ECOLE SUPERIEURE EN SCIENCES APPLIQUEES DE TLEMCEN
ANALYSE NUMERIQUE I
EQUATIONS NON-LINEAIRES : METHODES ITERATIVES
COVID19/2020-2021

M. BELMEKKI

1. Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique d'équations nonlinéaires de type :

$$f(x) = 0, \qquad x \in [a, b].$$

où f est une fonction réele à valeurs réelles, définie et continue sur un certain intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Il s'avère très difficil, voire impossible d'obtenir de manière explicite la solution d'une équation nonlinéaire, à titre d'exemple, considérons les équations suivantes :

$$e^x + x = 0$$

et

$$e^x - x = 0$$

Un raisonnement géométrique permet de conclure que la première équation admet exactement une solution alors que la deuxièmme n'en admet accune.

On peut utiliser le théorème qui suit pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution dans un intervalle donné.

Théorème 1. Théorème des valeurs intermédiaires.
Soit f une fonction réelle à variable réelle, définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si

$$f(a).f(b) < 0$$

alors il existe un $x^* \in [a, b]$ tel que :

$$f(x^*) = 0.$$

Si de plus f est monotone sur $[a, b]$, alors x^* est unique dans $[a, b]$.

Exemple 1. *Montrer que l'équation : $e^x + x = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[-1, 0]$. En effet.*
La fonction $f(x) = e^x + x$ est continue sur l'intervalle $[-1, 0]$.
et

$$f(-1) = e^{-1} - 1 < 0 \quad f(0) = e^0 + 0 = 1 > 0$$

de plus

$$f'(x) = e^x + 1 > 0 \quad \textit{pour tout } x \in [-1, 0]$$

donc f est strictement croissante sur $[-1, 0]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique x^* dans $[-1, 0]$ tel que $f(x^*) = 0$.

Une méthode itérative consiste à construire une suite (x_n) qui dans le cas où elle est convergente, elle converge vers la solution exacte x^* du problème. On peut dès lors estimer la solution quand elle existe, avec une précision préalablement fixée ϵ.

Trois méthodes sont mises en exergue : la méthode de dichotomie, la méthode du point fixe et la méthode de Newton.

2. Méthode de dichotomie

2.1. **Principe de la méthode et convegence.** Cette méthode est aussi appellée méthode de la bissection, elle consiste à diviser l'intervalle $[a, b]$ en deux sous-intervalles $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ et localiser par la suite la racine suivant le signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ en se basant sur le théorème des valeurs intermédiaires.
De cette manière, on construit deux suites (a_n) et (b_n) définies par les formules de récurence :

$$a_0 = a, \qquad b_0 = b$$

si

$$f(a_n) . f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$$

alors

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

sinon

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n$$

On a la proposition suivante :

Proposition 2. *Soient (a_n) et (b_n) les suites construites précédement.*
a) Les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
b) Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$f(a_n).f(b_n) \leq 0.$$

c) Leur limite commune est la solution de l'équation donnée :

$$\lim_{n \mapsto \infty} a_n = \lim_{n \mapsto \infty} b_n = x^*$$

Preuve.
a) La suite (a_n) est croissante :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{a_n + b_n}{2} - a_n \\ &= \frac{b_n - a_n}{2} > 0, \end{aligned}$$

La suite (b_n) est alors décroissante.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{a_n + b_n}{2} - b_n \\ &= \frac{a_n - b_n}{2} < 0, \end{aligned}$$

La difference $b_n - a_n$ tend vers 0 quand $n \mapsto \infty$. En effet,

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - a_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2^2}(b_{n-2} - a_{n-2}) \\ &= .... \\ &= \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \to 0 \text{ lorsque } n \mapsto \infty. \end{aligned}$$

Les deux suites sont adjacentes et convergent alors vers une même limite, on la note x^*.

b) On note par c_n le milieu de l'intevalle $[a_n, b_n]$:

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Montrons la propriété par récurence.

Pour $n = 0$, la propriété est évidement vraie.

Supposons qu'elle reste vraie jusqu'à l'ordre n.

On distingue deux cas :

Si

$$f(a_n) . f(c_n) \leq 0$$

alors

$$a_{n+1} = a_n \quad et\ b_{n+1} = c_n$$

d'où

$$f(a_{n+1}) . f(b_{n+1}) \leq 0.$$

Si

$$f(a_n) . f(c_n) \geq 0$$

alors, forcement

$$f(c_n) . f(b_n) \leq 0$$

dans le cas contraire $f(a_n)$ et $f(b_n)$ auront de même signe et puisque dans ce cas

$$a_{n+1} = c_n \quad et\ b_{n+1} = b_n$$

on a alors

$$f(a_{n+1}) . f(b_{n+1}) \leq 0.$$

En conclusion, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

c) En faisant tendre n vers ∞, on a :

$$\lim_{n \mapsto \infty} f(a_{n+1}) . \lim_{n \mapsto \infty} f(b_{n+1}) \leq 0.$$

Sachant que f est continue on a :

$$f\left(\lim_{n \mapsto \infty} a_{n+1}\right) . f\left(\lim_{n \mapsto \infty} b_{n+1}\right) \leq 0.$$

d'où

$$f(x^*) . f(x^*) = (f(x^*))^2 \leq 0$$

ce qui implique

$$f(x^*) = 0.$$

2.2. **Evaluation de l'erreur.**

Proposition 3. *Si c_n est la n^{ieme} valeur obtenue en utilisant la procédure de Dichotomie, alors l'erreur commise en prennant c_n comme valeur apporochée de la valeur exacte x^* est donnée par :*

$$e_n = |c_n - x^*| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

Preuve. Soit c_n est la n^{ieme} valeur obtenue en utilisant la procédure de Dichotomie, donc

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

où $[a_n, b_n]$ est le dernier intevalle obtenu contenant x^*.
Alors, ou bien $x^* \in [a_n, c_n]$, ou bien $x^* \in [c_n, b_n]$, et dans les deux cas, on a

$$\begin{aligned} e_n &= |c_n - x^*| \\ &\leq \frac{b_n - a_n}{2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n} \\ &= \frac{b-a}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

3. Méthode du point fixe