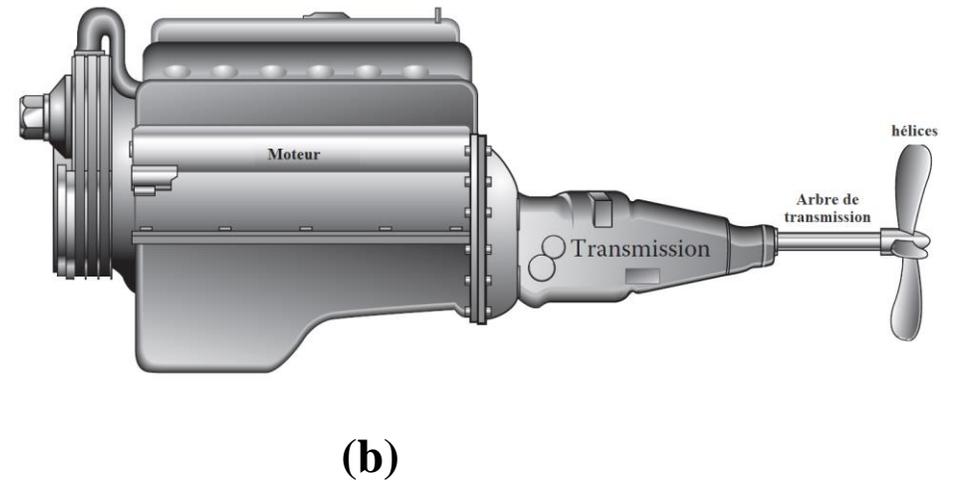
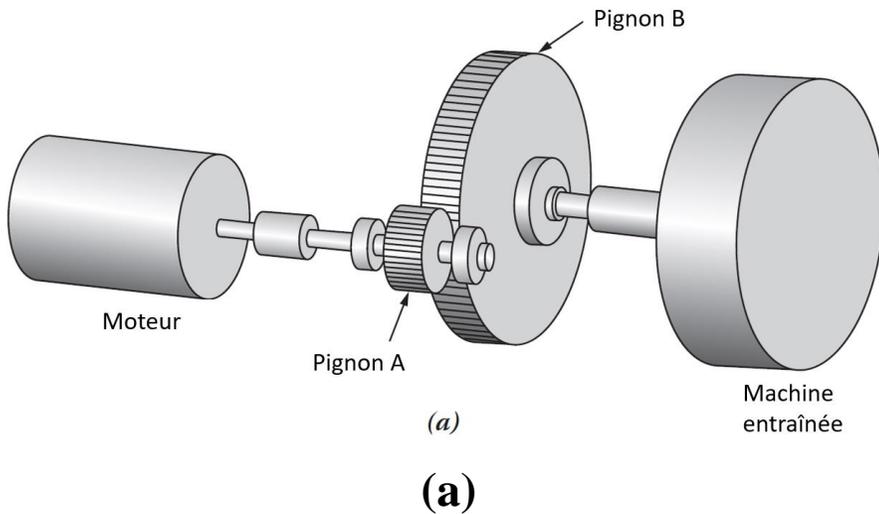


# Chapitre 4: Torsion des arbres

## 4.1 Introduction

Ce type de sollicitation est répondu dans les machines que vous connaissez et qui ont des arbres rotatifs qui transmettent de la puissance. Notez qu'un couple est créé lorsqu'un arbre transmet de la puissance et que le couple crée une contrainte de cisaillement de torsion. Voir le réducteur de vitesse à engrenage illustré à la Figure 1–a. ou aussi la figure 1-a qui montre un système d'entraînement pour un bateau. La puissance développée par le moteur passe par la transmission et l'arbre de transmission jusqu'à l'hélice, où elle fait avancer le bateau.



**Figure. 1:** exemples de machines avec présence de sollicitation de torsion

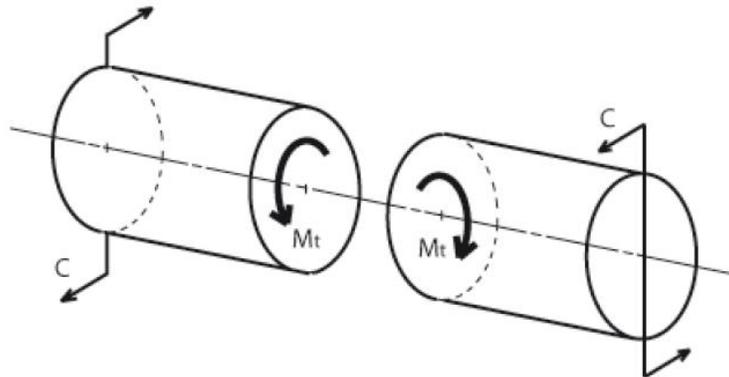
## 4.2 Définition

On dit qu'une section d'une pièce est sollicitée en torsion pure quand pour cette section le moment de torsion est le seul élément de réduction non nul du torseur des contraintes :

$N=0$ ,  $T=0$ ,  $M_f=0$  et  $M_t \neq 0$ .

## 4.3 Convention de signes

Si un observateur regardant la section droite du côté de la normale extérieure, voit le moment de torsion ( $M_t$ ) diriger dans le sens inverse (contraire) des aiguilles d'une montre, on considère alors que  $M_t$  est positif (voir figure .2).



**Figure. 2:** Convention de signes

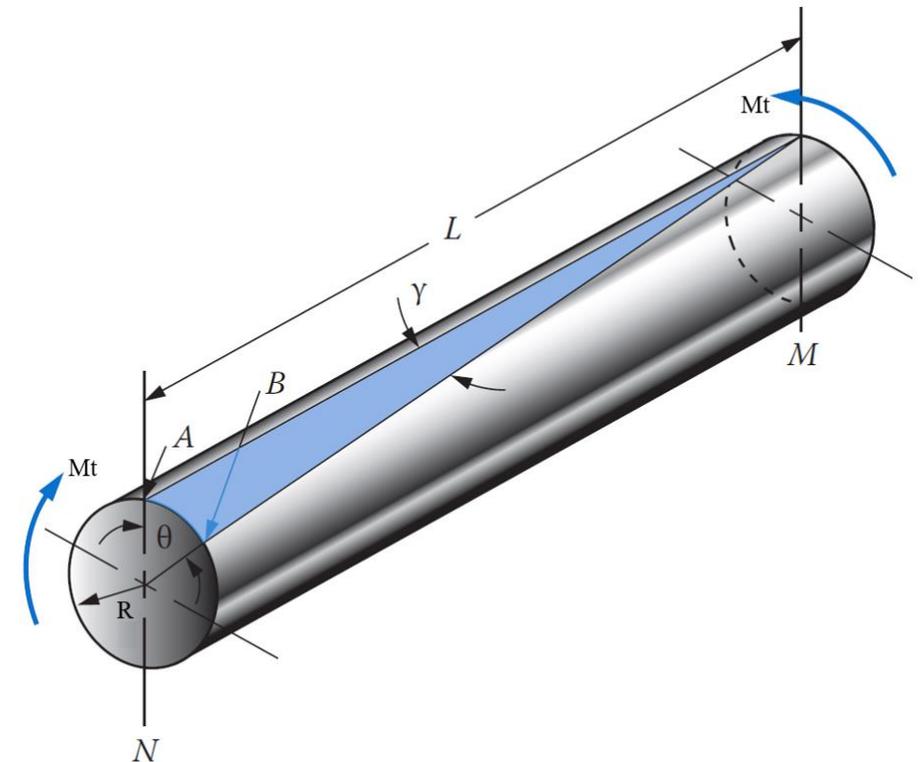
## 4.4 Torsion des arbres pleins

On considère l'arbre illustré dans la Figure 3. Une extrémité de l'arbre, section M, est maintenue fixe, tandis qu'un moment de torsion  $M_t$  est appliqué à l'autre extrémité. Dans ces conditions, l'arbre va se tordre entre les deux extrémités d'un angle  $\theta$ .

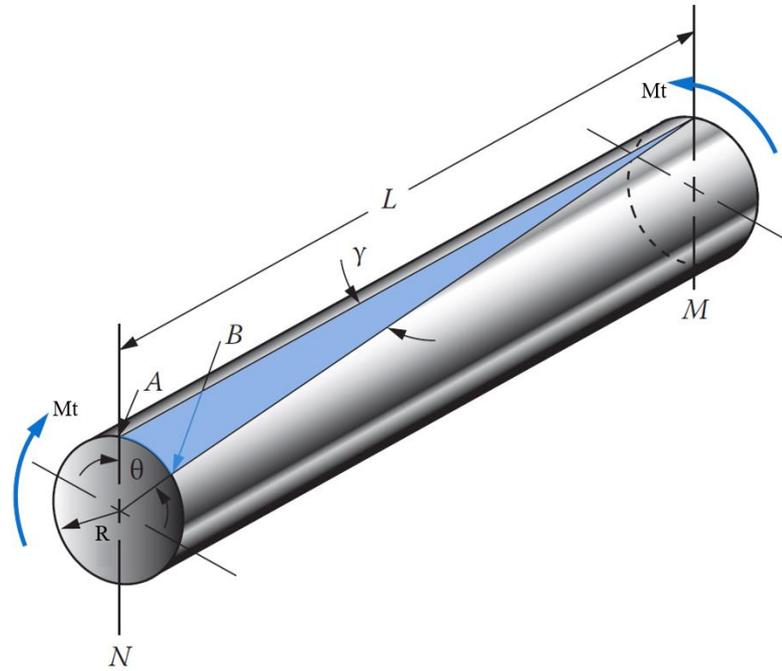
Lorsque le moment de torsion est appliqué, un élément de longueur  $L$  le long de la surface extérieure de l'élément, qui était initialement rectiligne, tourne d'un petit angle  $\gamma$ . De même, un rayon de l'élément dans une section transversale tourne d'un petit angle  $\theta$ . Dans la Figure 3, les rotations  $\gamma$  et  $\theta$  sont toutes les deux liées à la longueur d'arc  $AB$  à la surface de la barre.

On constate que :

- Toute section droite du cylindre reste plane, ne change pas de forme et reste normale à l'axe.
- La distance des deux sections reste invariable.
- Toute section droite se déplace uniquement en rotation autour de son axe en tournant d'un angle proportionnel à la distance de la section de référence.



**Figure. 3:** Élément différentiel en déformation angulaire<sup>3</sup>



**Figure. 3:** Élément démentiel en déformation angulaire

D'après la géométrie, pour les petits angles, la longueur de l'arc est le produit de l'angle en radians et de la distance depuis le centre de la rotation. Par conséquent, la longueur de l'arc AB peut être exprimée soit

$$AB = \gamma L \quad (1)$$

où

$$AB = \theta R \quad (2)$$

où  $R$  est le rayon extérieur de la barre. Ces deux expressions de la longueur d'arc  $AB$  peuvent être assimilées l'une à l'autre :

$$\gamma L = \theta R \quad (3)$$

La résolution de  $\gamma$  donne

$$\gamma = \frac{\theta R}{L} \quad (4)$$

L'angle  $\gamma$  est une mesure de la contrainte de cisaillement maximale dans un élément sur la surface extérieure de la barre. la déformation de cisaillement d'après la lois de Hooke,  $\gamma$  est liée à la contrainte de cisaillement,  $\tau$ , par le module d'élasticité en cisaillement,  $G$ . Cela est exprimé comme suit :

$$\tau = G \gamma \quad (5)$$

Sachant que la formule de contrainte de cisaillement de torsion est donnée par:

$$\tau = \frac{Mt R}{Ip} \quad (6)$$

Les deux expressions pour  $\tau$  donne

$$G \gamma = \frac{Mt R}{I_p} \quad (7)$$

Maintenant, en remplaçant  $\gamma$  dans l'équation, nous obtenons

$$G \frac{\theta R}{L} = \frac{Mt R}{I_p} \quad (8)$$

Nous pouvons maintenant simplifier R et déterminé l'expression de l'angle  $\theta$  :

$$\theta = \frac{Mt L}{G I_p} \quad (9)$$

L'angle de rotation  $\theta$  d'une poutre de longueur  $x$  est déterminé par la fonction  $\theta(x)$ , écrite sous la forme suivante:

$$\theta(x) = \int_0^x \frac{Mt}{G I_p} dx \quad (10)$$

Si on veut déterminer l'angle de torsion par unité de longueur  $\alpha$ , on écrit :

$$\alpha = \frac{\theta}{L} = \frac{Mt}{G I_p} \quad (11)$$

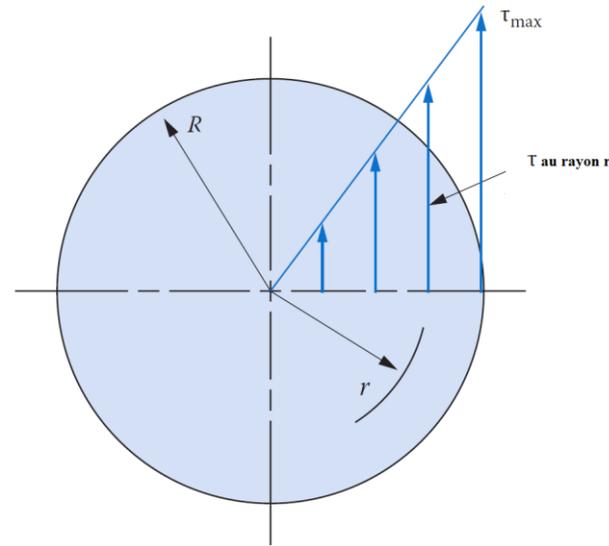
$I_p$  : moment d'inertie polaire d'une section circulaire,  $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$

$Mt$  : moment de torsion

$G$  : Module d'élasticité transversal

## 4.5 Contrainte admissible en torsion des arbres

La contrainte tangentielle (de cisaillement) dans le cas de la torsion est la suivante (voir figure ,4):



**Fig. 4:** Répartition de la contrainte de cisaillement sur une section transversale de la barre.

On remplaçant l'équation (4) dans l'équation (5), la contrainte  $\tau$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\tau = G \frac{\theta}{L} R \quad (12)$$

Par définition le moment de torsion est obtenue par la relation suivante:

$$Mt = \int_S R \tau \, ds \quad (13)$$

En substituant  $\tau$  par son expression dans l'équation (13) :

$$Mt = \int_S R \left( G \frac{\theta}{L} R \right) \, ds \Rightarrow Mt = G \frac{\theta}{L} \int_S R^2 \, ds \quad (14)$$

On reconnait dans la dernière expression le moment d'inertie polaire  $I_p$  donc :

$$\frac{\theta}{L} = \frac{Mt}{G I_p} \quad (15)$$

En remplaçant  $\frac{\theta}{L}$  dans l'équation (12) on obtient :

$$\tau = \frac{Mt}{I_p} R \quad (16)$$

**La condition de résistance :**

$$\tau_{max} \leq \tau_p \quad (16)$$

$$\tau_{max}(r = R) = \frac{Mt}{I_p} R \leq \tau_p \quad (17)$$

En remplaçant le moment d'inertie polaire on trouve :

$$\frac{2Mt}{\pi R^3} \leq \tau_p \Leftrightarrow \frac{16 Mt}{\pi d^3} \leq \tau_p \quad (18)$$

$\tau_p = Rpg$ : Résistance pratique au glissement

$$\text{avec } \tau_p = \frac{\tau_e}{s} \quad (19)$$

$$\tau_e = Reg$$

$s$ : Coefficient de sécurité

**La condition de rigidité :**

$$\alpha \leq \alpha_{max}$$

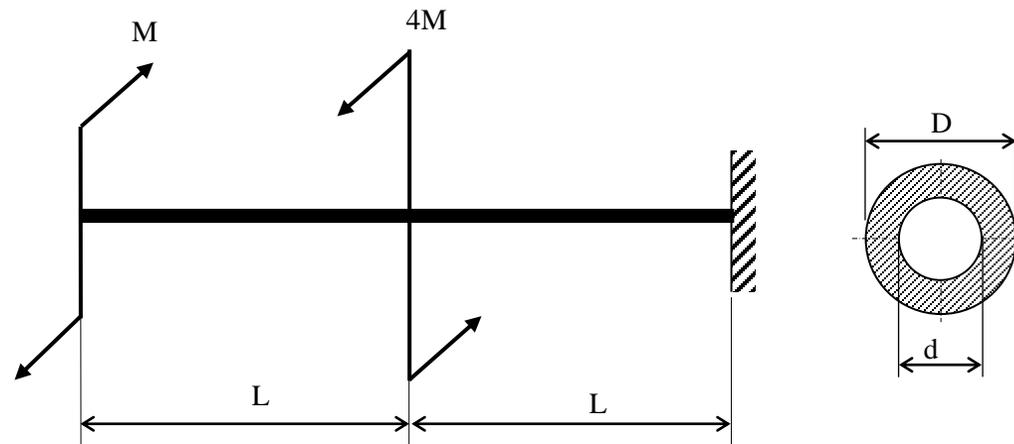
$$\alpha = \frac{\theta}{L} = \frac{Mt}{G I_p} \leq \alpha_{max}$$

## Exemple 1

1. Construire le diagramme du moment de Torsion ( $M_t$ )
2. Calculer l'angle de torsion  $\theta(x)$
3. Déterminer le diamètre  $D$ .

avec

$$M = 100 \text{ kgf.m} ; \quad [\tau_p] = 500 \text{ kgf/cm}^2 ; \quad G = 8 \cdot 10^5 \text{ kgf/cm} ; \quad d = 0,5 D$$

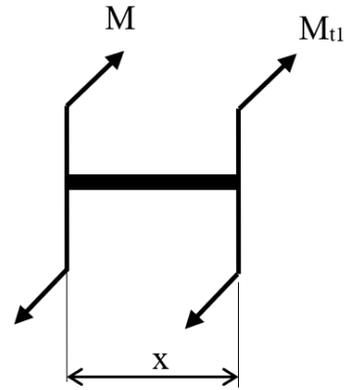


## *Solution*

### •*Diagramme de Mt*

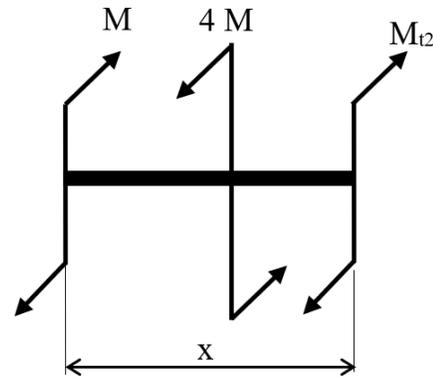
#### *1<sup>er</sup> Section*

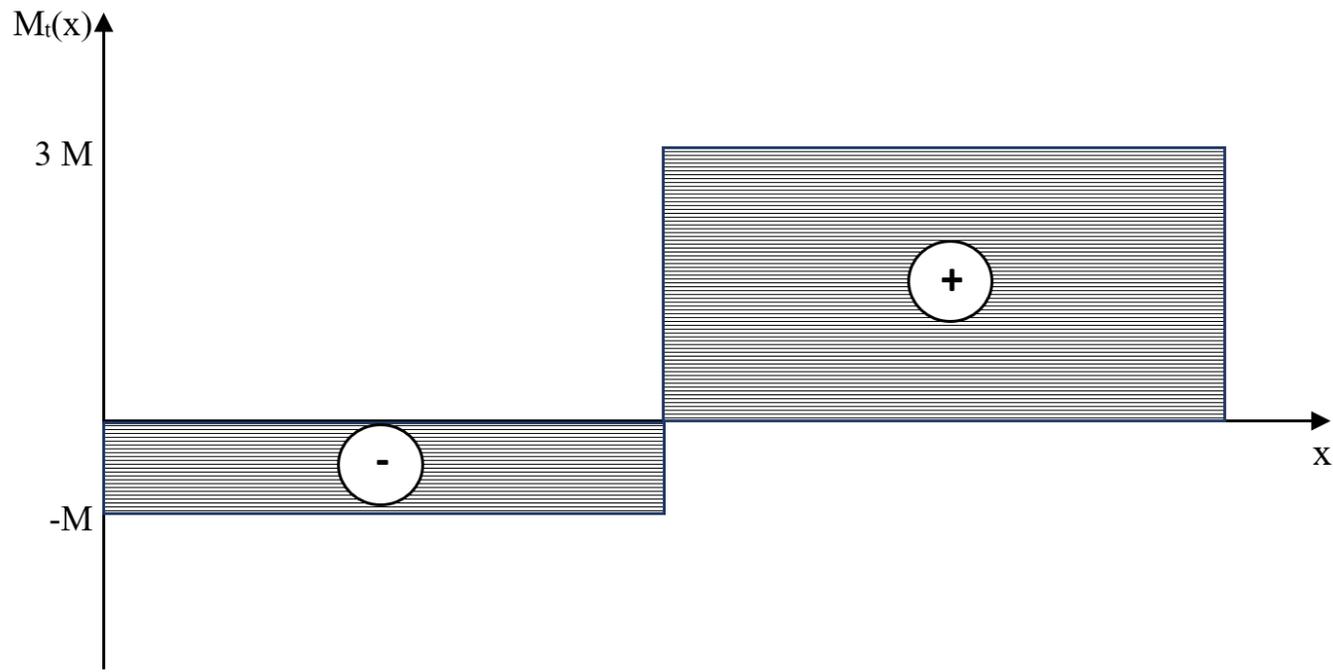
$$\begin{aligned}\sum \vec{M} = \vec{0} &\Rightarrow M_{t1} + M = 0 \\ &\Rightarrow M_{t1} = -M \\ &\Rightarrow M_{t1} = -100 \text{ kgf} \cdot \text{m}\end{aligned}$$



#### *2<sup>eme</sup> Section*

$$\begin{aligned}\sum \vec{M} = \vec{0} &\Rightarrow M_{t2} + M - 4M = 0 \\ &\Rightarrow M_{t2} = 3M \\ &\Rightarrow M_{t2} = 300 \text{ kgf} \cdot \text{m}\end{aligned}$$





## 1. L'angle de torsion $\theta(x)$

### 2<sup>eme</sup> Section

$$\theta_2(x) = \int_0^x \frac{M_{t3}}{G I_p} dx \Rightarrow \theta_2(x) = \int_0^x \frac{300}{G I_p} dx \Rightarrow \theta_2(x) = \frac{300}{G I_p} x$$

$$\theta_2(0) = 0$$

$$\theta_2(a) = \frac{300}{G I_p} a$$

## 2<sup>eme</sup> Section

$$\theta_1(x) = \int_0^x \frac{M_{t3}}{G I_p} dx + \theta_2(a) \Rightarrow \theta_1(x) = \int_0^x \frac{-100}{G I_p} dx + \frac{300}{G I_p} a \Rightarrow \theta_1(x) = \frac{-100}{G I_p} x + \frac{300}{G I_p} a$$

$$\theta_1(0) = \frac{300}{G I_p} a$$

$$\theta_1(a) = \frac{200}{G I_p} a$$

### 2. Calcul du diamètre de l'arbre

$$\tau_{\max} = \frac{|M t_{\max}|}{I_p} \frac{D}{2} \leq \tau_p \Rightarrow (1) \text{ Avec } I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{32 |M t_{\max}|}{\pi(D^4 - d^4)} \frac{D}{2} \leq \tau_p \Rightarrow D^3 \geq \frac{|M t_{\max}| \times 16}{\pi(1 - 0.5^4) \tau_p}$$

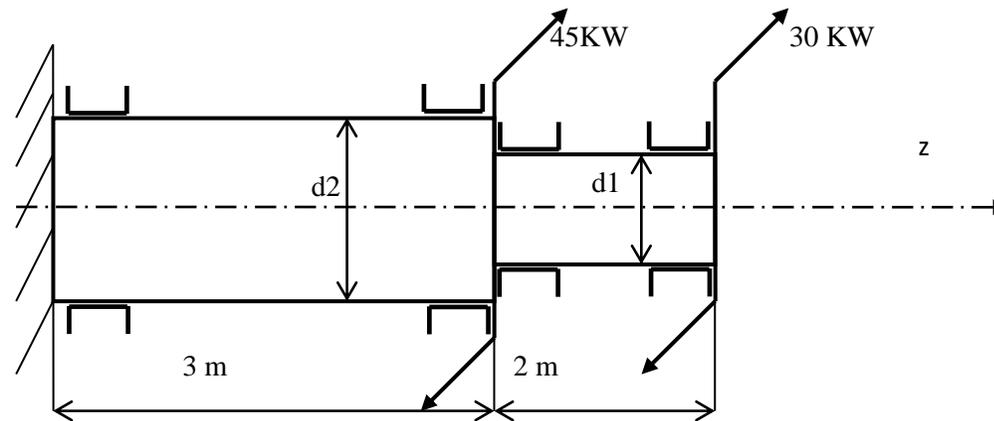
$$\Rightarrow D^3 \geq \frac{300 \times 16 \times 10^2}{\pi(1 - 0.5^4) 500}$$

$$\Rightarrow D \geq \left( \frac{300 \times 16 \times 10^2}{\pi(1 - 0.5^4) 500} \right)^{1/3} \Rightarrow D \geq 6.88 \text{ cm}$$

## Exemple 2

déterminer les dimensions des sections droites ( $d_1$  et  $d_2$ ) assurant la résistance.

$$[\tau] = 200 \text{ kgf/cm}^2; n = 360 \text{ tr/min}$$



## ***Solution***

Détermination de la puissance

$$P_{u1} = Mt_1 \omega \Rightarrow Mt_1 = \frac{P_{u1}}{\frac{\pi 360}{30}} = \frac{30 \times 30 \times 10^3}{\pi 360} = 795.77 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$P_{u2} = Mt_2 \omega \Rightarrow Mt_2 = \frac{P_{u2}}{\frac{\pi 360}{30}} = \frac{30 \times 45 \times 10^3}{\pi 360} = 1193.66 \text{ N} \cdot \text{m}$$

### ***1<sup>er</sup> Section***

$$Mt_1 \Rightarrow 795.77 \text{ N} \cdot \text{m}$$

### ***2<sup>eme</sup> Section***

$$Mt_2 \Rightarrow 795.77 + 1193.66 = 1989.43 \text{ N} \cdot \text{m}$$

## ***2. Condition de résistance***

$$\tau_{\max} = \frac{|Mt_{\max}|}{I_p} \frac{D}{2} \leq \tau_p \Rightarrow (1) \quad \text{Avec} \quad I_{p1} = \frac{\pi d_1^4}{32} \quad \text{et} \quad I_{p2} = \frac{\pi d_2^4}{32}$$

$$\begin{aligned}
(1) \Rightarrow \frac{32|Mt_{\max}|}{\pi(d_1^4)} \frac{d_1}{2} \leq \tau_p &\Rightarrow d_1^3 \geq \frac{|Mt_{\max}| \times 16}{\pi(d_1^4) \tau_p} \\
&\Rightarrow d_1^3 \geq \frac{795.77 \times 16 \times 10^2}{\pi 200 \times 9.81} \\
&\Rightarrow d_1 \geq \left( \frac{795.77 \times 16 \times 10^2}{\pi 200 \times 9.81} \right)^{1/3} \\
&\Rightarrow d_1 \geq 5.9 \text{ cm}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) \Rightarrow \frac{32|Mt_{\max}|}{\pi(d_2^4)} \frac{d_2}{2} \leq \tau_p &\Rightarrow d_2^3 \geq \frac{|Mt_{\max}| \times 16}{\pi(d_2^4) \tau_p} \\
&\Rightarrow d_2^3 \geq \frac{1989.43 \times 16 \times 10^2}{\pi 200 \times 9.81} \\
&\Rightarrow d_2 \geq \left( \frac{1989.43 \times 16 \times 10^2}{\pi 200 \times 9.81} \right)^{1/3} \\
&\Rightarrow d_2 \geq 8.02 \text{ cm}
\end{aligned}$$

### Exemple 3

1. Construire le diagramme du moment de Torsion ( $M_t$ )
2. Calculer l'angle de torsion  $\theta(x)$
3. Calculer la contrainte tangentielle maximum  $\tau_{max}$ .

$$M = 120 \text{ kgf.m} ; d = 7 \text{ cm};$$

