

Chapitre 5: La flexion simple

5.1 Introduction

On dit qu'on a une flexion quand il se développe un moment fléchissant (ou moment de flexion) au niveau des sections droites de la barre, le moment ayant pour tendance à faire tourner les sections autour de l'un des deux axes de leur plan (M_{fy} ou M_{fz}).

flexion pure : Quand seul le moment fléchissant est différent de zéro et les autres facteurs sont nuls ($N = 0$; $T = 0$; $M_f \neq 0$ et $M_t = 0$).

flexion simple : Si le moment fléchissant M_f est accompagné d'un effort tranchant T ($N = 0$; $T \neq 0$; $M_f \neq 0$ et $M_t = 0$).

L'effort tranchant T est la composante de l'effort intérieur se développant dans une section droite suivant l'un des deux axes du plan de cette section (T_y ou T_z).

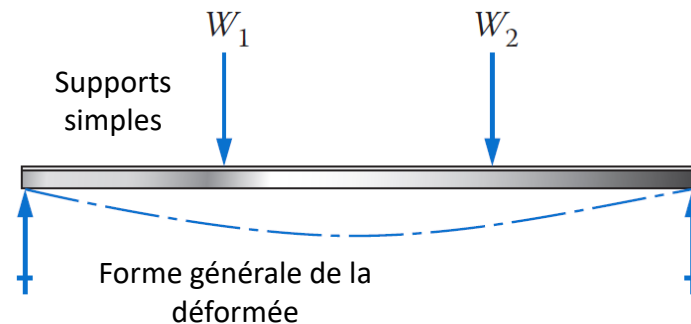


Figure. 1: Poutre en flexion

5.2 Relations entre les efforts intérieurs et les charges

Considérons une poutre soumise a une charge répartie quelconque d'intensité variable $q(x)$ (voir figure 2), découpons un élément de longueur dx , on peut admettre qu'a l'intérieur de ce petit segment la charge est répartie uniformément, a ses deux extrémités se développent respectivement les efforts (T, M) et $(T + dT, M + dM)$.

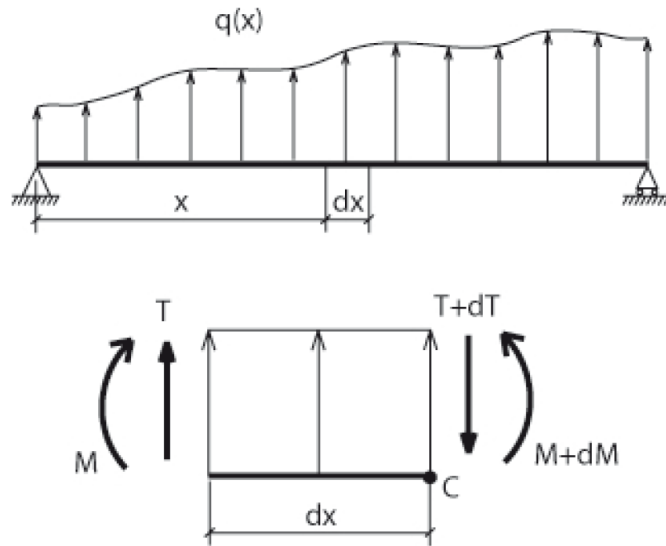


Figure. 2: Relation entre les efforts intérieurs et les charges

Etablissons les deux équations de l'équilibre statique de ce segment :

$$\sum F_y = T + q \, dx - T - dT = 0$$

$$\sum M(F)_c = M + T \, dx + q \, dx \frac{dx}{2} - M - dM = 0$$

Après simplification et en éliminant le terme infiniment petit du second ordre dx^2 de la seconde équation, on obtient les relations suivantes :

$$q = \frac{dT}{dx} \text{ et } T = \frac{dM}{dx}$$

Si la distance définissant la position de la section est définie par rapport à une origine située à droite de la section, la relation entre T et M devient négative ($T = \frac{-dM}{dx}$).

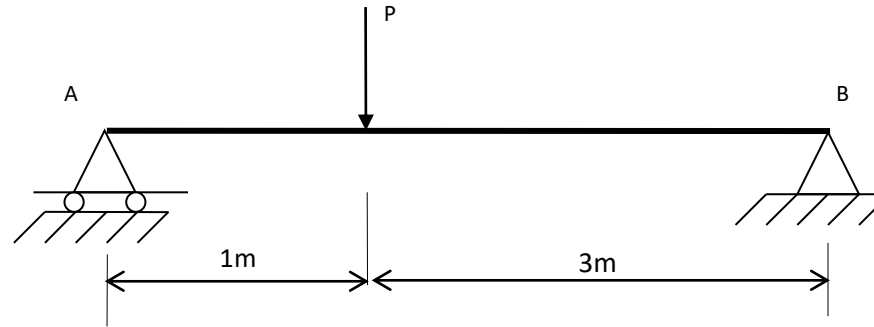
Remarques :

De ces deux dernières relations nous pouvons tirer les remarques suivantes qui nous serviront de moyen de vérification des lois de variation de l'effort tranchant T et du moment fléchissant M obtenues par l'applications de la méthode des sections :

- Si dans un tronçon de la poutre il n'y a pas de charge répartie $q = 0$ alors la fonction T est constante et la fonction M est linéaire.
- Si la charge répartie $q = \text{constante}$ alors la fonction T est linéaire et la fonction M est quadratique.
- Si la charge répartie est linéaire (triangulaire ou trapézoïdale) $q(x) = q_0 x + b$ alors la fonction T est quadratique et la fonction M est cubique.
- Aux points d'application des forces concentrées le diagramme de T présente un saut correspondant à la valeur de la force extérieure, et le diagramme des moments M présente un point anguleux (discontinuité de la dérivée).
- Aux points d'application des moments extérieurs concentrés le diagramme des moments M présente un saut correspondant à la valeur du moment extérieur.
- Aux extrémités d'une poutre les efforts tranchants sont égaux aux forces extérieures (ou éventuellement la réaction d'appui) appliquées en ces points.
- Aux extrémités d'une poutre les moments fléchissants sont égaux aux moments extérieurs concentrés (ou éventuellement le moment d'encastrement) en ces points.

Exemple 1

1. Déterminer les réactions aux appuis A et B de la poutre représenté dans la figure suivante:

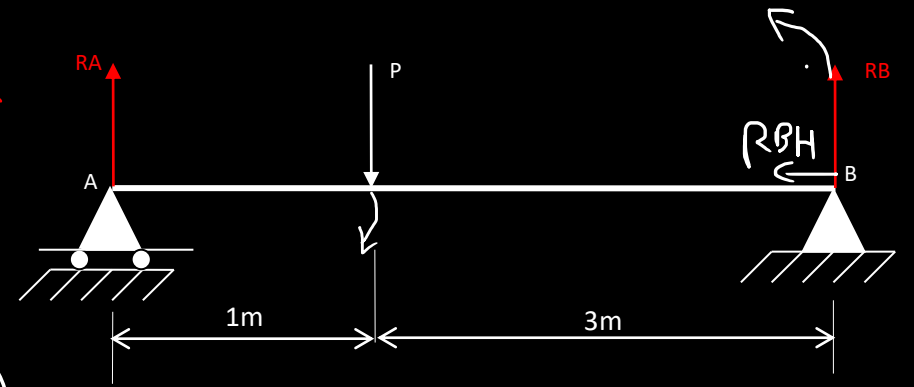
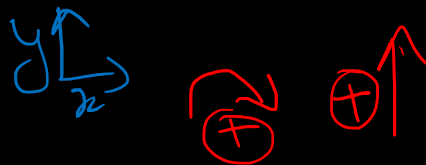


2. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant T et du moment fléchissant M_f de cette poutre.

On donne $P=1000$ daN

1. Calcul des réactions

$$N=0$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - P = 0$$

$$\Rightarrow R_A + R_B = 1000 \text{ daN} \dots (1)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P \cdot (1) - R_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_B = \frac{P}{4}$$

$$\Rightarrow R_B = 250 \text{ daN}$$

on remplace R_B dans l'eqt(1)

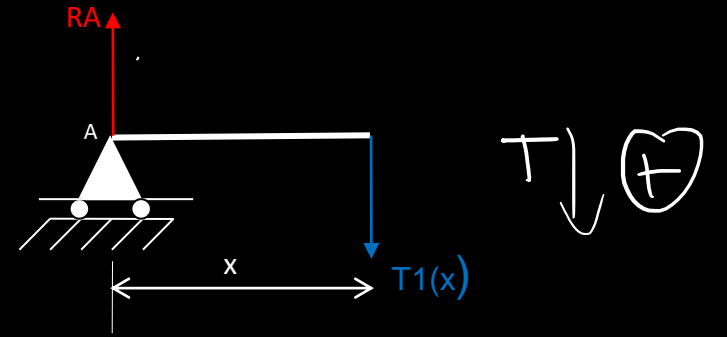
$$R_A = -R_B + P \Rightarrow R_A = 750 \text{ daN}$$

2. Variation des efforts tranchants (T) et des moments fléchissant (M_f)

Efforts tranchants T(x)

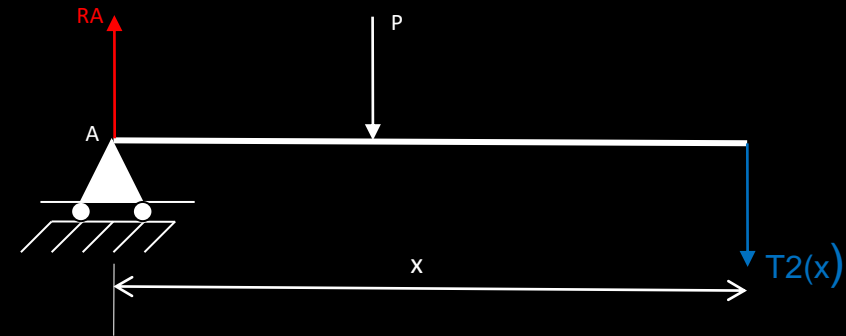
Section 1

$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow T_1(x) - RA = 0$$
$$\Rightarrow T_1(x) = 750 \text{ daN}$$



Section 2

$$T_2(x) - RA + P = 0 \Rightarrow T_2(x) = RA - P$$
$$\Rightarrow T_2(x) = -250 \text{ daN}$$



Moments fléchissant $M_f(x)$



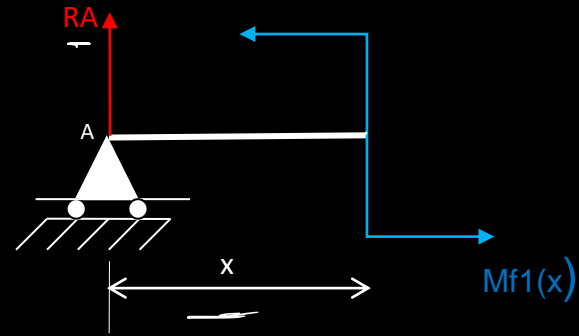
Section 1

$$M_{f_1}(x) - RA \cdot x = 0$$

$$M_{f_1}(x) = RA \cdot x$$

$$\text{si } x = 0 \Rightarrow M_{f_1}(x) = 0$$

$$\text{si } x = 1 \Rightarrow M_{f_1}(x) = 750 \text{ daN} \cdot \text{m}$$

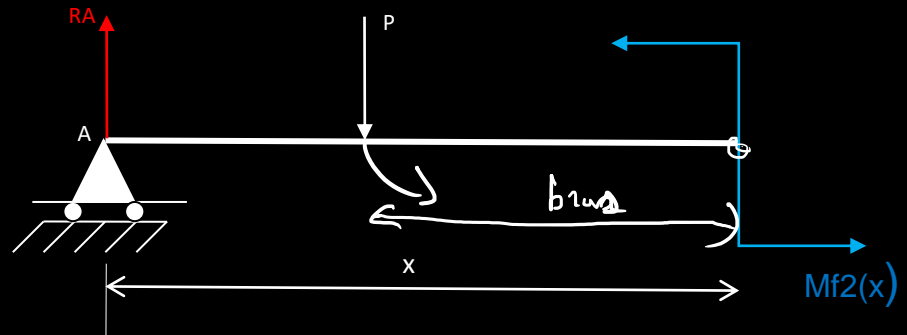


Section 2

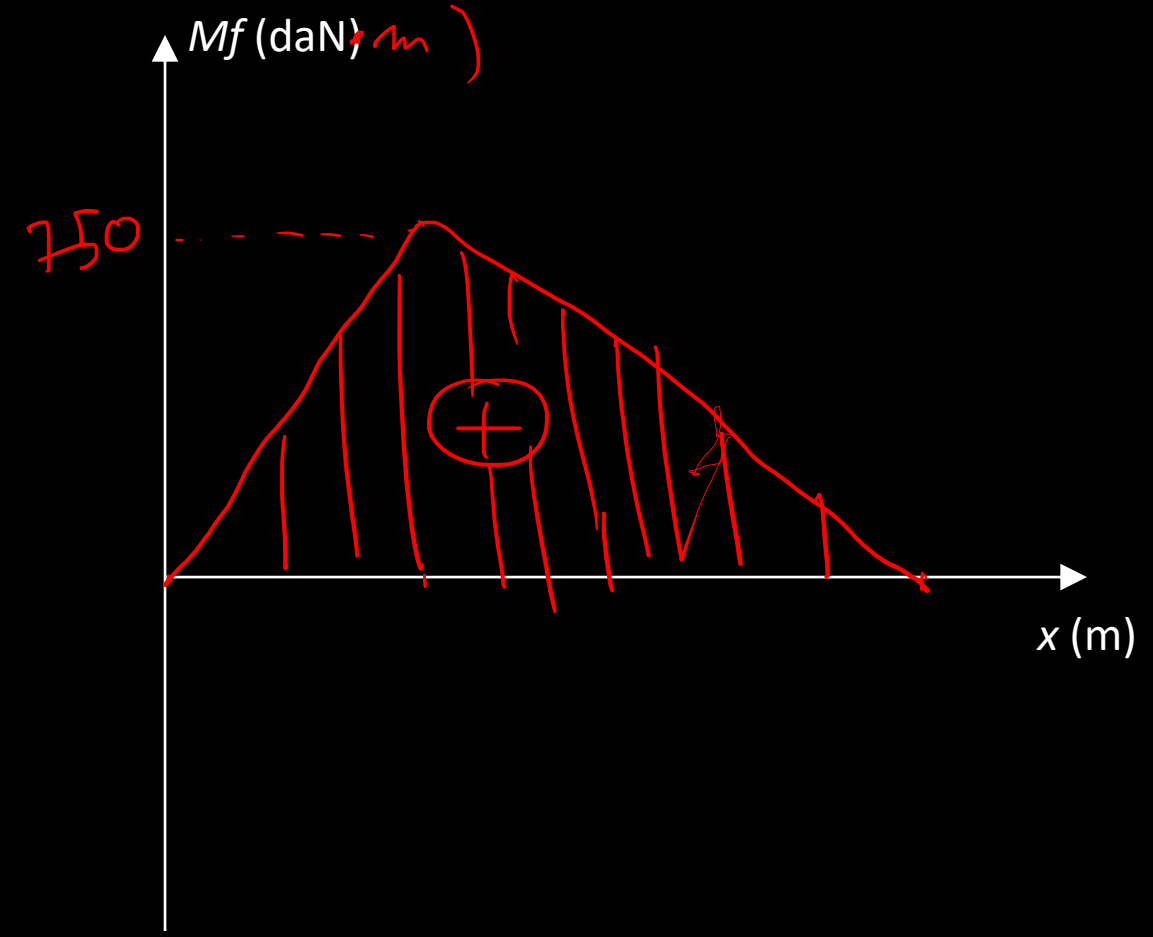
$$M_{f_2}(x) - RA \cdot x + P(x-1) = 0$$

$$M_{f_2}(x) = 750 \cdot x - 1000(x-1)$$

$$\text{si } x = 1 \Rightarrow M_{f_2}(x) = 750 \text{ daN} \cdot \text{m} \quad \text{si } x = 4 \Rightarrow M_{f_2}(x) = 750(4) - 1000(3)$$
$$M_{f_2}(x) = 0$$



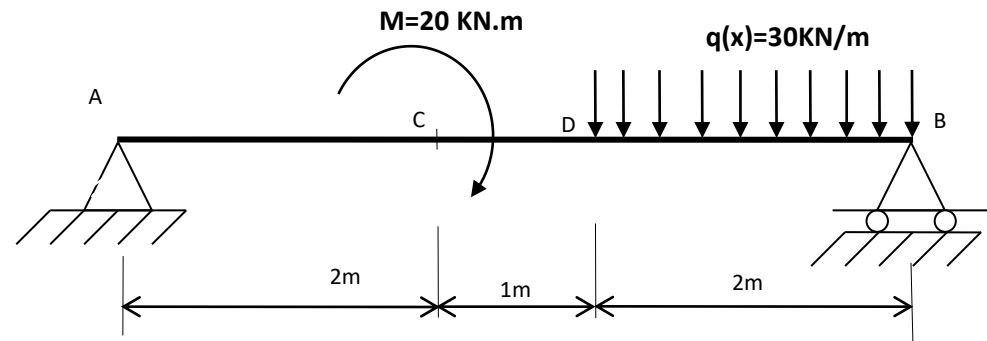
Diagrammes efforts tranchants et moments fléchissant



Exemple 2

Soit la figure suivante

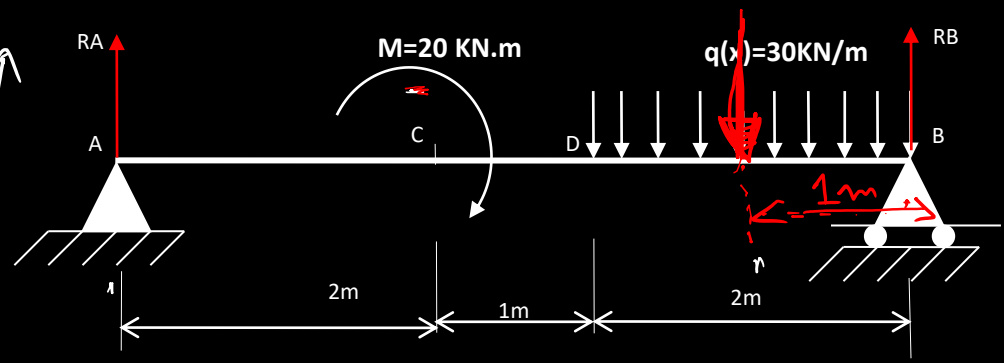
1. Calculer les réactions des efforts aux appuis
2. Etudier la variation des efforts tranchants (T) et des moments fléchissant (M_f)
3. Calculer le moment fléchissant maximal (M_{fmax})



1. Calcul des réactions

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - q(2) = 0$$

$$\Rightarrow R_A + R_B = 60 \text{ kN} \quad (1)$$



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M + q(2)(4) - R_B(5) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{M + q(2)(4)}{5}$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{20 + 30(8)}{5} \Rightarrow \boxed{R_B = 52 \text{ kN}}$$

on remplace R_B dans l'éq(1)

$$R_A = 60 - 52 \Rightarrow \boxed{R_A = 8 \text{ kN}}$$

1. variation des efforts tranchants (T) et des moments fléchissant (M_f)

Efforts tranchants T(x)

Section 1

$$-R_A + T_1(x) = 0 \Rightarrow T_1(x) = 8 \text{ kN}$$

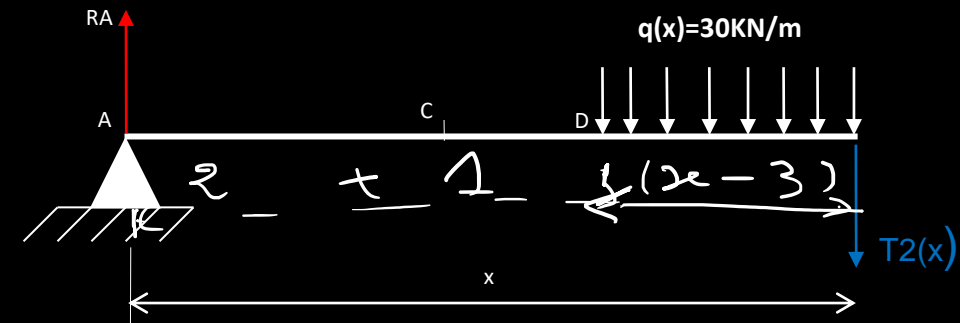
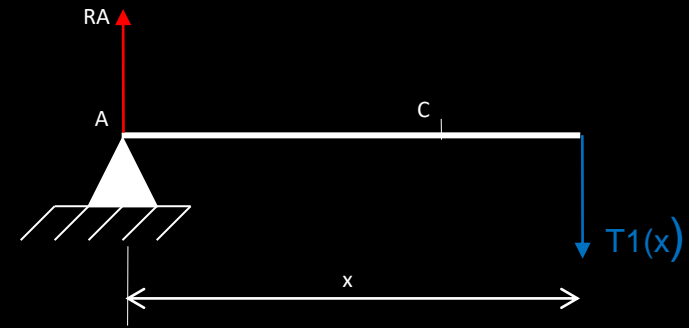
Section 2

$$T_2(x) - R_A + q(x-3) = 0$$

$$T_2(x) = R_A - q(x-3)$$

$$\text{si } x = 3 \Rightarrow T_2(x) = 8 \text{ kN}$$

$$\text{si } x = 5 \Rightarrow T_2(x) = -52 \text{ kN}$$



Moments fléchissant $M_f(x)$

Section 1

$$M_{f_1}(x) - R_A \cdot x \Rightarrow M_{f_1}(x) = 8 \cdot x$$

$$\text{si } x = 0 \Rightarrow M_{f_1}(x) = 0$$

$$\text{si } x = 2 \Rightarrow M_{f_1}(x) = 16 \text{ kN.m}$$

Section 2

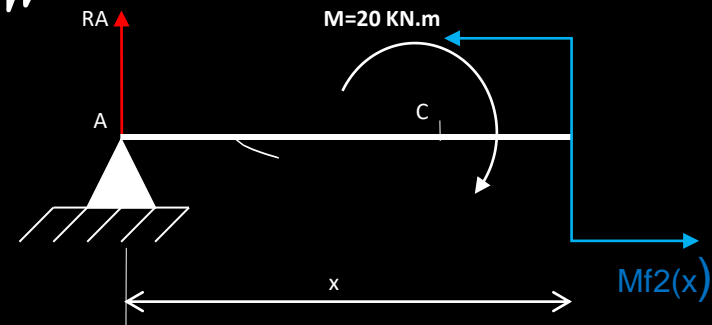
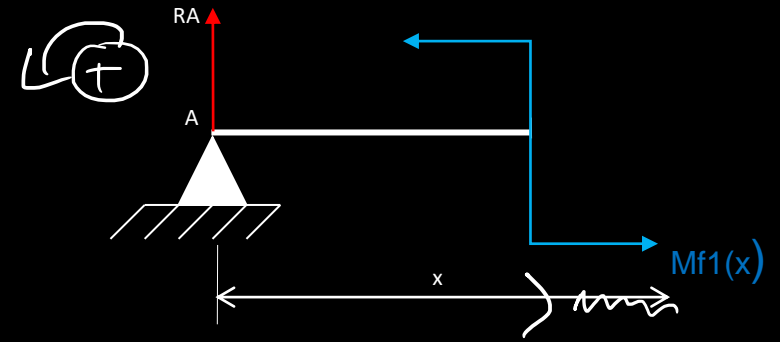
$$M_{f_2}(x) - R_A \cdot x - M = 0$$

$$M_{f_2}(x) = R_A \cdot x + M$$

$$M_{f_2}(x) = 8x + 20$$

$$\text{si } x = 2 \Rightarrow M_{f_2}(x) = 36 \text{ kN.m}$$

$$\text{si } x = 3 \Rightarrow M_{f_2}(x) = 44 \text{ kN.m}$$



Moments fléchissant $M_f(x)$

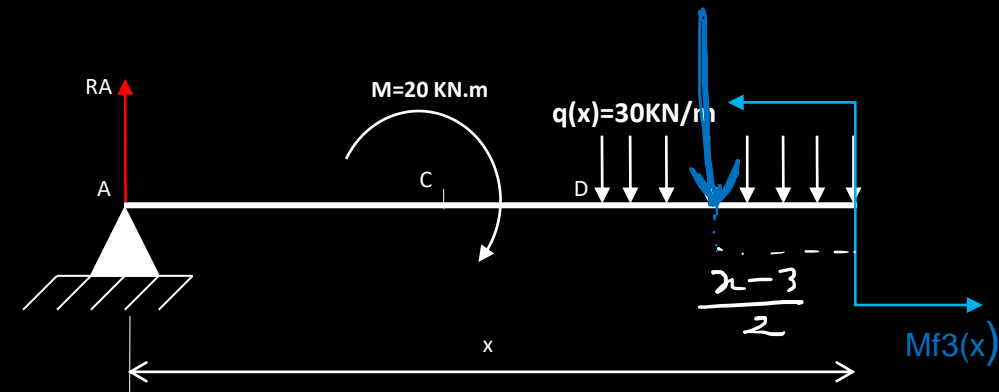
Section 3

$$M_{f_3}(x) - R_A \cdot x - M + q \frac{(x-3)(x-3)}{2} = 0$$

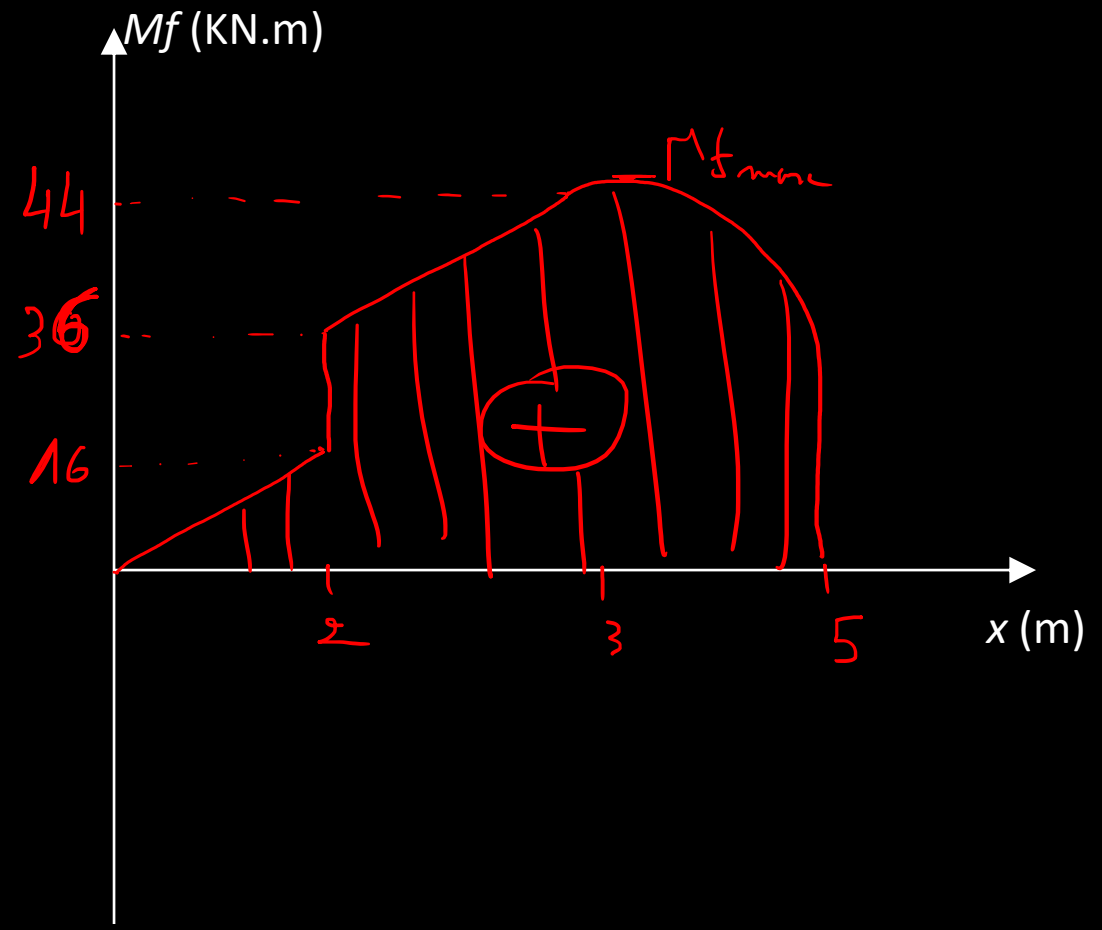
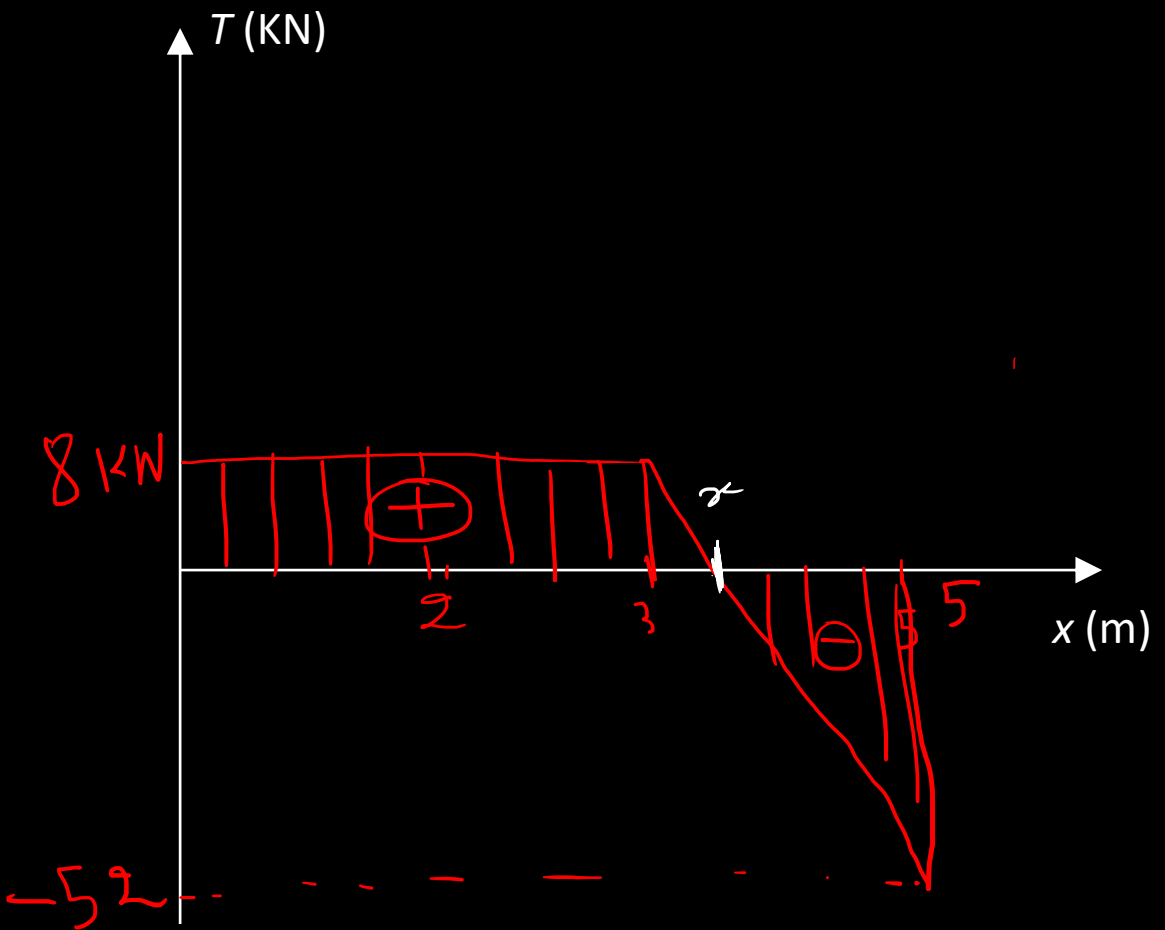
$$M_{f_3}(x) = 8x - 20 + 30 \frac{(x-3)^2}{2}$$

$$\text{Si } x = 3 \Rightarrow M_{f_3}(x) = 44 \text{ KN.m}$$

$$\text{Si } x = 5 \Rightarrow M_{f_3}(x) = 0$$



Diagrammes efforts tranchants et moments fléchissant



3. Calculer le moment fléchissant maximal (M_{fmax})

$$T_2(x) = 0 \Rightarrow 8 - 30(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow 8 - 30x + 90 = 0 \Rightarrow x = \frac{98}{30}$$

$$M_{f_3}(3,267) = 8(3,267) - 30 \frac{(3,267 - 3)^2}{2} + 20 = 0 \Rightarrow x = \underline{3,267 \text{ m}}$$

$$M_{f_3}(3,267) = 45,067 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$M_{f_{max}} = 45,067 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

5.3 Contraintes normales et choix des dimensions de section droites d'une poutre

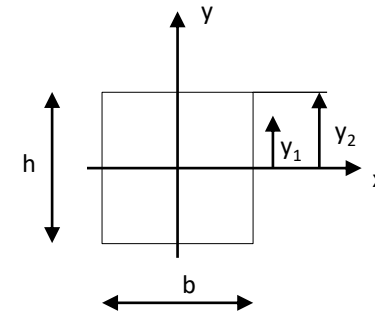
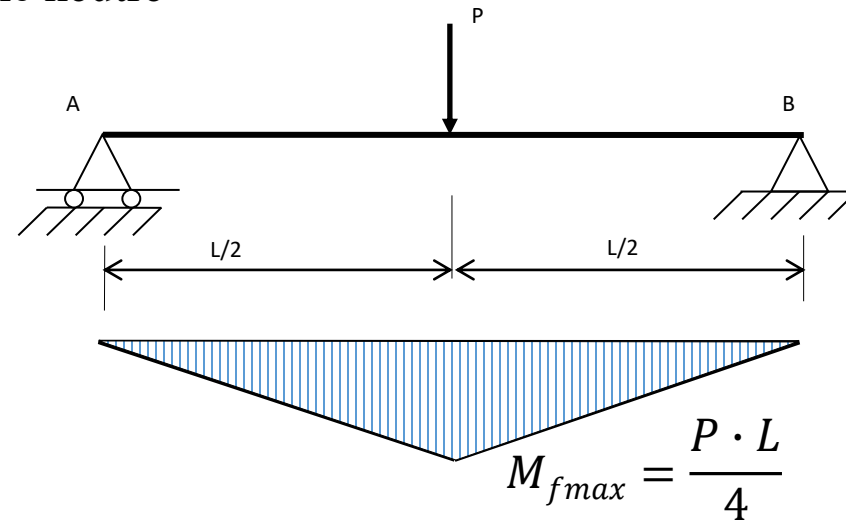
La formule de la contrainte normale en un point arbitraire de la section droite d'une poutre en flexion simple par la relation suivante:

$$\sigma = \frac{M_f}{I} y$$

M_f : moment fléchissant dans la section droite considérée

I : Moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre

y : distance du point considéré à l'axe neutre



Le moment fléchissant au milieu de la barre est maximale et la contrainte est calculer par la relation suivante :

$$\sigma = \frac{M_{fmax}}{I_x} y$$

La contrainte maximale est calculer par la relation suivante :

$$\sigma_{max} = \frac{M_{fmax}}{I_x} y_{max}$$

Les contraintes maximales de traction ou de compression (voir figure 3) dans la section considérée correspond au point le plu éloigné de la l'axe neutre

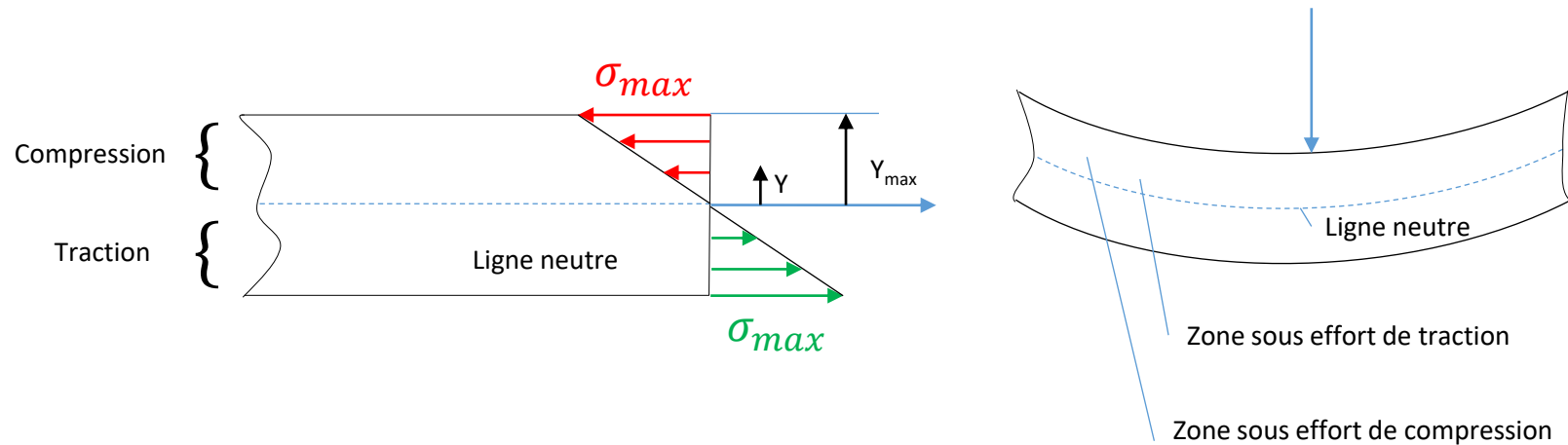


Figure. 3: Contraintes de Flexion

Pour les poutres dont les résistances en traction et compression sont les mêmes la relation de la contrainte de flexion permet de choisir la section est:

$$w = \frac{|M_{fmax}|}{\sigma_p} \quad \text{avec} \quad w = \frac{I_x}{y_{max}}$$

w : module de résistance de la section droite de la poutre en flexion par rapport à l'axe neutre

$|M_{fmax}|$: Moment fléchissant maximum en valeur absolue

σ_p : contrainte admissible

Il faut vérifier que la contrainte ne dépasse pas la contrainte admissible

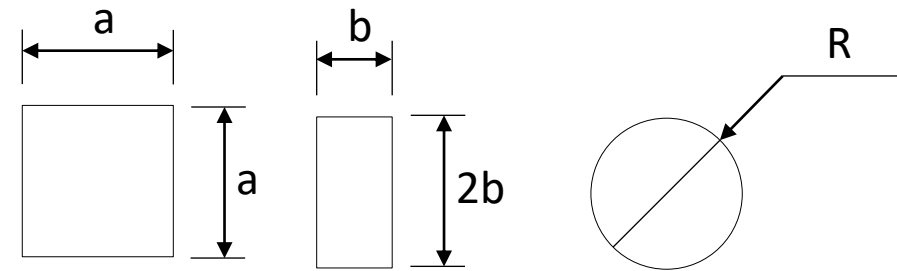
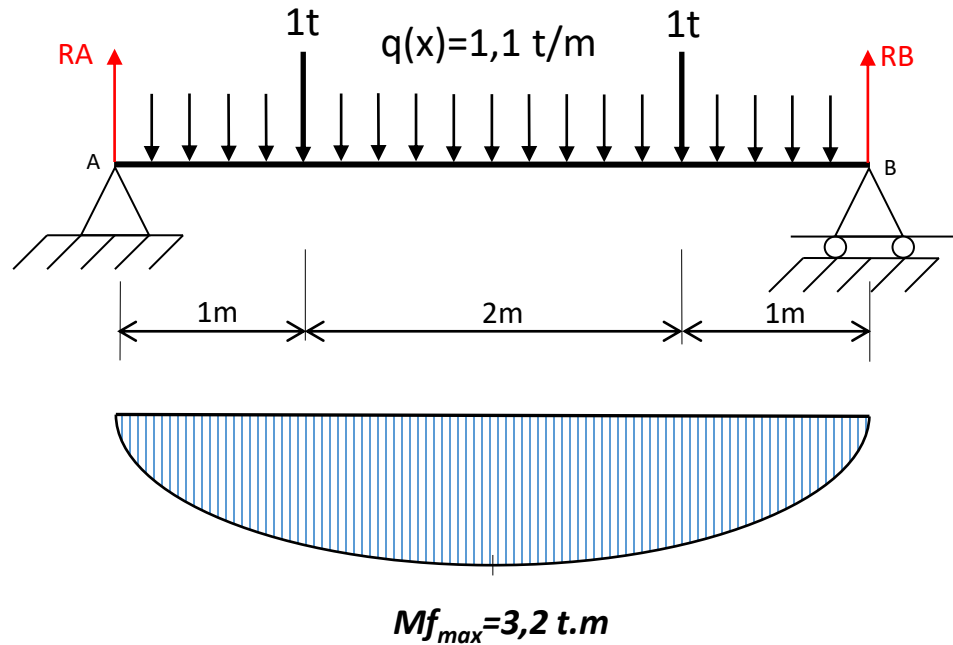
$$\sigma \leq \sigma_p \Rightarrow \frac{|M_{fmax}|}{w_{min}} \leq \sigma_p \Rightarrow w_{min} \geq \frac{|M_{fmax}|}{\sigma_p}$$

Exemple 3

Calculer et vérifier le module de résistance de cette structure pour les différents types de section droite représenté dans la figure suivante

$$\sigma_p = 1600 \text{ kg/cm}^2$$

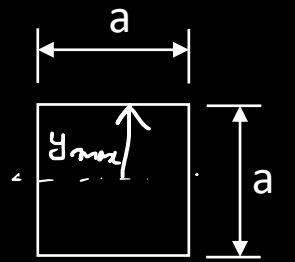
$$R_A = R_B = 3,2 \text{ t et } M_{f_{max}} = 3,2 \text{ t.m}$$



Il faut vérifier que $\sigma \leq \sigma_p \Rightarrow \frac{|M_{f_{max}}|}{w_{min}} \leq \sigma_p \Rightarrow w_{min} \geq \frac{|M_{f_{max}}|}{\sigma_p}$ avec $w_{min} = \frac{Ix}{y_{max}}$

1. Section carrée (a . a)

$$W_{\min} = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{a^4/12}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{6}$$



$$W_{\min} \geq \frac{|M_{f_{\max}}|}{\sigma_p} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot |M_{f_{\max}}|}{\sigma_p}}$$

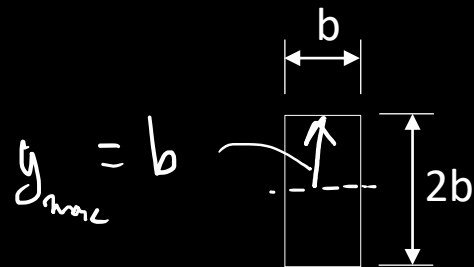
$$\Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 3,2 \cdot 10^5}{1600}} \Rightarrow a = 10,63 \text{ cm}$$

$$S_1 = a \cdot a = 113 \text{ cm}^2$$

2. Section rectangulaire (b . 2b)

$$W_{\min} = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{b(2b)^3/12}{b} = \frac{2b^3}{3}$$

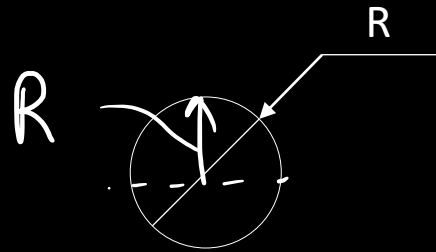
$$W_{\min} \geq \frac{|M_{\max}|}{\sigma_p} \Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot |M_{\max}|}{2 \sigma_p}}$$
$$\Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3,2 \cdot 10^5}{2 \cdot 1600}} = 6,69 \text{ cm}$$



$$\Rightarrow S_x = b \cdot 2b =$$
$$\Rightarrow S_x = 89,57 \text{ cm}^2$$

3. Section circulaire (πR^2)

$$W_{\min} = \frac{I_x}{\gamma_{\max}} = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{32}$$



$$W_{\min} \geq \frac{|M_{\max}|}{\sigma_p} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_{\max}|}{\pi \cdot \sigma_p}} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3,2 \cdot 10^5}{\pi \cdot 1600}} \Rightarrow d = 12,68 \text{ cm}$$
$$S_3 = \pi \frac{d^2}{4} = 126,24 \text{ cm}^2$$

$$S_3 > S_1 > S_2$$

Alors, le choix le plus judicieux est la section rectangulaire S_2

5.4 Contraintes tangentielles

a) Section rectangulaire

On considère une section droite rectangulaire ABCD (Figure 3), la valeur de la contrainte de cisaillement le long de E.F, distant de y de l'axe transversale.

Cette contrainte à pour grandeur
$$\tau = \frac{T S y}{b I_z} \quad (1)$$

T : Effort tranchant

S_y : Moment Statique où $S_y = S y_c = \left(\frac{h}{2} - y\right) b \left(\frac{h}{2} + y\right) \frac{1}{2}$

b : largeur de la section

I_z : moment d'inertie par rapport à l'axe z

L'équation 1 peut être écrite par la relation suivante

$$\tau = \frac{T}{b} \frac{1}{b} \frac{b}{h^3} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} + y^2 \right) \quad (2)$$

Sachant que $S=b.h$

$$\tau = \frac{6 T}{S} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (3)$$

Le maximum de τ a lieu pour $y = 0$, et il est égal à :
$$\tau_{max} = \frac{3 T}{2 S} \quad (4)$$

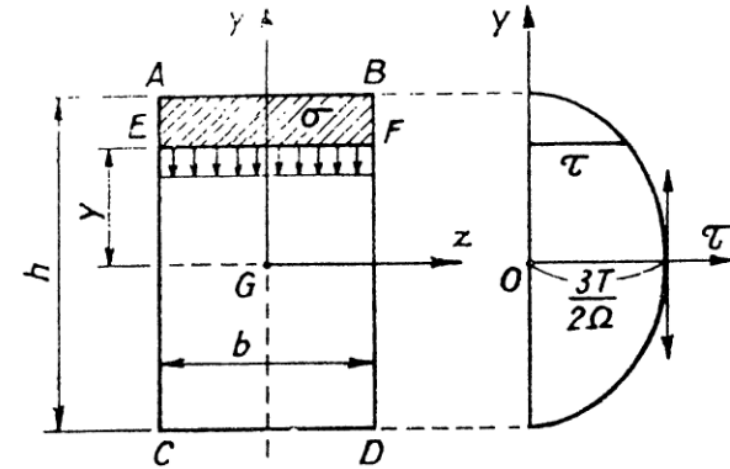
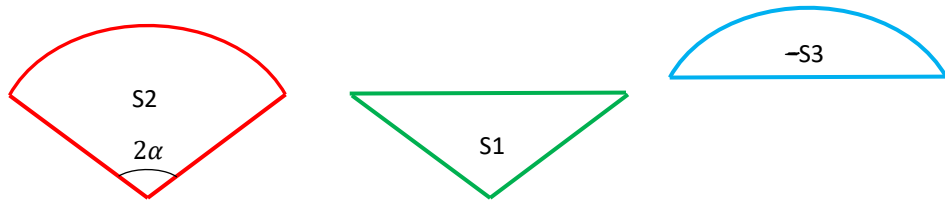


Figure. 3: Contraintes tangentielles dans une section rectangulaire

b) Section circulaire

La contrainte est calculer par la relation 1, mais le moment statique S_y est inconnue on pose.



On sait que
$$y_2 = \frac{S_1 y_1 + S_3 y_3}{S_2} \Rightarrow S y = S_3 y_3 = \underline{S_2 y_2} - \underline{S_1 y_1} \quad (5)$$

Nous avons :
$$S_1 = \frac{b}{2} y; \quad y_1 = \frac{2}{3} y$$

$$S_2 = \alpha R^2; \quad \underline{y_2} = \frac{4 R}{3 2 \alpha} \sin \alpha = \frac{4 R}{3 2 \alpha} \left(\frac{b}{2 R} \right) = \underline{\frac{1}{3} \frac{b}{\alpha}}$$

$$S_3 = ???; \quad y_3 = ???$$

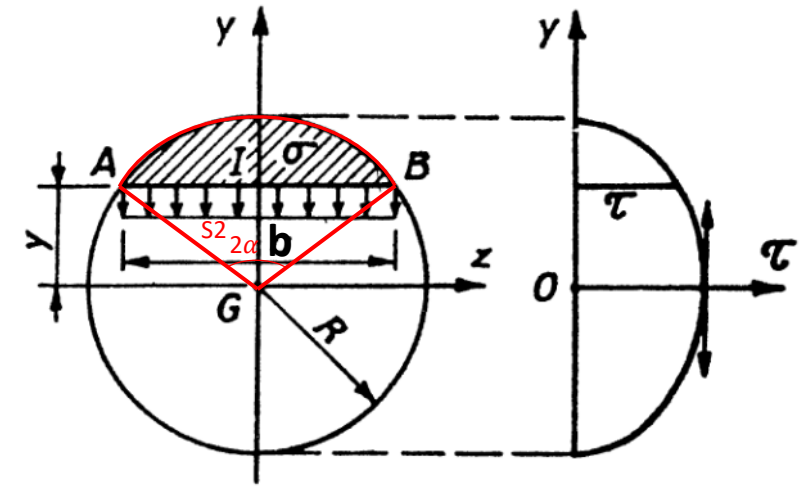


Figure. 4: Contraintes tangentielle Dans une section circulaire

$$S_y = S_3 y_3 = S_2 y_2 - S_1 y_1$$

$$S_y = S_3 y_3 = (\alpha R^2) \left(\frac{1}{3} \frac{b}{\alpha} \right) - \left(\frac{b}{2} y \right) \left(\frac{2}{3} y \right) = \frac{R^2}{3} b - \frac{y^2}{3} b = \frac{1}{3} b (R^2 - y^2)$$

Sachant que $b = 2\sqrt{R^2 - y^2}$ donc $S_y = \frac{1}{12} b^3$

De l'équation (1) $\tau = \frac{T b^3}{b} \frac{64}{12 \pi d^4} = \frac{16 T b^2}{3 \pi d^4} = \frac{16}{3} T \frac{4(R^2 - y^2)}{\pi (2R)^4} = \frac{16}{3} T \frac{4(R^2 - y^2)}{\pi 16R^4}$

La contrainte tangentielle dans une section circulaire est donnée par la relation suivante:

$$\tau = \frac{T}{S} \frac{4}{3R^2} (R^2 - y^2) \quad (6)$$

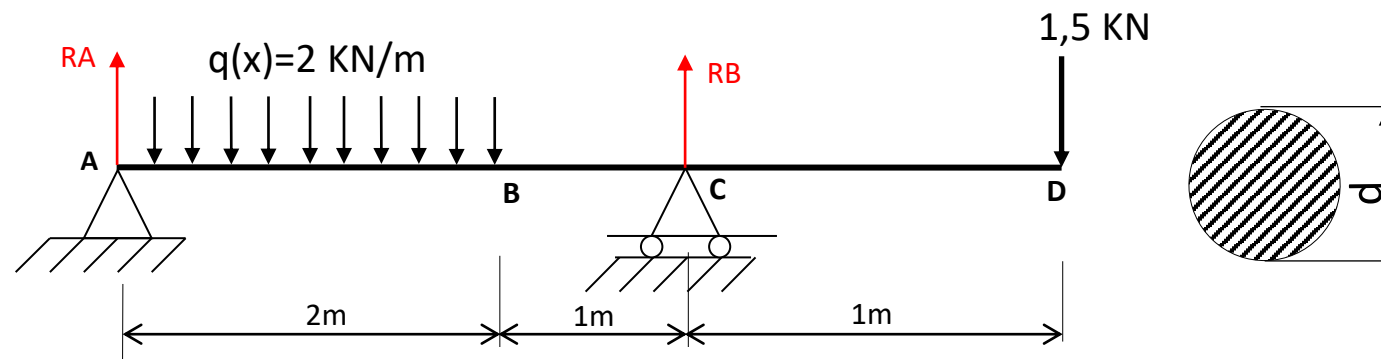
τ est max si $y=0$, on remplace $y=0$ dans l'équation (4.6):

$$\tau = \frac{4T}{3S} \quad (7)$$

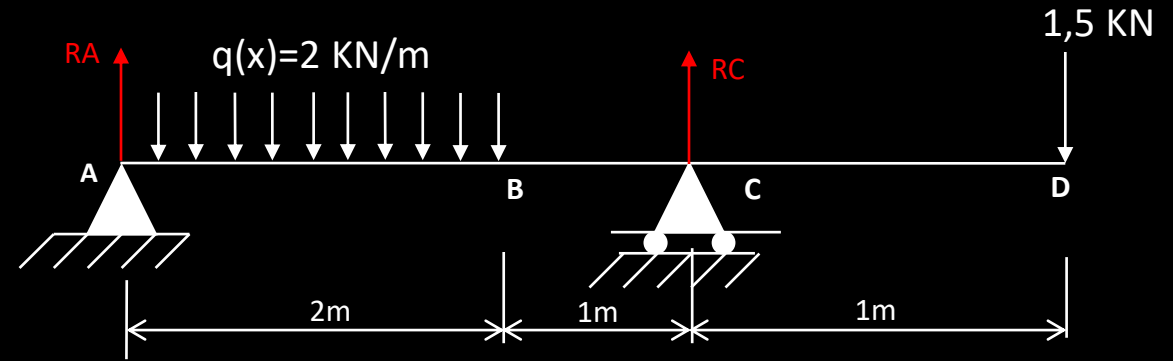
Exemple 4

La poutre de section circulaire repose sur deux appuis, et sollicitée à la flexion par une charge Concentré $F=1,5 \text{ KN}$ et une charge uniformément répartie $q= 2 \text{ KN/m}$,

1. Déterminer les réactions aux appuis
2. Etablir les équations et les diagrammes de $T(x)$ et $Mf(x)$
3. Calculer le diamètre d sachant que $\sigma_p = 175 \times 10^4 \text{ N/m}^2$
4. Déterminer la contrainte τ agissant au point B pour $Y = \frac{R}{2}$, et τ_{max} .



1. Calcul des réactions



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_C - 2q - P = 0$$
$$\Rightarrow R_A + R_C = 5,5 \text{ kN} \quad (1)$$

$$\Sigma \Gamma_A = 0 \Rightarrow (q \cdot 2) \cdot 1 - 3 \cdot R_C + 5P = 0 \Rightarrow R_C = \frac{(2 \cdot 2) + (5 \cdot 1,5)}{3}$$
$$\Rightarrow R_C = 3,83 \text{ kN}$$

on remplace R_C dans l'éq (1) $\Rightarrow R_A = 1,67 \text{ kN}$

2. Variation des efforts tranchants (T) et des moments fléchissant (M_f)

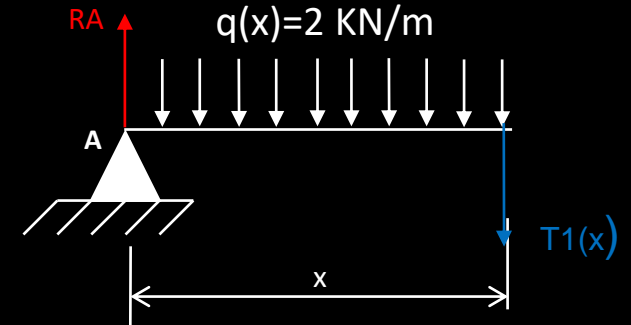
Efforts tranchants T(x)

Section 1

$$T_1(x) - RA + q x \Rightarrow T_1(x) = 1,67 - 2 x$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow T_1(x) = 1,67 \text{ kN}$$

$$\text{Si } x = 2 \Rightarrow T_1(x) = -2,33 \text{ kN}$$

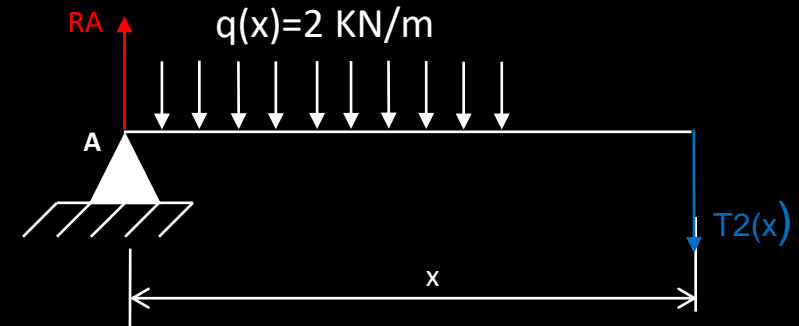


Section 2

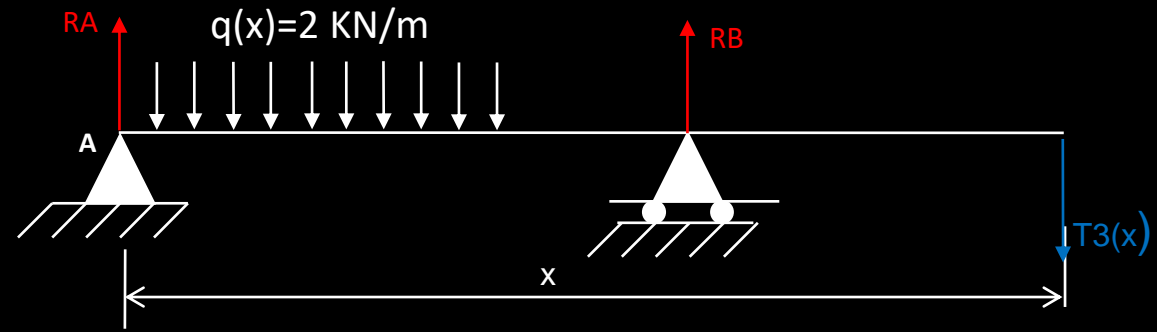
$$T_2(x) - RA + 2 q = 0$$

$$T_2(x) = 1,67 - 4$$

$$T_2(x) = -2,34 \text{ kN}$$



Section 3



$$T_3(x) - R_A + 2q - R_C = 0$$

$$T_3(x) = 1,67 - 4 + 3,83$$

$$T_3(x) = 1,5 \text{ kN}$$

Moments fléchissant $M_f(x)$

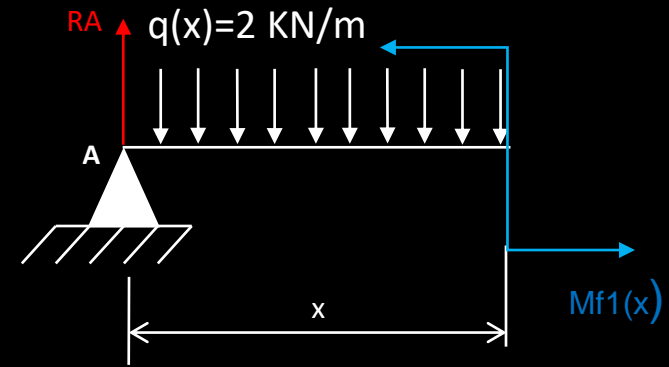
Section 1

$$M_{f_1}(x) - RA \cdot x + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$M_{f_1}(x) = 1,67 \cdot x - \frac{x^2}{2}$$

$$\text{si } x=0 \Rightarrow M_{f_1}(x) = 0$$

$$\text{si } x=2 \Rightarrow M_{f_1}(x) = -0,67 \text{ KN}\cdot\text{m}$$



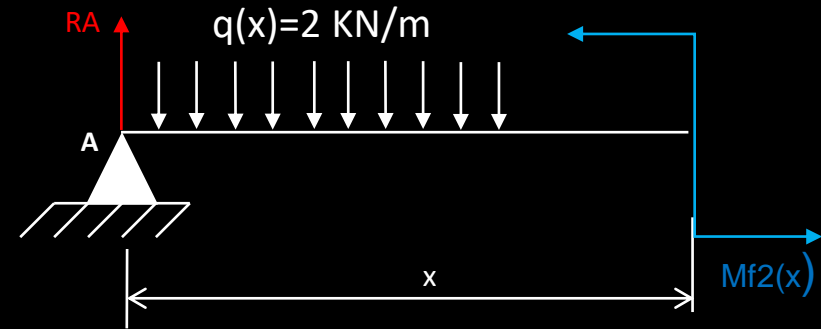
Section 2

$$M_{f_2}(x) - RA \cdot x + q(2)(x-1) = 0$$

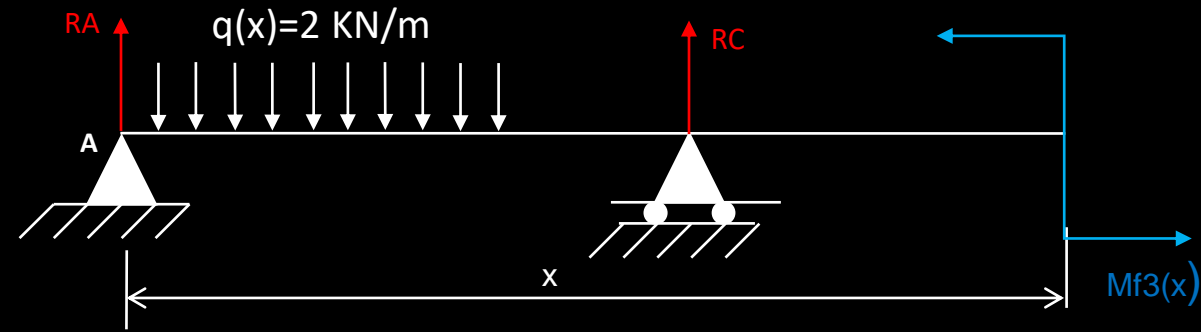
$$M_{f_2}(x) = 1,67 \cdot x - 4(x-1)$$

$$\text{si } x=2 \Rightarrow M_{f_2}(x) = -0,67 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

$$\text{si } x=3 \Rightarrow M_{f_2}(x) = -3,02 \text{ KN}\cdot\text{m}$$



Section 3



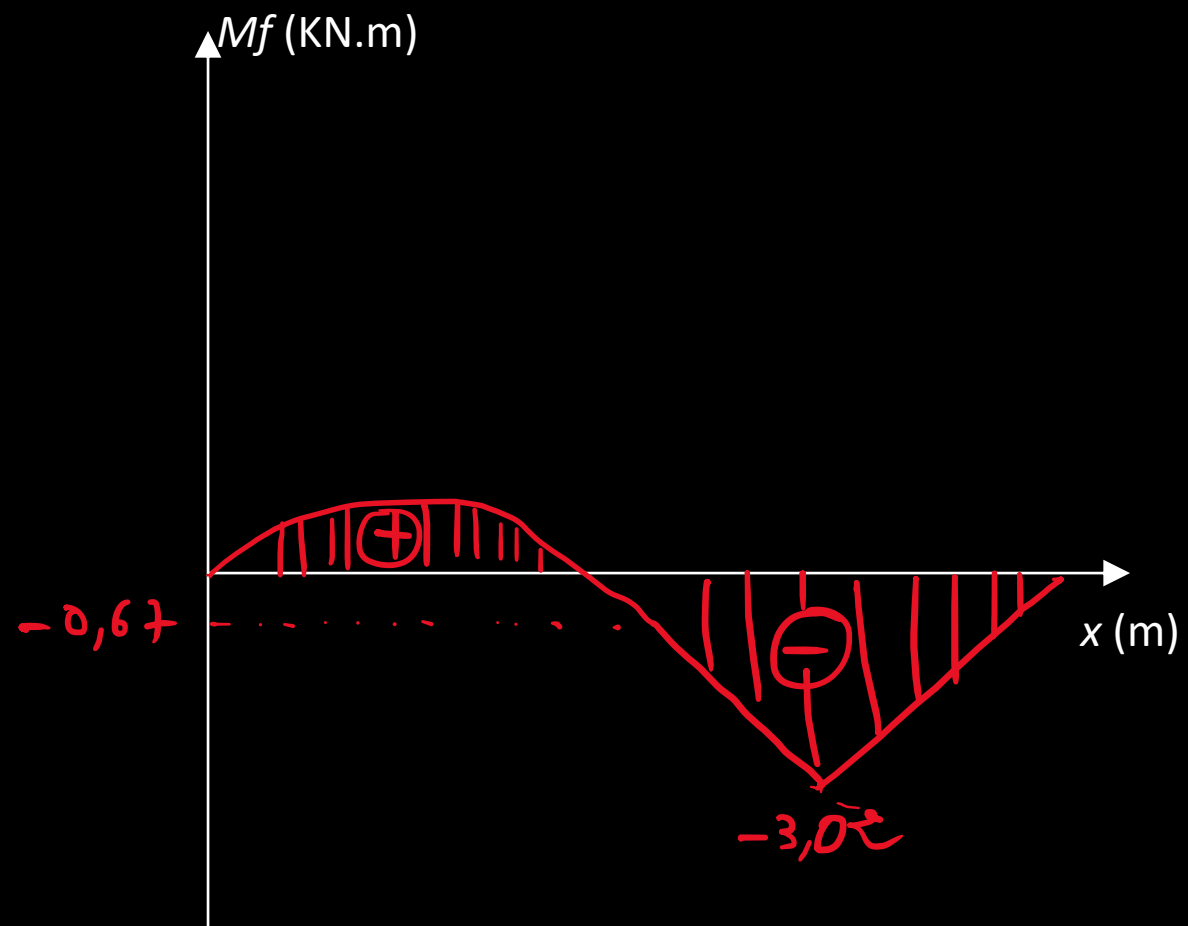
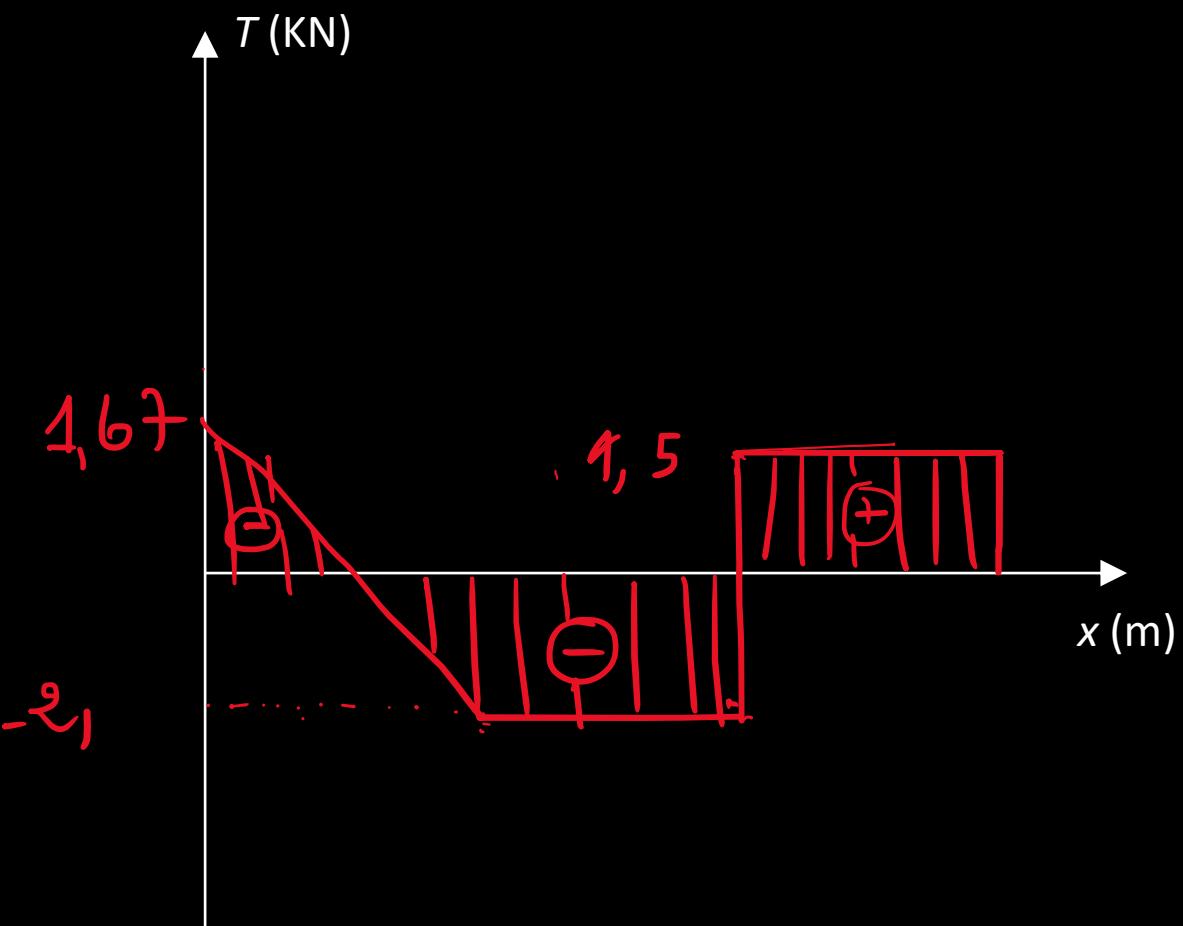
$$M_{f3}(x) - R_A \cdot x + 2q(x-1) - R_C(x-3) = 0$$

$$M_{f3}(x) = 1,67x - 4(x-1) + 3,83(x-3)$$

$$\text{Si } x=3 \Rightarrow M_{f3}(x) = -3,02 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\text{Si } x=5 \Rightarrow M_{f3}(x) = 0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Diagrammes efforts tranchants et moments fléchissant



3. Détermination du diamètre d

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{f_{max}}|}{I_x} \quad \gamma_{max} \leq \sigma_p$$

$$M_{f_{max}} = 3,02 \text{ kN.m} ; \quad \gamma_{max} = \frac{d}{2} ; \quad I_x = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$d \geq \left(\frac{|M_{f_{max}}| \cdot 64}{2\pi \cdot \sigma_p} \right)^{1/3} \Rightarrow d \geq \left(\frac{3,02 \cdot 10^3 \cdot 64}{2 \cdot \pi \cdot 175 \cdot 10^4} \right)$$

$$\Rightarrow d \geq 0,26 \text{ m}$$

$$\Rightarrow d = 26 \text{ mm}$$

4. Détermination de la contrainte τ

au point B $T = -2,33 \text{ kN}$

$$\sigma = \frac{T}{S} \frac{4}{3} R^2 (R^2 - y^2)$$

$$R = 13 \text{ mm} \Rightarrow y = \frac{R}{2} = 6,5 \text{ mm}, S = \pi \cdot R^2 = 530,93 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{-2,33}{530,93} \frac{4}{3} (13^2 - 6,5^2) \frac{10^3}{10^{-6}} = 4,389 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{4}{3} \frac{T}{S} = \frac{4}{3} \frac{2,33}{530,93} \frac{10^3}{10^{-6}} = 5,851 \text{ MPa}$$