

**ECOLE SUPERIEURE EN SCIENCES APPLIQUEES DE TLEMCEN**  
**ANALYSE NUMERIQUE II**  
**EQUATIONS DIFFERENTIELLES : METHODES NUMERIQUES**  
**COVID19/2020-2021**

M. BELMEKKI

1. INTRODUCTION

On s'intéresse en ce qui suit à la résolution par des méthodes numériques du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y), \quad x \in [a, b] \\ y(a) &= y_0\end{aligned}$$

$(a, y_0)$  étant la condition initiale, la valeur  $y_0$  est une donnée du problème.  
On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  parties égales à l'aide des points

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

en utilisant un pas constant

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}.$$

Trois méthodes seront mis en exergue : La méthode d'Euler, la méthode de Taylor et les méthodes de Ruge-Kutta.

2. MÉTHODE D'EULER

Introduisons les notations suivantes :

$$\Delta x = x_1 - x_0 = \dots = x_n - x_{n-1} = h, \quad h \text{ constante}$$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

En chaccun des points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , on remplace la dérivée  $\frac{dy}{dx}$  par le rapport des différences finies  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , on obtient alors l'équation approchée suivante :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y)$$

au point  $x_0$  on obtient :

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0)$$

d'où

$$\Delta y_0 = f(x_0, y_0) \Delta x$$

par suite

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

au point  $x_1$  on obtient :

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x} = f(x_1, y_1)$$

donc

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

et de proche en proche on construit la suite  $(y_k)_k$  par :

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad 0 \leq k \leq n-1 \tag{1}$$

qu'on appellera formule d'Euler.

**Exemple 1.** Trouver la valeur approchée en  $x = 1$  de la solution du problème

$$\frac{dy}{dx} = -y + x + 1, \quad y(0) = 1$$

**Réponse.**

La solution exacte du problème est :

$$y(x) = e^{-x} + x$$

La valeur exacte au point  $x = 1$  est  $y(1) = e^{-1} + 1 = 1.367879$ .

Pour la résolution numérique, choisissons un pas  $h = 0.1$ .

Dans notre cas :  $a = x_0 = 0$ ,  $y(0) = y_0 = 1$  et  $y(1)$  correspond alors à  $y_{10}$ .

La formule d'Euler s'écrit :

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + 0.1(-y_k + x_k + 1) \\ &= 0.9 y_k + 0.1 x_k + 0.1 \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient les différentes valeurs de  $y_k$

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.9(1) + 0.1(0) + 0.1 = 1 \\ y_2 &= 0.9(1) + 0.1(0.1) + 0.1 = 1.01 \\ y_3 &= 0.9(1.01) + 0.1(0.2) + 0.1 = 1.029 \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

En tout point  $x_k$  on peut évaluer l'erreur absolue commise entre la valeur exacte  $y(x_k)$  et la valeur approchée  $y_k$ .

On formule les résultats obtenus dans le tableau suivant :

$x_k$	$y(x_k)$	$y_k$	$ y(x_k) - y_k $
0.0	1.000000	1.000000	0.000000
0.1	1.004837	1.000000	0.004837
0.2	1.018731	1.010000	0.008731
0.3	1.040818	1.029000	0.011818
0.4	1.070320	1.056100	0.014220
0.5	1.106531	1.090490	0.016041
0.6	1.148812	1.131441	0.017371
0.7	1.196585	1.178297	0.018288
0.8	1.249329	1.230467	0.018862
0.9	1.306570	1.287420	0.019150
1.0	1.367879	1.348678	0.019201

On remarque qu'à chaque étape, l'erreur absolue augmente sensiblement.

### 3. MÉTHODE DE TAYLOR

Une première façon d'améliorer la méthode d'Euler est d'utiliser un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} y(x_{k+1}) &= y(x_k) + (x_{k+1} - x_k)y'(x_k) + \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)^2 y''(x_k) + \frac{1}{6}(x_{k+1} - x_k)^3 y'''(\xi_k) \\ x_k &\leq \xi_k \leq x_{k+1} \end{aligned}$$

si  $h = x_{k+1} - x_k$  est assez petit on a l'égalité approchée :

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_k)$$

or

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

en dérivant on obtient :

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) f(x, y(x))$$

d'où la procédure de Taylor :

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) f(x_k, y_k) \right] \quad (2)$$

**Exemple 2.** Trouver la valeur approchée en  $x = 1$  de la solution du problème

$$\frac{dy}{dx} = -y + x + 1, \quad y(0) = 1$$

**Réponse.**

La solution exacte du problème est :

$$y(x) = e^{-x} + x$$

La valeur exacte au point  $x = 1$  est  $y(1) = e^{-1} + 1 = 1.367879$ .

Pour la résolution numérique, choisissons un pas  $h = 0.1$ .

Dans notre cas :  $a = x_0 = 0$ ,  $y(0) = y_0 = 1$  et  $y(1)$  correspond alors à  $y_{10}$ .

La formule de Taylor s'écrit :

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) f(x_k, y_k) \right]$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1$$

d'où

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h(-y_k + x_k + 1) + \frac{h^2}{2} (1 - (-y_k + x_k + 1)) \\ &= y_k + h \left[ \left( \frac{h}{2} - 1 \right) y_k + \left( 1 - \frac{h}{2} \right) x_k + 1 \right] \end{aligned}$$

On formule les résultats obtenus dans le tableau suivant :

$x_k$	$y(x_k)$	$y_k$	$ y(x_k) - y_k $
0.0	1.000000	1.000000	0.000000
0.1	1.004837	1.005000	0.000163
0.2	1.018731	1.019025	0.000294
0.3	1.040818	1.041218	0.000400
0.4	1.070320	1.070802	0.000482
0.5	1.106531	1.107075	0.000544
0.6	1.148812	1.149404	0.000592
0.7	1.196585	1.197210	0.000625
0.8	1.249329	1.249975	0.000646
0.9	1.306570	1.307228	0.000658
1.0	1.367879	1.368541	0.000662

On remarque qu'à chaque étape, l'erreur absolue augmente sensiblement.

On remarque aussi, que pour le même pas  $h$  la méthode de Taylor est nettement plus précise que celle d'Euler.

#### 4. MÉTHODES DE RUNGE-KUTTA

Le problème avec la méthode de Taylor est qu'il faut à chaque étape, calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . Les méthodes de Runge-Kutta permettent de contourner cet inconveignant. Ces méthodes sont basées sur l'utilisation du développement de Taylor des fonctions à deux variables :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \left[ (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ (x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right. \\ &+ \left. (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right] + \dots \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i (x - x_0)^{n+1-i} (y - y_0)^i \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-i} \partial y^i}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}x_0 &\leq \xi \leq x \\ y_0 &\leq \eta \leq y\end{aligned}$$

Ils existent plusieurs méthodes de Runge-Kutta, nous mettons en exergue trois méthodes.

**4.1. Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2.** L'idée est de remplacer dans la procédure de Taylor (2) le terme :

$$f(x_k, y_k) + \frac{h}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) f(x_k, y_k) \right]$$

par une expression de type :

$$\delta_1 f(x_k, y_k) + \delta_2 f(x_k + \delta_3 h, y_k + \delta_4 h)$$

En utilisant le développement de Taylor à 2 variables et jusqu'à l'ordre 2 et après identification, on obtient un système non linéaire de 3 équations avec 4 inconnues :

$$\begin{aligned}\delta_1 + \delta_2 &= 1 \\ \delta_2 \delta_3 &= 1/2 \\ \delta_2 \delta_4 &= \frac{1}{2} f(x_k, y_k)\end{aligned}\tag{3}$$

Le système n'admet pas de solution unique, on propose alors, les deux méthodes les plus courantes.

a) **Méthode d'Euler modifiée**

Elle correspond à la solution du système (3) suivante :

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2}, \quad \delta_3 = 1, \quad \delta_4 = f(x_k, y_k)$$

La procédure d'Euler modifiée s'écrit alors :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))]$$

b) **Méthode du point milieu**

Elle correspond à la solution du système (3) suivante :

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 = \frac{1}{2}, \quad \delta_4 = \frac{1}{2} f(x_k, y_k)$$

La procédure d'Euler modifiée s'écrit alors :

$$y_{k+1} = y_k + hf \left( x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k) \right)$$

**4.2. Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4.** Les méthodes précédentes, d'Euler modifiée et celle du point milieu sont toutes les deux du même ordre que celle de Taylor d'ordre deux. On peut améliorer ces méthodes en utilisant un développement de Taylor à deux variables jusqu'à l'ordre 5, on obtient alors la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Elle s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\delta_1 &= hf(x_k, y_k) \\ \delta_2 &= hf \left( x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{\delta_1}{2} \right) \\ \delta_3 &= hf \left( x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{\delta_2}{2} \right) \\ \delta_4 &= hf(x_k + h, y_k + \delta_3) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{6} (\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3 + \delta_4)\end{aligned}$$

**Exemple 3.** En utilisant la procédure de Runge-Kutta d'ordre 4, Trouver la valeur approchée en  $x = 1$  de la solution du problème

$$\frac{dy}{dx} = -y + x + 1, \quad y(0) = 1$$

La solution exacte du problème est :

$$y(x) = e^{-x} + x$$

La valeur exacte au point  $x = 1$  est  $y(1) = e^{-1} + 1 = 1.367879$ .

Pour la résolution numérique, choisissons un pas  $h = 0.1$ .

Dans notre cas :  $a = x_0 = 0$ ,  $y(0) = y_0 = 1$  et  $y(1)$  correspond alors à  $y_{10}$ .

Pour calculer  $x_1$ , on doit calculer les  $\delta_i$  correspondants :

$$\delta_1 = 0.1f(0, 1) = 0$$

$$\delta_2 = 0.1f(0 + 0.05, 1 + 0) = 0.005$$

$$\delta_3 = 0.1f(0 + 0.05, 1 + 0.0025) = 0.00475$$

$$\delta_4 = 0.1f(0 + 0.1, 1 + 0.00475) = 0.009525$$

d'où

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0 + 2 * 0.005 + 2 * 0.0045 + 0.009525) = 1.0048375$$

De même, on calcule les  $y_k$  restants.

On rassemble les résultats dans le tableau suivant :

$x_k$	$y(x_k)$	$y_k$	$ y(x_k) - y_k $
0.0	1.000000	1.000000	0.000000
0.1	1.0048374180	1.0048375000	$0.082 * 10^{-6}$
0.2	1.0187307798	1.0187309014	$0.148 * 10^{-6}$
0.3	1.0408182207	1.0408184220	$0.210 * 10^{-6}$
0.4	1.0703200460	1.0703202889	$0.242 * 10^{-6}$
0.5	1.1065306597	1.1065309344	$0.274 * 10^{-6}$
0.6	1.1488116361	1.1488119343	$0.298 * 10^{-6}$
0.7	1.1965853034	1.1965856186	$0.314 * 10^{-6}$
0.8	1.2493289641	1.2493292897	$0.325 * 10^{-6}$
0.9	1.3065696598	1.3065799912	$0.331 * 10^{-6}$
1.0	1.3678794412	1.3678797744	$0.333 * 10^{-6}$

On remarque qu'à chaque étape, l'erreur absolue augmente sensiblement.

On remarque aussi, que pour le même pas  $h$ , la méthode de Runge-Kutta est nettement plus précise que les méthodes précédentes. La précision est de l'ordre de  $10^{-6}$ .

Il est à noter aussi que, pour le même  $h$ , plus la méthode est précise, plus elle nécessite un nombre d'opérations élémentaires plus élevé et donc un temps d'exécution plus grand.

Dans la suite, on reprend le même exemple avec des pas différents, On calcule la valeur approchée de  $y(1)$  par différentes méthodes, on rassemble les résultats dans le tableau suivant :

Méthode	$h$	Nombre de pas	Valeur approchée	Erreur
Euler	0.025	40	1.36323237417	$0.464 * 10^{-2}$
Euler modifiée	0.05	20	1.36803862167	$0.159 * 10^{-3}$
Runge-Kutta	0.1	10	1.36787977441	$0.333 * 10^{-6}$

On remarque que la méthode de Runge-Kutta reste plus précise même avec un pas 2 fois plus grand que celui d'Euler modifiée et 4 fois plus grand que celui d'Euler.

La méthode de Runge-Kutta reste la méthode la plus utilisée pour la résolution numérique des équations différentielles ordinaires.