Equations non-linéaires : Méthodes itératives

Mohammed Belmekki

Département de la Formation Préparatoire
ESSA- Tlemcen- Algeria

2022-2023

Exercice

On considère l'équation non linéaire suivante :

$$x\ln(x) - 1 = 0,\ \ x \in [1, 2] \tag{1}$$

1. *Montrer que l'équation* (1) *admet une unique racine dans [1,2].*
2. *Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la solution en utilisant la méthode de dichotomie avec une précision* $\epsilon = 10^{-3}$.
3. *Faire autant d'itérations pour obtenir la solution à* 10^{-3} *près.*

1. Montrer que l'équation (1) admet une unique racine dans [1,2].

1. Montrer que l'équation (1) admet une unique racine dans [1,2].
   On note par

$$f(x) = x\ln(x) - 1,\ x \in [1,2] \tag{2}$$

1. Montrer que l'équation (1) admet une unique racine dans [1,2].
   On note par

$$f(x) = x\ln(x) - 1,\ x \in [1, 2] \tag{2}$$

   La fonction $f(x)$ est continue sur $[1, 2]$.

1. Montrer que l'équation (1) admet une unique racine dans [1,2].

   On note par

$$f(x) = x \ln(x) - 1, \; x \in [1,2] \tag{2}$$

   La fonction $f(x)$ est continue sur $[1,2]$.
   Sa dérivée est donnée par :

$$f'(x) = \ln(x) + 1$$

   qui est continue sur $[1,2]$.
   Donc $f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$.

1. Montrer que l'équation (1) admet une unique racine dans [1,2].

On note par

$$f(x) = x\ln(x) - 1,\ \ x \in [1,2] \tag{2}$$

La fonction $f(x)$ est continue sur $[1,2]$.
Sa dérivée est donnée par :

$$f'(x) = \ln(x) + 1$$

qui est continue sur $[1,2]$.
Donc $f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$.
On a :

$$f(1) = -1 < 0 \quad \text{et} \quad f(2) = 2\ln(2) - 1 > 0$$

De plus, on a

$$f'(x) = \ln(x) + 1 > 0; \quad \forall x \in [1, 2].$$

ce qui implique que $f(x)$ est strictement croissante sur $[1, 2]$.

De plus, on a

$$f'(x) = \ln(x) + 1 > 0; \quad \forall x \in [1, 2].$$

ce qui implique que $f(x)$ est strictement croissante sur $[1, 2]$.
En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [1, 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

2. Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la solution en utilisant la méthode de dichotomie avec une précision $\epsilon = 10^{-3}$.

2. Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la solution en utilisant la méthode de dichotomie avec une précision $\epsilon = 10^{-3}$.

La formule d'erreur de la procédure de dichotomie est donnée par :

2. Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la solution en utilisant la méthode de dichotomie avec une précision $\epsilon = 10^{-3}$.

   La formule d'erreur de la procédure de dichotomie est donnée par :

$$|c_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

2. Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la solution en utilisant la méthode de dichotomie avec une précision $\epsilon = 10^{-3}$.

   La formule d'erreur de la procédure de dichotomie est donnée par :

$$|c_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

   pour obtenir une précision de 10^{-3}, on choisit n tel que :

2. Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la solution en utilisant la méthode de dichotomie avec une précision $\epsilon = 10^{-3}$.

   La formule d'erreur de la procédure de dichotomie est donnée par :

$$|c_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

   pour obtenir une précision de 10^{-3}, on choisit n tel que :

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad 2^{n+1} \geq 10^3$$

2. Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la solution en utilisant la méthode de dichotomie avec une précision $\epsilon = 10^{-3}$.

La formule d'erreur de la procédure de dichotomie est donnée par :

$$|c_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

pour obtenir une précision de 10^{-3}, on choisit n tel que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3} \quad &\Rightarrow \quad 2^{n+1} \geq 10^3 \\
&\Rightarrow \quad (n+1)\ln(2) \geq 3\ln(10) \\
&\Rightarrow \quad n+1 \geq \frac{3\ln(10)}{\ln(2)} \\
&\Rightarrow \quad n \geq \frac{3\ln(10)}{\ln(2)} - 1 \\
&\Rightarrow \quad n \geq 8.96
\end{aligned}$$

2. Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la solution en utilisant la méthode de dichotomie avec une précision $\epsilon = 10^{-3}$.

La formule d'erreur de la procédure de dichotomie est donnée par :

$$|c_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

pour obtenir une précision de 10^{-3}, on choisit n tel que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3} \quad & \Rightarrow \quad 2^{n+1} \geq 10^3 \\
& \Rightarrow \quad (n+1)\ln(2) \geq 3\ln(10) \\
& \Rightarrow \quad n+1 \geq \frac{3\ln(10)}{\ln(2)} \\
& \Rightarrow \quad n \geq \frac{3\ln(10)}{\ln(2)} - 1 \\
& \Rightarrow \quad n \geq 8.96
\end{aligned}$$

On choisit

$$n = 9$$

3. Faire autant d'itérations pour obtenir la solution à 10^{-3} près.
   On a le tableau suivant :

3. Faire autant d'itérations pour obtenir la solution à 10^{-3} près.
   On a le tableau suivant :
   la solution est :
$$\alpha = 1.762695$$

Exercice

Soit l'équation :

$$e^x - 2x - 1 = 0 \tag{3}$$

1. *Montrer que l'équation* (3) *admet une unique racine* α *dans [1,2].*
2. *Montrer que* α *est un point fixe pour les fonctions suivantes :*

$$\phi_1(x) = ln(2x+1) \quad et \quad \phi_2(x) = \frac{e^x - 1}{2}$$

3. *Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la valeur de* α *avec une précision* $\epsilon = 10^{-3}$ *dans le cas où le procédé est convergent.*
4. *Estimer à* 10^{-3} *près la valeur de* α *dans le cas où le procédé est convergent.*

1. Montrer que l'équation (3) admet une unique racine α dans [1,2].

   On note par $f(x) = e^x - 2x - 1$

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

   elle vérifie :

$$f(1) = e - 3 < 0, \quad f(2) = e^2 - 5 > 0$$

   sa dérivée :

$$f'(x) = e^x - 2 > 0, \quad \forall x \in [1, 2],$$

   ce qui implique que f est strictement croissante sur $[1, 2]$, d'après le TVI, f admet un unique zéro $\alpha \in [1, 2]$.

2. Montrer que α est un point fixe pour les fonctions suivantes :

$$\phi_1(x) = ln(2x+1) \quad et \quad \phi_2(x) = \frac{e^x - 1}{2}$$

On a les équivalences suivantes :

2. Montrer que α est un point fixe pour les fonctions suivantes :

$$\phi_1(x) = ln(2x+1) \quad et \quad \phi_2(x) = \frac{e^x - 1}{2}$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^\alpha - 2\alpha - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^\alpha = 2\alpha + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = \ln(2\alpha + 1) \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = \phi_1(\alpha). \end{aligned}$$

2. Montrer que α est un point fixe pour les fonctions suivantes :

$$\phi_1(x) = ln(2x+1) \quad et \quad \phi_2(x) = \frac{e^x - 1}{2}$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^\alpha - 2\alpha - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^\alpha = 2\alpha + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = \ln(2\alpha + 1) \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = \phi_1(\alpha). \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^\alpha - 2\alpha - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\alpha = e^\alpha - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{e^\alpha - 1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = \phi_2(\alpha). \end{aligned}$$

3. Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la valeur de α avec une précision $\epsilon = 10^{-3}$ dans le cas où le procédé est convergent.

Considérons la première procédure :

$$x_{k+1} = \phi_1(x_k) = \ln(2x_k + 1), \quad k \geq 0.$$

3. Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la valeur de α avec une précision $\epsilon = 10^{-3}$ dans le cas où le procédé est convergent.

Considérons la première procédure :

$$x_{k+1} = \phi_1(x_k) = \ln(2x_k + 1), \quad k \geq 0.$$

la dérivée de ϕ_1 est donnée par :

$$\phi_1'(x) = \frac{2}{2x+1}$$

3. Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la valeur de α avec une précision $\epsilon = 10^{-3}$ dans le cas où le procédé est convergent.

Considérons la première procédure :

$$x_{k+1} = \phi_1(x_k) = \ln(2x_k + 1), \quad k \geq 0.$$

la dérivée de ϕ_1 est donnée par :

$$\phi_1'(x) = \frac{2}{2x + 1}$$

la dérivée seconde vérifie :

$$\phi_1''(x) = \frac{-4}{(2x + 1)^2} < 0$$

3. Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la valeur de α avec une précision $\epsilon = 10^{-3}$ dans le cas où le procédé est convergent.

Considérons la première procédure :

$$x_{k+1} = \phi_1(x_k) = \ln(2x_k + 1), \quad k \geq 0.$$

la dérivée de ϕ_1 est donnée par :

$$\phi_1'(x) = \frac{2}{2x + 1}$$

la dérivée seconde vérifie :

$$\phi_1''(x) = \frac{-4}{(2x + 1)^2} < 0$$

donc ϕ_1' est strictement décroissante sur $[1, 2]$.

3. Calculer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour estimer la valeur de α avec une précision $\epsilon = 10^{-3}$ dans le cas où le procédé est convergent.

Considérons la première procédure :

$$x_{k+1} = \phi_1(x_k) = \ln(2x_k + 1), \quad k \geq 0.$$

la dérivée de ϕ_1 est donnée par :

$$\phi_1'(x) = \frac{2}{2x+1}$$

la dérivée seconde vérifie :

$$\phi_1''(x) = \frac{-4}{(2x+1)^2} < 0$$

donc ϕ_1' est strictement décroissante sur $[1, 2]$.
d'où, pour tout $x \in [1, 2]$, on a :

$$\frac{2}{5} \leq \phi_1'(x) \leq \frac{2}{3}$$

ce qui implique

$$|\phi_1'(x)| < 1, \quad \forall x \in [1, 2].$$

La stabilité de l'intervalle $[1, 2]$ par ϕ_1.

La stabilité de l'intervalle $[1, 2]$ par ϕ_1.
la dérivée de ϕ_1 est donnée par :

$$\phi_1'(x) = \frac{2}{2x+1} > 0, \quad x \in [1, 2]$$

donc $\phi(x)$ est strictement croissante sur $[1, 2]$, par suite

La stabilité de l'intervalle $[1, 2]$ par ϕ_1.
la dérivée de ϕ_1 est donnée par :

$$\phi_1'(x) = \frac{2}{2x+1} > 0, \quad x \in [1, 2]$$

donc $\phi(x)$ est strictement croissante sur $[1, 2]$, par suite

$$\phi_1(1) \leq \phi_1(x) \leq \phi_1(2)$$

donc

$$\ln(3) \leq \phi_1(x) \leq \ln(5)$$

d'où

$$1.099 \leq \phi_1(x) \leq 1.609$$

par suite

$$x \in [1, 2] \Rightarrow \phi_1(x) \in [1.2]$$

En conclusion

La stabilité de l'intervalle $[1, 2]$ par ϕ_1.
la dérivée de ϕ_1 est donnée par :

$$\phi_1'(x) = \frac{2}{2x+1} > 0, \quad x \in [1, 2]$$

donc $\phi(x)$ est strictement croissante sur $[1, 2]$, par suite

$$\phi_1(1) \leq \phi_1(x) \leq \phi_1(2)$$

donc

$$\ln(3) \leq \phi_1(x) \leq \ln(5)$$

d'où

$$1.099 \leq \phi_1(x) \leq 1.609$$

par suite

$$x \in [1, 2] \Rightarrow \phi_1(x) \in [1.2]$$

En conclusion La procédure $x_{k+1} = \phi_1(x_k) = \ln(2x_k + 1)$ est convergente pout tout choix de la condition initiale $x_0 \in [1, 2]$.

Considérons maintenant la procédure :

$$x_{k+1} = \phi_2(x_k) = \frac{e^{x_k} - 1}{2}, \quad k \geq 0.$$

la dérivée de ϕ_2 est donnée par :

$$\phi_2'(x) = \frac{e^x}{2}$$

au point $x = 1$, on a

$$\phi_2'(1) = \frac{e}{2} > 1$$

par suite, la procédure $x_{k+1} = \phi_2(x_k)$ est divergente.

Nombre d'itérations nécessaires :

Nombre d'itérations nécessaires :

La formule d'erreur par la méthode du point fixe est donnée par :

$$|x_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1|$$

Nombre d'itérations nécessaires :

La formule d'erreur par la méthode du point fixe est donnée par :

$$|x_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1|$$

On prend $x_0 = 1$ donc $x_1 = \phi_1(x_0) = \phi_1(1) = \ln(3) = 1.099$

Nombre d'itérations nécessaires :

La formule d'erreur par la méthode du point fixe est donnée par :

$$|x_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1|$$

On prend $x_0 = 1$ donc $x_1 = \phi_1(x_0) = \phi_1(1) = \ln(3) = 1.099$
la constante de contraction est :

$$k = \max_{x \in [1,2]} |\phi_1'(x)| = \frac{2}{3}$$

On obtient alors :

Nombre d'itérations nécessaires :

La formule d'erreur par la méthode du point fixe est donnée par :

$$|x_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1|$$

On prend $x_0 = 1$ donc $x_1 = \phi_1(x_0) = \phi_1(1) = \ln(3) = 1.099$
la constante de contraction est :

$$k = \max_{x\in[1,2]} |\phi_1'(x)| = \frac{2}{3}$$

On obtient alors :

$$n \geq 14.042$$

Nombre d'itérations nécessaires :

La formule d'erreur par la méthode du point fixe est donnée par :

$$|x_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1|$$

On prend $x_0 = 1$ donc $x_1 = \phi_1(x_0) = \phi_1(1) = \ln(3) = 1.099$
la constante de contraction est :

$$k = \max_{x \in [1,2]} |\phi_1'(x)| = \frac{2}{3}$$

On obtient alors :

$$n \geq 14.042$$

Le nombre minimal d'itération est :

$$n = 15$$

4. Estimer à 10^{-3} près la valeur de α dans le cas où le procédé est convergent.

4. Estimer à 10^{-3} près la valeur de α dans le cas où le procédé est convergent.

   En utilisant la première procédure et en partant de $x_0 = 1$,

4. Estimer à 10^{-3} près la valeur de α dans le cas où le procédé est convergent.
En utilisant la première procédure et en partant de $x_0 = 1$, on obtient les itérations suivantes :

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1.099 \\ x_2 &= 1.162 \\ x_3 &= 1.201 \\ x_4 &= 1.225 \\ x_5 &= 1.238 \\ x_6 &= 1.246 \\ x_7 &= 1.250 \\ x_8 &= 1.253 \\ x_9 &= 1.254 \end{aligned}$$

On prend

$$\alpha = 1.254$$