ECOLE SUPERIEURE EN SCIENCES APPLIQUEES DE TLEMCEN
ANALYSE NUMERIQUE I
EQUATIONS NON-LINEAIRES : METHODES ITERATIVES
COVID19/2020-2021

M. BELMEKKI

1. Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique d'équations nonlinéaires de type :

$$f(x) = 0, \qquad x \in [a, b].$$

où f est une fonction réele à valeurs réelles, définie et continue sur un certain intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Il s'avère très difficil, voire impossible d'obtenir de manière explicite la solution d'une équation nonlinéaire, à titre d'exemple, considérons les équations suivantes :

$$e^x + x = 0$$

et

$$e^x - x = 0$$

Un raisonnement géométrique permet de conclure que la première équation admet exactement une solution alors que la deuxièmme n'en admet accune.

On peut utiliser le théorème qui suit pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution dans un intervalle donné.

Théorème 1. Théorème des valeurs intermédiaires.
Soit f une fonction réelle à variable réelle, définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si

$$f(a).f(b) < 0$$

alors il existe un $x^* \in [a, b]$ tel que :

$$f(x^*) = 0.$$

Si de plus f est monotone sur $[a, b]$, alors x^* est unique dans $[a, b]$.

Exemple 1. *Montrer que l'équation : $e^x + x = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[-1, 0]$. En effet.*
La fonction $f(x) = e^x + x$ est continue sur l'intervalle $[-1, 0]$.
et

$$f(-1) = e^{-1} - 1 < 0 \quad f(0) = e^0 + 0 = 1 > 0$$

de plus

$$f'(x) = e^x + 1 > 0 \quad \textit{pour tout } x \in [-1, 0]$$

donc f est strictement croissante sur $[-1, 0]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique x^* dans $[-1, 0]$ tel que $f(x^*) = 0$.

Une méthode itérative consiste à construire une suite (x_n) qui dans le cas où elle est convergente, elle converge vers la solution exacte x^* du problème. On peut dès lors estimer la solution quand elle existe, avec une précision préalablement fixée ϵ.

Trois méthodes sont mises en exergue : la méthode de dichotomie, la méthode du point fixe et la méthode de Newton.

2. Méthode de dichotomie

2.1. **Principe de la méthode et convegence.** Cette méthode est aussi appellée méthode de la bissection, elle consiste à diviser l'intervalle $[a, b]$ en deux sous-intervalles $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ et localiser par la suite la racine suivant le signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ en se basant sur le théorème des valeurs intermédiaires.
De cette manière, on construit deux suites (a_n) et (b_n) définies par les formules de récurence :

$$a_0 = a, \qquad b_0 = b$$

si

$$f(a_n) . f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$$

alors

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

sinon

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n$$

On a la proposition suivante :

Proposition 2. *Soient (a_n) et (b_n) les suites construites précédement.*
a) Les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
b) Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$f(a_n).f(b_n) \leq 0.$$

c) Leur limite commune est la solution de l'équation donnée :

$$\lim_{n \mapsto \infty} a_n = \lim_{n \mapsto \infty} b_n = x^*$$

Preuve.
a) La suite (a_n) est croissante :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{a_n + b_n}{2} - a_n \\ &= \frac{b_n - a_n}{2} > 0, \end{aligned}$$

La suite (b_n) est alors décroissante.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{a_n + b_n}{2} - b_n \\ &= \frac{a_n - b_n}{2} < 0, \end{aligned}$$

La difference $b_n - a_n$ tend vers 0 quand $n \mapsto \infty$. En effet,

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - a_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2^2}(b_{n-2} - a_{n-2}) \\ &= .... \\ &= \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \to 0 \ \textit{lorsque} \ \ n \mapsto \infty. \end{aligned}$$

Les deux suites sont adjacentes et convergent alors vers une même limite, on la note x^*.

b) On note par c_n le milieu de l'intevalle $[a_n, b_n]$:

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Montrons la propriété par récurence.

Pour $n = 0$, la propriété est évidement vraie.

Supposons qu'elle reste vraie jusqu'à l'ordre n.

On distingue deux cas :

Si

$$f(a_n).f(c_n) \leq 0$$

alors

$$a_{n+1} = a_n \quad \textit{et } b_{n+1} = c_n$$

d'où

$$f(a_{n+1}).f(b_{n+1}) \leq 0.$$

Si

$$f(a_n).f(c_n) \geq 0$$

alors, forcement

$$f(c_n).f(b_n) \leq 0$$

dans le cas contraire $f(a_n)$ et $f(b_n)$ auront de même signe et puisque dans ce cas

$$a_{n+1} = c_n \quad \textit{et } b_{n+1} = b_n$$

on a alors

$$f(a_{n+1}).f(b_{n+1}) \leq 0.$$

En conclusion, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

c) En faisant tendre n vers ∞, on a :

$$\lim_{n \mapsto \infty} f(a_{n+1}) . \lim_{n \mapsto \infty} f(b_{n+1}) \leq 0.$$

Sachant que f est continue on a :

$$f\left(\lim_{n \mapsto \infty} a_{n+1}\right).f\left(\lim_{n \mapsto \infty} b_{n+1}\right) \leq 0.$$

d'où

$$f(x^*).f(x^*) = (f(x^*))^2 \leq 0$$

ce qui implique

$$f(x^*) = 0.$$

2.2. **Evaluation de l'erreur.**

Proposition 3. *Si c_n est la n^{ieme} valeur obtenue en utilisant la procédure de Dichotomie, alors l'erreur commise en prennant c_n comme valeur apporochée de la valeur exacte x^* est donnée par :*

$$e_n = |c_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Preuve. *Soit c_n est la n^{ieme} valeur obtenue en utilisant la procédure de Dichotomie, donc*

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

où $[a_n, b_n]$ est le dernier intevalle obtenu contenant x^*.
Alors, ou bien $x^* \in [a_n, c_n]$, ou bien $x^* \in [c_n, b_n]$, et dans les deux cas, on a

$$\begin{aligned} e_n &= |c_n - x^*| \\ &\leq \frac{b_n - a_n}{2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n} \\ &= \frac{b-a}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

3. Méthode du point fixe

3.1. **Principe de la méthode et convergence.** L'idée de base de la méthode du point fixe est de réécrire l'équation $f(x) = 0$ sous une forme équivalente $x = \phi(x)$:

$$f(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = \phi(x^*)$$

x^* est dit point fixe de ϕ.

On construit une suite de points $(x_n)_n$ par :

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n \geq 0.$$

Définition 1. *Soit ϕ une fonction réelle à variable réelle, définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.*
ϕ est dite contractante ou contraction s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que :

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq k.|x - y|, \quad \textit{pour tout} \quad x, y \in [a, b].$$

Définition 2. *Soit ϕ une fonction réelle à variable réelle, définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.*
L'intervalle $[a, b]$ est dit stable par la fonction ϕ si :

$$\phi(x) \in [a, b] \quad \textit{pour tout} \quad x \in [a, b]$$

Théorème 4. *Soit ϕ une fonction réelle à variable réelle, définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.*
Si $[a, b]$ est stable par ϕ ; alors il existe au moins un $x^* \in [a, b]$ tel que :

$$x^* = \phi(x^*).$$

Si de plus ; ϕ est une contraction sur $[a, b]$ alors x^* est unique et :

$$\lim_{n \mapsto \infty} x_n = x^*$$

Preuve. *On considère la fonction*

$$h(x) = x - \phi(x), \quad x \in [a, b].$$

Alors

$$h(a) = a - \phi(a) \leq 0$$

car

$$\phi(a) \geq a$$

De même

$$h(b) = b - \phi(b) \geq 0$$

car

$$\phi(b) \leq b$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $x^* \in [a, b]$ tel que

$$h(x^*) = x^* - \phi(x^*) = 0$$

d'où

$$x^* = \phi(x^*).$$

Pour montrer l'unicité de x^*, on suppose que ϕ admet un autre point fixe $\overline{x} \in [a, b]$, on a alors

$$\begin{aligned} |x^* - \overline{x}| &= |\phi(x^*) - \phi(\overline{x})| \\ &\leq k|x^* - \overline{x}| \end{aligned}$$

où k est le rapport de contraction de f.
d'où

$$(1-k)|x^* - \overline{x}| \leq 0.$$

puisque $k < 1$ alors :

$$|x^* - \overline{x}| = 0.$$

par suite

$$x^* = \overline{x}.$$

Montrons que la suite (x_n) converge vers x^*. Pour tout $n \geq 1$ On a

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |\phi(x_{n-1}) - \phi(x^*)| \\ &\leq k|x_{n-1} - x^*| \end{aligned}$$

ainsi de proche en proche, on a :

$$|x_n - x^*| \leq k^n |x_0 - x^*|$$

or $0 < k < 1$ donc

$$\lim_{n\to\infty} k^n = 0$$

par suite

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

Dans le cas où la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ on a le théorème suivant :

Théorème 5. *Soit ϕ une fonction réelle à variable réelle, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.*
Supposons que l'intervalle $[a, b]$ est stable par ϕ.
Si pour tout $x \in [a, b]$, Il exite une constante k, $0 < k < 1$ telle que

$$|\phi'(x)| \leq k < 1$$

alors x^* est unique dans $[a, b]$ et

$$\lim_{n\mapsto\infty} x_n = x^*$$

pour tout choix de x_0 dans $[a, b]$.
Preuve. *La fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un $\xi \in [a, b]$ tel que :*

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi'(\xi)(x - y)$$

donc

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |\phi'(\xi)||x - y|$$

par suite

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq k.|x - y|$$

il s'en suit que les conditions du théorème 4 sont satisfaites.

Remarque 1. *Dans le cas où*

$$|\phi'(x)| > 1, \quad x \in [a, b]$$

alors

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x^*| &= |\phi(x_n) - \phi(x^*)| \\ &= |\phi'(\xi)|.|x_n - x^*| \\ &> |x_n - x^*| \end{aligned}$$

donc, quand n augmente, le point x_n s'éloigne de x^* et la procédure est alors divergente.

3.2. Estimation de l'erreur.

Proposition 6. *Supposons que la procédure du point fixe est convergente, alors :*

$$|x_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1|, \quad n \geq 1.$$

x_0 *une condition initiale donnée et* $x_1 = \phi(x_0)$.

Preuve. *On a :*

$$|x_n - x^*| \leq k^n |x_0 - x^*|, \quad n \geq 1.$$

pour $n = 1$, *on obtient*

$$|x_1 - x^*| \leq k|x_0 - x^*|$$

or

$$\begin{aligned} |x_0 - x^*| &= |x_0 - x_1 + x_1 - x^*| \\ &\leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x^*| \\ &\leq |x_0 - x_1| + k|x_0 - x^*| \end{aligned}$$

par suite

$$|x_0 - x^*| \leq \frac{1}{1-k}|x_0 - x_1|$$

d'où

$$|x_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1|$$

Remarque 2. *Pour deux méthodes itératives convergentes, la méthode la plus rapide est celle qui a le rapport de contraction le plus petit.*

Remarque 3. *Dans la preuve du théorème précédent, on a utilisé le théorème des accroissements finis, en ce qui suit l'énnoncé :*

Théorème 7. *Pour toute fonction* f *définie et continue sur un intervalle fermé* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *et dérivable sur l'intervalle ouvert* $]a, b[$, *il existe au moins une constante* ξ *dans* $]a, b[$ *telle que :*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

4. Méthode de Newton

4.1. Principe de la méthode et convergence.

L'idée est de remplacer en un point $(x_0, f(x_0))$ la courbe representative de la fonction f par sa tangente, dont l'équation est donnée par :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

l'abscisse x_1 du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des x est donnée par :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On fait de même avec x_1 pour obtenir x_2 et de proche en proche, on construit la suite (x_n) définie par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

qu'on appelle procédure de Newton.
La convergence de la procédure de Newton dépend du choix de la condition initiale x_0. On a le théorème suivant :

Théorème 8. *Soit* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[a, b]$.
Si $f(a) f(b) < 0$ *et si* f' *et* f'' *sont non nulles et gardent des signes constants sur* $[a, b]$, *l'unique racine* x^* *peut être obtenue à l'aide de la procédure de Newton en partant d'un* $x_0 \in [a, b]$ *satisfaisant la condition*

$$f(x_0) . f''(x_0) > 0$$

Preuve. *Plusieurs cas de figure se présentent, mais pour se fixer les idées, on suppose que :*

$$f(a) < 0 \text{ et } f(b) > 0$$

et

$$\forall x \in [a,b], \; f'(x) > 0 \text{ et } f''(x) > 0.$$

L'hypothèse $f(x_0) f''(x_0) > 0$ *implique* $f(x_0) > 0$.
Choisissons $x_0 = b$ *et montrons que :*

$$x_n > x^*, \quad \forall n \geq 0$$

On le montre par récurence :
pour $n = 0$, *on a*

$$x_0 = b > x^*.$$

Supposons que pour un certain n, *on a* $x_n > x^*$.
la formule de Taylor au voisinage de x_n *implique l'existence d'un* δ_n, $x < \delta_n < x_n$ *tel que :*

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(\delta_n)(x - x_n)^2.$$

au point x^* *on obtient du fait que* $f(x^*) = 0$:

$$f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2} f''(\delta_n)(x^* - x_n)^2 = 0.$$

f'' *étant positive on obtient alors l'inégalité :*

$$f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) < 0$$

f' *étant positive on obtient alors :*

$$x^* - x_n < -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ce qui donne :

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > x^*$$

d'où

$$x_{n+1} > x^*$$

et ainsi

$$\forall n \geq 0, \; x_n > x^*$$

La fonction f *est croissante sur* $[a,b]$ *car* f' *est positive sur* $[a,b]$, *donc*

$$\forall n \geq 0, \; f(x_n) > f(x^*)$$

ce qui implique

$$\forall n \geq 0, \; f(x_n) > 0$$

car $f(x^*) = 0$.
par suite

$$\forall n \geq 0, \; \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$$

de la définition de (x_n) :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n \geq 0.$$

on déduit

$$\forall n \geq 0, \; x_{n+1} < x_n.$$

et la suite est alors décroissante.
En conclusion, la suite (x_n) *est décroissante, minorée par* x^*, *elle est donc convergente vers*

une limite $l \in [a,b]$ *.*
La limite l *doit vérifier l'équation :*

$$l = l - \frac{f(l)}{f'(l)}$$

ce qui implique :

$$f(l) = 0$$

et l *est alors un autre zéro de* f *dans* $[a,b]$*, ce qui n'est possible que si* $l = x^*$ *car le zéro de* f *est unique dans* $[a,b]$*.*

Le théorème suivant permet de donner une estimation de la longueur de l'intervalle $[a,b]$ contenant la solution x^* pour lequel la méthode de Newton est convergente indépendement de $x_0 \in [a,b]$.

Théorème 9. *Soit* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[a,b]$*.*
Si

$$b - a < \frac{2m}{M}$$

où

$$m = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)| \quad et \quad M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Alors La méthode de Newton est convergente pout tout x_0 *choisi dans l'intervalle* $[a,b]$*.*

Preuve. *La fonction* f *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[a,b]$*, donc* f' *et* f'' *existent et sont continues sur* $[a,b]$*, d'où l'existence de* m *et* M*.*
Le devellopement de Taylor au voisinage de x_n *implique*

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(\delta_n)(x - x_n)^2, \quad x < \delta_n < x_n.$$

en remplaçant x *par* x^* *et sachant que* $f(x^*) = 0$ *on a :*

$$f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2} f''(\delta_n)(x^* - x_n)^2 = 0, \quad x^* < \delta_n < x_n.$$

en divisant par $f'(x_n)$ *on obtient*

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x^* - x_n + \frac{1}{2}\frac{f''(\delta_n)}{f'(x_n)}(x^* - x_n)^2$$

d'où

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x^* = \frac{1}{2}\frac{f''(\delta_n)}{f'(x_n)}(x^* - x_n)^2$$

par suite

$$x_{n+1} - x^* = \frac{1}{2}\frac{f''(\delta_n)}{f'(x_n)}(x^* - x_n)^2$$

en passant aux valeurs absolues on a :

$$|x_{n+1} - x^*| \le \frac{M}{2m}|x^* - x_n|^2.$$

En réitérant l'inégalité précédente on obtient :

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &\le \frac{2m}{M}\left(\frac{M}{2m}|x^* - x_0|\right)^{2^n}, \quad n = 0, 1, ... \\ &\le \frac{2m}{M}\left(\frac{M}{2m}(b - a)\right)^{2^n}, \quad n = 0, 1, ... \end{aligned}$$

donc il y a convergence vers x^* *si*

$$\frac{M}{2m}(b - a) < 1$$

4.2. **Estimation de l'erreur.** Du théorème précédent, on a :

Proposition 10. *Le reste entre l'approximé x_n et la valeur exacte x^* est donné par :*

$$|x_n - x^*| \leq \frac{2m}{M}\left(\frac{M}{2m}(b-a)\right)^{2^n}, \quad n = 0, 1, ...$$

On voit que x_n tend vers x^* de manière très rapide à cause de l'exposant 2^n, on dit que le point fixe x^* est super-attractif.