ECOLE SUPERIEURE EN SCIENCES APPLIQUEES DE TLEMCEN
ANALYSE NUMERIQUE I
EQUATIONS NON-LINEAIRES : METHODES ITERATIVES
COVID19/2021-2022

M. BELMEKKI

1. Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique d'équations nonlinéaires de type :

$$f(x) = 0, \qquad x \in [a, b].$$

où f est une fonction réelle à valeurs réelles, définie et continue sur un certain intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Il s'avère très difficil, voire impossible d'obtenir de manière explicite la solution d'une équation nonlinéaire, à titre d'exemple, considérons les équations suivantes :

$$e^x + x = 0$$

et

$$e^x - x = 0$$

Un raisonnement géométrique permet de conclure que la première équation admet exactement une solution alors que la deuxièmme n'en admet accune.
En effet. La solution de l'équation $e^x + x = 0$ peut être regardée comme point d'intersection entre le graphe de la fonction $y = e^x$ et la droite d'équation $y = -x$.
de même pour l'équation $e^x - x = 0$.

Deux questions se posent :
1. Une équation donnée, admet-elle une solution ? est-elle unique ?
2. Comment approcher cette solution ? Quelle est l'erreur commise en calculant approximativement cette solution ?

On peut utiliser le théorème qui suit pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution dans un intervalle donné.

Théorème 1. Théorème des valeurs intermédiaires.
Soit f une fonction réelle à variable réelle, définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si

$$f(a).f(b) < 0$$

alors il existe un $x^* \in [a, b]$ tel que :

$$f(x^*) = 0.$$

Si de plus f est monotone sur $[a, b]$, alors x^* est unique dans $[a, b]$.

Exemple 1. *Montrer que l'équation : $e^x - x = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[-1, 0]$. En effet.*
La fonction $f(x) = e^x + x$ est continue sur l'intervalle $[-1, 0]$.
et

$$f(-1) = e^{-1} - 1 < 0 \quad f(0) = e^0 + 0 = 1 > 0$$

de plus

$$f'(x) = e^x + 1 > 0 \quad \textit{pour tout } x \in [-1, 0]$$

donc f est strictement croissante sur $[-1, 0]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique x^* dans $[-1, 0]$ tel que $f(x^*) = 0$.

Remarque 1. *Si les conditions du théorème précédent ne sont pas vérifiées alors on ne peut rien dire quant à l'existence ou non de la solution.*
Exemple :

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-1, 1]$$

Les conditions du théorème ne sont pas vérifiées.
Cependant :

$$f(0) = 0$$

Une méthode itérative consiste à construire une suite (x_n) qui dans le cas où elle est convergente, elle converge vers la solution exacte x^* du problème. On peut dès lors estimer la solution avec une précision préalablement fixée ϵ.

Trois méthodes sont mises en exergue : la méthode de dichotomie, la méthode du point fixe et la méthode de Newton.

2. Méthode de dichotomie

2.1. **Principe de la méthode et convegence.** Cette méthode est aussi appellée méthode de la bissection, elle consiste à diviser l'intervalle $[a, b]$ en deux sous-intervalles $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ et localiser par la suite la racine suivant le signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ en se basant sur le théorème des valeurs intermédiaires.
De cette manière, on construit deux suites (a_n) et (b_n) définies par les formules de récurence :

$$a_0 = a, \qquad b_0 = b$$

si

$$f(a_n) .f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$$

alors

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

sinon

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n$$

On a la proposition suivante :

Proposition 2. *Soient (a_n) et (b_n) les suites construites précédement.*
a) Les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
b) Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$f(a_n).f(b_n) \leq 0.$$

c) Leur limite commune est la solution de l'équation donnée :

$$\lim_{n \mapsto \infty} a_n = \lim_{n \mapsto \infty} b_n = x^*$$

Preuve.
a) La suite (a_n) est croissante :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{a_n + b_n}{2} - a_n \\ &= \frac{b_n - a_n}{2} > 0, \end{aligned}$$

La suite (b_n) est alors décroissante.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{a_n + b_n}{2} - b_n \\ &= \frac{a_n - b_n}{2} < 0, \end{aligned}$$

La difference $b_n - a_n$ *tend vers* 0 *quand* $n \mapsto \infty$. *En effet,*

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - a_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2^2}(b_{n-2} - a_{n-2}) \\ &= .... \\ &= \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \to 0 \text{ lorsque } n \mapsto \infty. \end{aligned}$$

Les deux suites sont adjacentes et convergent alors vers une même limite, on la note x^*.

b) On note par c_n *le milieu de l'intevalle* $[a_n, b_n]$:

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Montrons la propriété par récurence.

Pour $n = 0$, *la propriété est évidement vraie.*

Supposons qu'elle reste vraie jusqu'à l'ordre n.

On distingue deux cas :

Si

$$f(a_n).f(c_n) \leq 0$$

alors

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{et } b_{n+1} = c_n$$

d'où

$$f(a_{n+1}).f(b_{n+1}) \leq 0.$$

Si

$$f(a_n).f(c_n) \geq 0$$

alors, forcement

$$f(c_n).f(b_n) \leq 0$$

dans le cas contraire $f(a_n)$ *et* $f(b_n)$ *auront de même signe et puisque dans ce cas*

$$a_{n+1} = c_n \quad \text{et } b_{n+1} = b_n$$

on a alors

$$f(a_{n+1}).f(b_{n+1}) \leq 0.$$

En conclusion, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

c) En faisant tendre n *vers* ∞, *on a :*

$$\lim_{n\mapsto\infty} f(a_{n+1}) . \lim_{n\mapsto\infty} f(b_{n+1}) \leq 0.$$

Sachant que f *est continue on a :*

$$f\left(\lim_{n\mapsto\infty} a_{n+1}\right).f\left(\lim_{n\mapsto\infty} b_{n+1}\right) \leq 0.$$

d'où

$$f(x^*).f(x^*) = (f(x^*))^2 \leq 0$$

ce qui implique

$$f(x^*) = 0.$$

2.2. **Evaluation de l'erreur.**

Proposition 3. *Si c_n est la n^{ieme} valeur obtenue en utilisant la procédure de Dichotomie, alors l'erreur commise en prennant c_n comme valeur apporochée de la valeur exacte x^* est donnée par :*

$$e_n = |c_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Preuve. *Soit c_n est la n^{ieme} valeur obtenue en utilisant la procédure de Dichotomie, donc*

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

où $[a_n, b_n]$ est le dernier intevalle obtenu contenant x^*.
Alors, ou bien $x^* \in [a_n, c_n]$, ou bien $x^* \in [c_n, b_n]$, et dans les deux cas, on a

$$\begin{aligned} e_n &= |c_n - x^*| \\ &\leq \frac{b_n - a_n}{2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n} \\ &= \frac{b-a}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

3. Méthode du point fixe

3.1. **Principe de la méthode et convergence.** L'idée de base de la méthode du point fixe est de réécrire l'équation $f(x) = 0$ sous une forme équivalente $x = \phi(x)$:

$$f(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = \phi(x^*)$$

x^* est dit point fixe de ϕ.

Le problème de chercher des racines de f revient alors à la recherche des points fixes de ϕ.

Remarque 2. *La fonction ϕ n'est pas unique.*
Il y a une infinité de manière pour réécrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = \phi(x)$.

Exemple 2. *Soit la fonction $f(x) = \ln(x) - \arctan(x), \quad x > 0$.*
Les zéros de f sont les points fixes de :

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= x - \ln(x) + \arctan(x). \\ \phi_2(x) &= \tan(\ln(x)). \\ \phi_3(x) &= \exp(\arctan(x)). \end{aligned}$$

La méthode du point fixe consiste à construire une suite de points $(x_n)_n$ par :

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n \geq 0.$$

avec

$$x_0 \in [a, b].$$

Définition 1. *Soit ϕ une fonction réelle à variable réelle, définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.*
ϕ est dite contractante ou contraction s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que :

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq k.|x - y|, \quad \textit{pour tout} \quad x, y \in [a, b].$$

Exemple 3. *Considérons la fonction :*

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \quad , \quad x \geq 0.$$

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| \frac{1}{x_1 + 2} - \frac{1}{x_2 + 2} \right| \\ &= \left| \frac{x_2 - x_1}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} \right| \\ &\leq \frac{1}{4}|x_2 - x_1| \end{aligned}$$

$$|x_1 + 2||x_2 + 2| \geq 4, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Définition 2. *Soit ϕ une fonction réelle à variable réelle, définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.*
L'intervalle $[a, b]$ est dit stable par la fonction ϕ si :

$$\phi(x) \in [a, b] \quad \textit{pour tout} \quad x \in [a, b]$$

Exemple 4.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

L'intervalle $[0, 1]$ est stable par f.

Théorème 4. *Soit ϕ une fonction réelle à variable réelle, définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.*
Si $[a, b]$ est stable par ϕ ; alors il existe au moins un $x^* \in [a, b]$ tel que :

$$x^* = \phi(x^*).$$

Si de plus ; ϕ est une contraction sur $[a, b]$ alors x^* est unique et :

$$\lim_{n \mapsto \infty} x_n = x^*$$

pour tout choix de x_0 dans $[a, b]$.
Preuve. *On considère la fonction*

$$h(x) = x - \phi(x), \quad x \in [a, b].$$

Alors

$$h(a) = a - \phi(a) \leq 0$$

car

$$\phi(a) \geq a$$

De même

$$h(b) = b - \phi(b) \geq 0$$

car

$$\phi(b) \leq b$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $x^* \in [a, b]$ tel que

$$h(x^*) = x^* - \phi(x^*) = 0$$

d'où

$$x^* = \phi(x^*).$$

Pour montrer l'unicité de x^*, on suppose que ϕ admet un autre point fixe $\overline{x} \in [a, b]$, on a alors

$$\begin{aligned} |x^* - \overline{x}| &= |\phi(x^*) - \phi(\overline{x})| \\ &\leq k|x^* - \overline{x}| \end{aligned}$$

où k est le rapport de contraction de f.
d'où

$$(1 - k)|x^* - \overline{x}| \leq 0.$$

puisque $k < 1$ alors :

$$|x^* - \overline{x}| = 0.$$

par suite

$$x^* = \overline{x}.$$

Montrons que la suite (x_n) *converge vers* x^*. *Pour tout* $n \geq 1$ *On a*

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |\phi(x_{n-1}) - \phi(x^*)| \\ &\leq k|x_{n-1} - x^*| \end{aligned}$$

ainsi de proche en proche, on a :

$$|x_n - x^*| \leq k^n |x_0 - x^*|$$

or $0 < k < 1$ *donc*

$$\lim_{n\to\infty} k^n = 0$$

par suite

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

Dans le cas où la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ on a le théorème suivant :

Théorème 5. *Soit* ϕ *une fonction réelle à variable réelle, de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a, b]$.
Supposons que l'intervalle $[a, b]$ *est stable par* ϕ.
Si pour tout $x \in [a, b]$, *Il exite une constante* k, $0 < k < 1$ *telle que*

$$|\phi'(x)| \leq k < 1$$

alors x^* *est unique dans* $[a, b]$ *et*

$$\lim_{n\mapsto\infty} x_n = x^*$$

pour tout choix de x_0 *dans* $[a, b]$.
Preuve. *La fonction* ϕ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a, b]$, *d'après le théorème des accroissements finis, il existe un* $\xi \in [a, b]$ *tel que :*

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi'(\xi)(x - y)$$

donc

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |\phi'(\xi)||x - y|$$

par suite

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq k.|x - y|$$

il s'en suit que les conditions du théorème 4 sont satisfaites.

Remarque 3. *Dans le cas où*

$$|\phi'(x)| > 1, \quad x \in [a, b]$$

alors

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x^*| &= |\phi(x_n) - \phi(x^*)| \\ &= |\phi'(\xi)|.|x_n - x^*| \\ &> |x_n - x^*| \end{aligned}$$

donc, quand n *augmente, le point* x_n *s'éloigne de* x^* *et la procédure est alors divergente.*

Remarque 4. *Dans le cas où*

$$|\phi'(x)| > 1, \quad x \in [a, b]$$

on peut utiliser la procédure

$$x_{n+1} = \psi(x_n)$$

où

$$\psi(x) = \phi^{-1}(x).$$

Dans ce cas la convergence n'est pas assurée sur tout l'intervalle $[a, b]$.

3.2. **Estimation de l'erreur.**

Proposition 6. *Supposons que la procédure du point fixe est convergente, alors :*

$$|x_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1|, \quad n \geq 1.$$

x_0 *une condition initiale donnée et* $x_1 = \phi(x_0)$.

Preuve. *On a :*

$$|x_n - x^*| \leq k^n |x_0 - x^*|, \quad n \geq 1.$$

pour $n = 1$*, on obtient*

$$|x_1 - x^*| \leq k|x_0 - x^*|$$

or

$$\begin{aligned} |x_0 - x^*| &= |x_0 - x_1 + x_1 - x^*| \\ &\leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x^*| \\ &\leq |x_0 - x_1| + k|x_0 - x^*| \end{aligned}$$

par suite

$$|x_0 - x^*| \leq \frac{1}{1-k}|x_0 - x_1|$$

d'où

$$|x_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_0 - x_1|$$

Remarque 5. *Pour deux méthodes itératives convergentes, la méthode la plus rapide est celle qui a le rapport de contraction le plus petit.*

Remarque 6. *Dans la preuve du théorème précédent, on a utilisé le théorème des accroissements finis, en ce qui suit l'énnoncé :*

Théorème 7. *Pour toute fonction* f *définie et continue sur un intervalle fermé* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *et dérivable sur l'intervalle ouvert* $]a, b[$*, il existe au moins une constante* ξ *dans* $]a, b[$ *telle que :*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

4. Méthode de Newton