 02

2. Soit $c \in [0, 1]$, et

$$\widetilde{I} = \alpha \left[f(0) + \frac{f'(0)}{2} \right] + \beta f(c)$$

Si $\alpha + \beta = 1$, la méthode est au moins d'ordre 0.
Si de plus $\alpha/2 + \beta c = 1/2$ la méthode est au moins d'ordre 1.
Si de plus $\beta c^2 = 1/3$, la méthode est au moins d'ordre 2. En résolvant ce système d'equations on obtient :

$$c = 1/2, \quad \beta = 4/3, \quad \alpha = -1/3$$

Exercice No. 02

2. Soit $c \in [0,1]$, et

$$\widetilde{I} = \alpha \left[f(0) + \frac{f'(0)}{2} \right] + \beta f(c)$$

Si $\alpha + \beta = 1$, la méthode est au moins d'ordre 0.
Si de plus $\alpha/2 + \beta c = 1/2$ la méthode est au moins d'ordre 1.
Si de plus $\beta c^2 = 1/3$, la méthode est au moins d'ordre 2. En résolvant ce système d'equations on obtient :

$$c = 1/2, \quad \beta = 4/3, \quad \alpha = -1/3$$

La méthode est exactement d'ordre 2 car pour $P_3(x) = x^3$, on a :

$$I = 1/4 \neq \widetilde{I} = 1/6$$