Chapitre 3: Caractéristiques géométriques des sections droites

3.1 Généralités

La forme et les dimensions géométriques des corps interviennent dans la résistance, la rigidité et la stabilité de ces derniers, et de ce fait nous allons introduire dans ce chapitre le calcul des grandeurs formant les caractéristiques géométriques des sections planes.
Parmi ces caractéristiques nous citerons :

- L'aire de la section : A [cm^2], [mm^2]...
- Moments statiques : Sy, Sz [cm^3], [mm^3]...
- Moments d'inertie quadratiques : Iy, Iz [cm^4], [mm^4]...
- Produit d'inertie (ou moment d'Inertie centrifuge) : Iyz [cm^4], [mm^4]...
- Moments d'inertie polaire : Ip [cm^4], [mm^4]...
- Rayons de giration : iy, iz [cm], [mm]...

3.2 Moments statiques d'une section

Considérons une section quelconque d'aire A (voir figure 1), l'élément différentiel de surface dA admet pour moments statiques par rapport respectivement aux axes z et y les expressions :

$$dS_y = y \; dA$$

$$dS_z = z \; dA$$

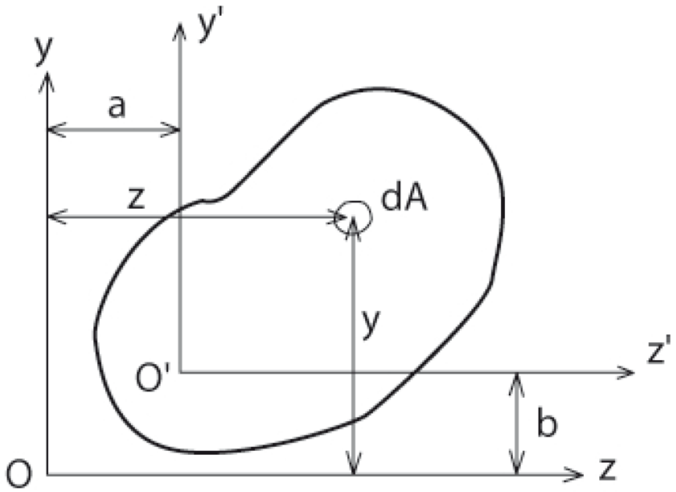


Figure. 1: Moments statiques d'une section

Les moments statiques de la section entière sont obtenus par intégration sur toute la surface A :

$$S_y = \int_A y\, dA$$

$$S_z = \int_A z\, dA$$

Considérons connus l'aire de la section A et les moments statiques Sz et Sy par rapport au repère (z O y), les moments statiques par rapport a un nouveau système d'axes (z' O' y') seront :

$$S_{y'} = \int_A (y - b)\, dA = S_y - \mathrm{b\ A}$$

$$S_{z'} = \int_A (z - a)\, dA = S_z - \mathrm{a\ A}$$

Par définition les axes par rapport auxquels les moments statiques sont nuls sont appelés axes centraux et leur point d'intersection G est appelé centre de gravite de la section. Z_G et Y_G représentent les coordonnées du centre de gravite par rapport au système d'axes connus (z O y).

$$a = ZG = \frac{Sz}{A} = \frac{\int_A z\,dA}{A}$$

$$\mathrm{b} = YG = \frac{Sy}{A} = \frac{\int_A y\,dA}{A}$$

Exemple 1:

Déterminer la position du centre de gravite (CDG) par rapport a la base du rectangle (b h) (voir figure 2).

On calcule le moment statique du rectangle par rapport a l'axe z :

La bande elementaire hachuree $dA = b \times dy$

$$S_y = \int_A y\, dA = \int_0^h y\, b\, dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h b = \frac{bh^2}{2}$$

Alors :

$$Y_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{bh^2}{2}}{bh} = \frac{h}{2}$$

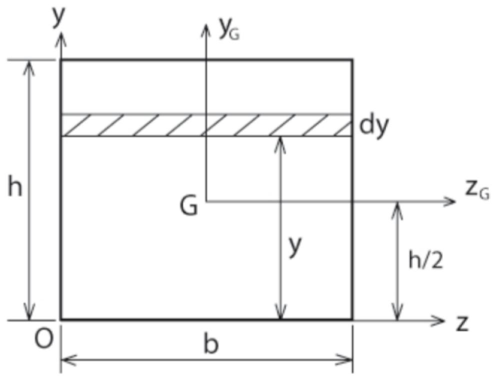


Figure. 2: Exemple : section rectangulaire

Remarques :

1- En pratique les sections des éléments de construction sont souvent des sections composées de plusieurs sections courantes (rectangle, triangle, cercle ou portion de cercle) dans ce cas nous utiliserons pour la détermination des coordonnées du centre de gravite (CDG) de la section globale des formules de composition suivantes :
Les sections composantes sont définies par leurs aires respectives A_i et les coordonnées de leurs CDG respectifs (z_i; y_i) par rapport au repère de référence choisi et ainsi on aura :

$$ZG = \frac{\sum Sz\,(Ai)}{\sum A_i} = \frac{\sum\, zi(Ai)}{\sum A_i} \qquad YG = \frac{\sum Sy\,(Ai)}{\sum A_i} = \frac{\sum\, yi(Ai)}{\sum A_i}$$

2- Si une section admet un axe de symétrie, cet axe passe par le centre de gravite (CDG) et si une section admet deux axes de symétrie orthogonaux, leur intersection représente le centre de gravite (voir figure 3).

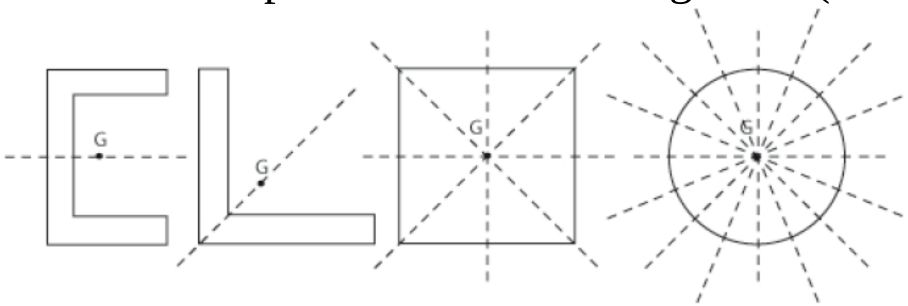


Figure. 3: Centre de gravite des sections avec axes de symétrie

Exemple 2 :

Déterminer la position du CDG de la section composée de la figure 4.

$$\begin{cases} A_1 = 30 \times 60 = 1800\ cm^2 \\ z_1 = \dfrac{30}{2} = 15\ cm; y_1 = \dfrac{60}{2} = 30\ cm \\ S_{z(1)} = 1800 \times 15 = 27000\ cm^3 \\ S_{y(1)} = 1800 \times 30 = 54000\ cm^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = \dfrac{9 \times 60}{2} = 270\ cm^2 \\ z_2 = 30 + \dfrac{9}{3} = 33\ cm; y_2 = \dfrac{60}{3} = 20\ cm \\ S_{z(2)} = 270 \times 33 = 8910\ cm^3 \\ S_{y(2)} = 270 \times 20 = 5400\ cm^3 \end{cases}$$

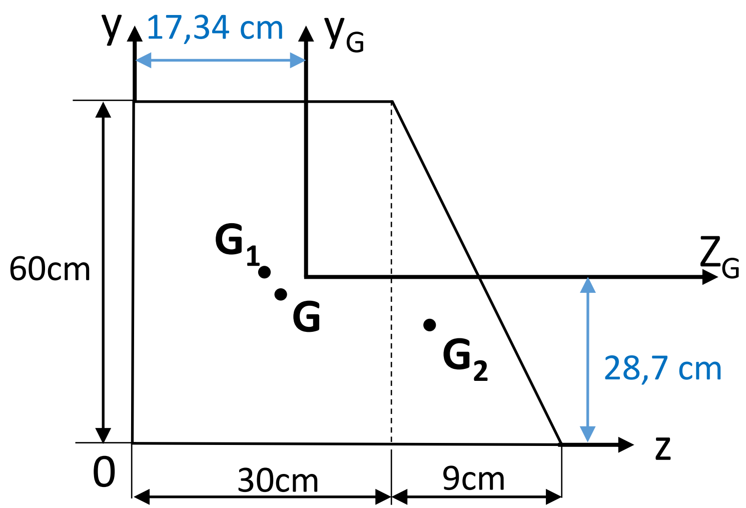


Figure .4: Exemple : section composée

L'aire de la section totale est $A = 1800 + 270 = 2070cm^2$

$$ZG = \frac{S_{z(1)} + S_{z(2)}}{A} = \frac{27000 + 8910}{2070} = 17{,}34cm$$

$$YG = \frac{S_{y(1)} + S_{y(2)}}{A} = \frac{54000 + 5400}{2070} = 28{,}70cm$$

3.3 Moments d'inertie d'une section

3.3.1 Moments d'inertie quadratiques

Selon la figure 1 nous pouvons exprimer les moments et produit d'inertie a l'aide des formules suivantes:

$$I_z = \int_A y^2 \, dA$$

$$Iy = \int_A z^2 dA$$

$$Izy = \int_A z \, y \, dA$$

Les moments d'inertie sont toujours positifs (produit d'un carre par une surface), par contre le produit d'inertie peut être aussi bien positif que négatif, selon la disposition de la section par rapport aux axes z et y (voir figure 5).

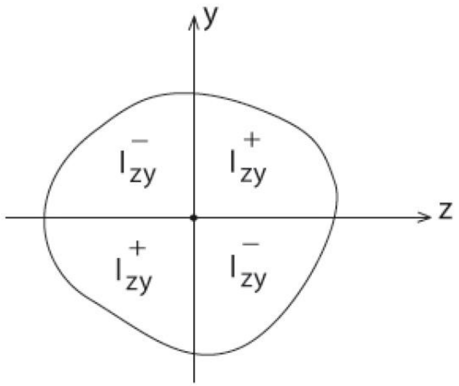


Figure. 5: Signe du produit d'inertie

Remarque :
Si la majorité des points de la section sont situes dans les quadrants positifs le produit d'inertie sera positif, Si la majorité des points de la section sont situes dans les quadrants négatifs le produit d'inertie sera négatif.

Exemple 2:
Déterminer les moments d'inertie d'une section rectangulaire $(b \times h)$, par rapport a ses axes centraux. L'aire de l'‘élément différentiel hachure (voir figure 6) est : $dA = b\ dy$ ou $dA = h\ dx$

$$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2\, b\, dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b\left[\frac{h^3}{8\times 3} + \frac{h^3}{8\times 3}\right] = \frac{b\,h^3}{12}$$

$$I_y = \int_A x^2\, dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2\, h\, dx = h\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = h\left[\frac{b^3}{8\times 3} + \frac{b^3}{8\times 3}\right] = \frac{h\,b^3}{12}$$

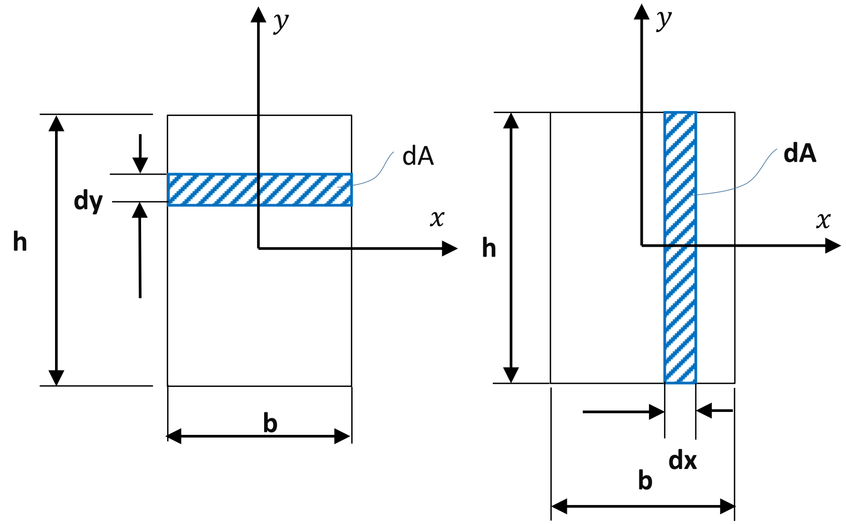


Figure. 6: Exemple : Moments d'inertie par rapport aux axes centraux

3.3.2 Moment d'inertie polaire

Le moment d'inertie polaire d'une section par rapport a un point appelé pôle est égale a la somme des moments d'inertie de cette section par rapport a deux axes orthogonaux passant par ce pôle (voir Figure 7).

$I_P = \int_A \rho^2 dA$ avec ρ le rayon du vecteur tel que : $\rho = \sqrt{z^2 + y^2}$

$$I_P = \int_A (z^2 + y^2)\, dA = \int_A z^2\, dA + \int_A y^2\, dA$$

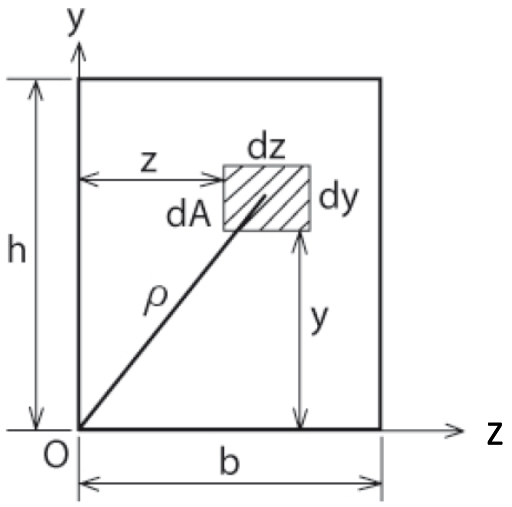


Figure. 7: Exemple : Moments d'inertie par rapport aux axes centraux

Exemple :

Déterminer les moments d'inertie quadratiques et polaires d'une section circulaire de diamètre D

L'aire de l'élément différentiel hachure (voir figure 7) est défini par :

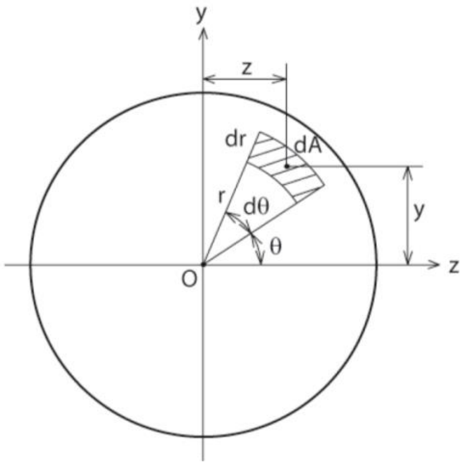


Figure. 7: Exemple : Moment d'inertie polaire

$$dA = r\,d\theta\ dr \qquad z = r\ \cos\theta \qquad y = \mathrm{r}\sin\theta$$

$$I_z = \int_A y^2\,dA = \int_A r^2\sin^2\theta\ r\,d\theta dr = \int_0^{\frac{D}{2}} r^3\,dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\ d\theta$$

$$I_z = \int_0^{\frac{D}{2}} r^3\,dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \left[\frac{(r)^4}{4}\right]_0^{\frac{D}{2}} \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{D^4}{64}\frac{1}{2}(2\pi - 0) = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$I_y = \int_A z^2\,dA = \int_A r^2\cos^2\theta\ r\,d\theta dr = \int_0^{\frac{D}{2}} r^3\,dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ \ d\theta$$

$$I_y = \int_0^{\frac{D}{2}} r^3\,dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \left[\frac{(r)^4}{4}\right]_0^{\frac{D}{2}} \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{D^4}{64}\frac{1}{2}(2\pi) = \frac{\pi D^4}{64}$$

et le moment d'inertie polaire :

$$I_p = \int_A \rho^2\,dA = \int_A r^2\,r\,d\theta\,dr = \int_0^{\frac{D}{2}} r^3\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{(r)^4}{4}\right]_0^{\frac{D}{2}} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{D^4}{16\times4}[2\pi] = \frac{\pi D^4}{32} = \boldsymbol{I_z} + \boldsymbol{I_y}$$

3.3.3 Formules de translation d'axes (Théorème de Huyghens)

Si on connaît les moments et produit d'inertie d'une section par rapport a ses axes centraux $(z_G\ G\ y_G)$ on peut déterminer les moments et produit d'inertie par rapport a tout autre repère quelconque $(z\ O\ y)$ dont les axes sont parallèles a G_{z_G} et G_{y_G} (voir figure 8).

$$z' = z + a \quad \text{et} \quad y' = y + b$$

$$I_y = \int_A z'^2\, dA = \int_A (z+a)^2\, dA = \int_A z^2\, dA + 2a \int_A z\, dA + \int_A a^2\, dA$$

Comme les moments statiques par rapport aux axes centraux sont nul

$$\int_A z\, dA = 0; \quad \int_A a^2\, dA = a^2 A \quad et \quad \int_A z^2\, dA = I_{yG}$$

Alors :

$$I_y = I_{yG} + a^2 A$$

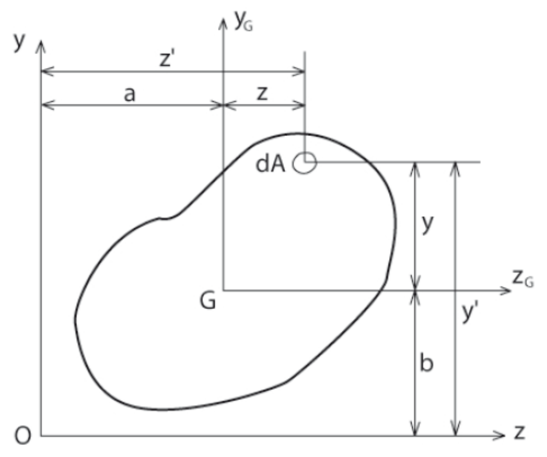


Figure. 8: Théorème de Huyghens

par analogie on obtient le moment d'inertie Iz et le produit d'inertie Izy :

$$I_z = I_{zG} + b^2 A$$

Exemple 3:

A partir des résultats des moments d'inerties des axes centraux calculé dans l'exemple 3, déterminer les moments d'inertie d'une section rectangulaire $(b \times h)$, par rapport a ses côtes.

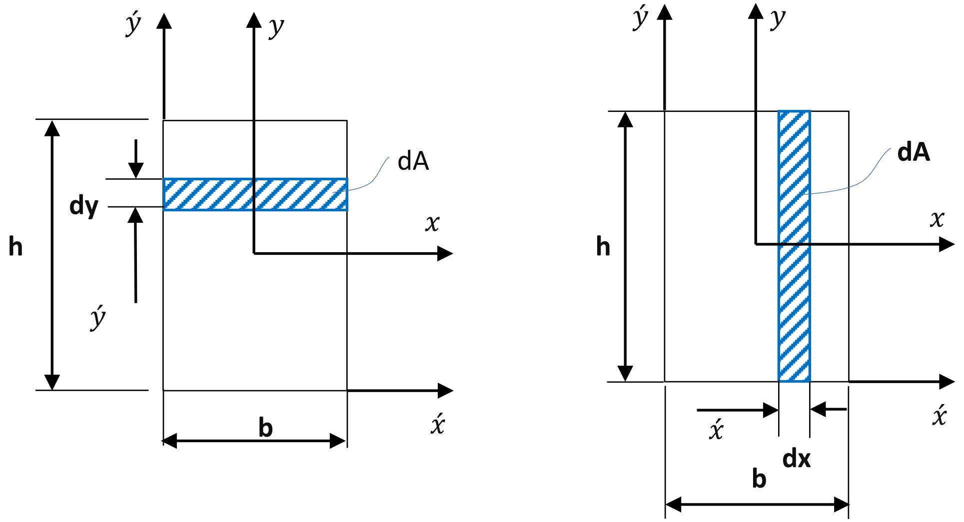


Figure. 7: Exemple : Moments d'inertie par rapport aux axes centraux

$$I_{x'} = Ix + \left(\frac{h}{2}\right)^2 A = \frac{b\,h^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 (b \times h) = \frac{b\,h^3}{12} + \frac{h^3 b}{4} = \frac{b\,h^3}{3}$$

$$I_{y'} = Iy + \left(\frac{b}{2}\right)^2 A = \frac{h\,b^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 (b \times h) = \frac{h\,b^3}{12} + \frac{b^3 h}{4} = \frac{h\,b^3}{3}$$

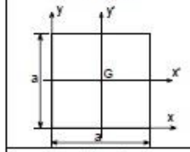
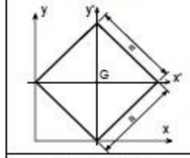
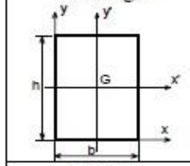
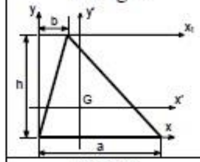
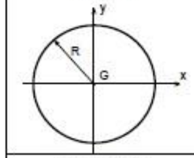
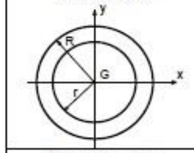
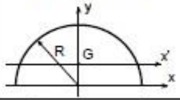
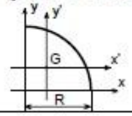
4.4 Rayons de giration

En divisant le moment d'inertie, par rapport a un certain axe, par l'aire de section on obtient le carre d'une certaine longueur. Cette longueur i est appelée rayon de giration par rapport a cet axe. Pour les axes y et z, les rayons de giration sont :

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

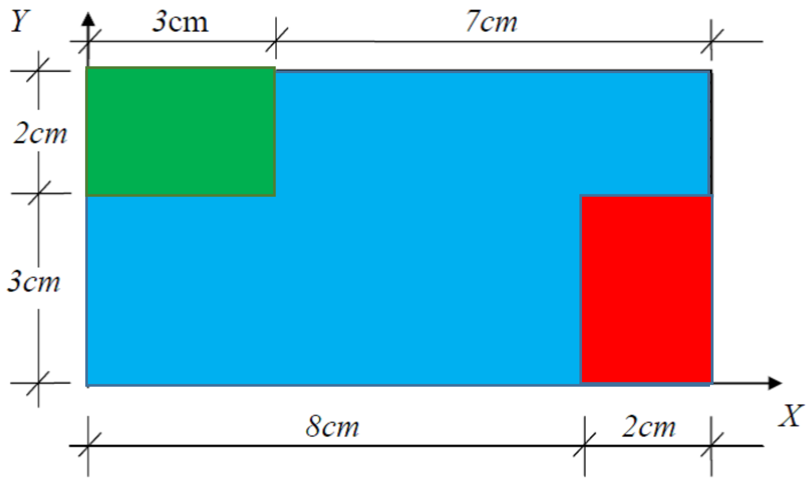
$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

Récapitulatif des centres de gravité et moment d’inerties

Sections usuelles	Aire de la section	Position du centre de gravité	Moments d’inertie et produit d’inertie
Carré 	$S = a^2$	$x_G = \frac{a}{2}$ $y_G = \frac{a}{2}$	$I_{x'} = I_{y'} = \frac{a^4}{12}$ $\quad I_{x'y'} = 0$ $I_x = I_y = \frac{a^4}{3}$ $\quad I_{xy} = \frac{a^4}{4}$
Carré 	$S = a^2$	$x_G = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$ $y_G = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$	$I_{x'} = I_{y'} = \frac{a^4}{3}$
Rectangle 	$S = h \times b$	$x_G = \frac{b}{2}$ $y_G = \frac{h}{2}$	$I_{x'} = \frac{bh^3}{12}$ $\quad I_{y'} = \frac{hb^3}{12}$ $\quad I_{x'y'} = 0$ $I_x = \frac{bh^3}{3}$ $\quad I_y = \frac{hb^3}{3}$ $\quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$
Triangle 	$S = \frac{a \times h}{2}$	$x_G = \frac{b+a}{3}$ $y_G = \frac{h}{3}$	$I_{x'} = I_{y'} = \frac{ah^3}{36}$ $\quad I_{x_1} = \frac{ah^3}{4}$ $\quad I_{x'y'} = -\frac{a^2h^2}{72}$ $I_x = I_y = \frac{ah^3}{12}$ $\quad I_{xy} = \frac{a^2h^2}{24}$
Cercle 	$S = \pi \cdot R^2$	$x_G = 0$ $y_G = 0$	$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$ $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$
Couronne 	$S = \pi(R^2 - r^2)$	$x_G = 0$ $y_G = 0$	$I_p = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$ $I_x = I_y = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$
Demi-cercle 	$S = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$	$x_G = 0$ $y_G = \frac{4R}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8}$ $I_{x'} = R^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$
Quart de cercle 	$S = \frac{\pi \cdot R^2}{4}$	$x_G = \frac{4R}{3\pi}$ $y_G = \frac{4R}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$ $\quad I_{xy} = \frac{R^4}{16}$ $I_{x'} = R^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)$

Exercice 1

Calculer les coordonnées du centre de gravité de la section plane suivante



Solution

$$\begin{cases} A_1 = 10 \times 5 = 50\ cm^2 \\ x_1 = 5\ cm;\ \ y_1 = 2.5\ cm \\ Sx(1) = 5 \times 50 = 250\ cm^3 \\ Sy(1) = 2.5 \times 50 = 125\ cm^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = 3 \times 2 = 6\ cm^2 \\ x_2 = 1.5\ cm;\ \ y_2 = 4\ cm \\ Sx(2) = 1.5 \times 6 = 9\ cm^3 \\ Sy(2) = 4 \times 6 = 24\ cm^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = 2 \times 3 = 6\ cm^2 \\ x_3 = 9\ cm;\ \ y_3 = 1.5\ cm \\ Sx(3) = 9 \times 6 = 54\ cm^3 \\ Sy(3) = 1.5 \times 6 = 9\ cm^3 \end{cases}$$

La surface totale A est calculé par la relation suivante :

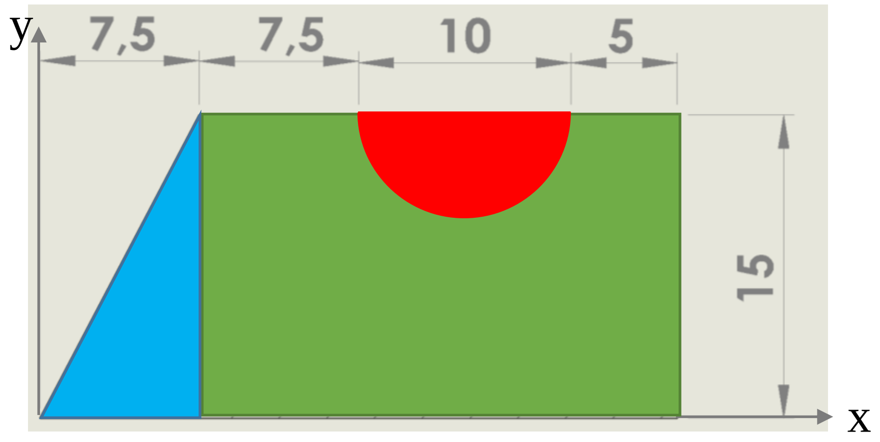
$$A = A1 - A2 - A3 \Rightarrow A = 50 - 6 - 6 = 38\ cm^2$$

$$X_G = \frac{\sum Sx(i)}{\sum A\,(i)} = \frac{250 - 9 - 54}{38} = 4.92\ cm$$

$$Y_G = \frac{\sum Sy(i)}{\sum A\,(i)} = \frac{125 - 24 - 9}{38} = 2.42\ cm$$

Exercice 1

Déterminer le centre de gravité G de la partie hachurée de la figure suivante



Solution

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{7{,}5 \times 15}{2} = 56{,}25\ cm^2 \\ x_1 = \dfrac{7{,}5}{3}2 = 5\ cm;\ \ y_1 = \dfrac{15}{3} = 5\ cm \\ Sx(1) = 5 \times 56{,}25 = 281{,}25\ cm^3 \\ Sy(1) = 5 \times 56{,}25 = 281{,}25 cm^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = 22{,}5 \times 15 = 337{,}5\ cm^2 \\ x_2 = 18{,}75\ cm;\ \ y_2 = 7{,}5\ cm \\ Sx(2) = 18{,}75 \times 337{,}5 = 6328{,}13\ cm^3 \\ Sy(2) = 7{,}5 \times 337{,}5 = 2531{,}25\ cm^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3 = \dfrac{\pi \times 5^2}{2} = 39{,}27\ cm^2 \\ x_3 = 20cm;\ \ y_3 = 15 - \dfrac{4 \times 5}{3\pi} = 12{,}88cm \\ Sx(3) = 39{,}27 \times 20 = 785{,}4\ cm^3 \\ Sy(3) = 39{,}27 \times 12{,}88 = 505{,}72\ cm^3 \end{cases}$$

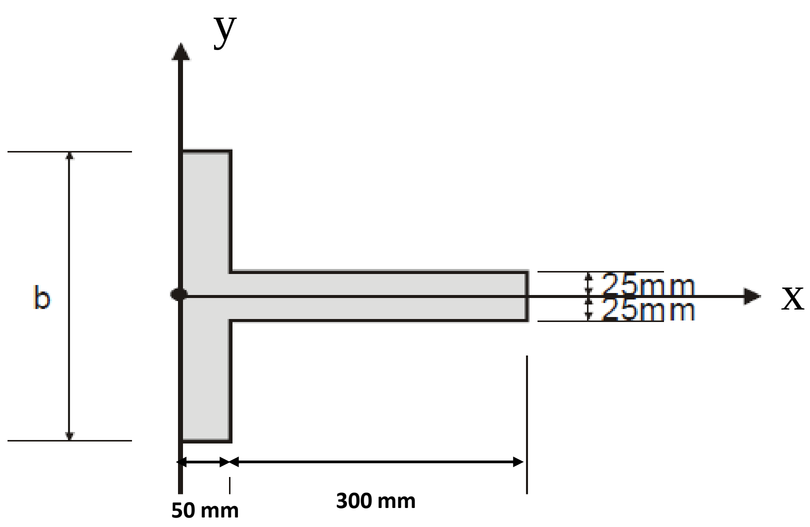
La surface totale A est calculer par la relation suivante :

$$A = A1 + A2 - A3 \Rightarrow A = 56{,}25 + 337{,}5 - 39{,}27 = 354{,}48\ cm^2$$

$$X_G = \frac{\sum Sx(i)}{\sum A\,(i)} = \frac{281{,}25 + 6328{,}13 - 785{,}4}{354{,}48} = 16{,}43\ cm \qquad Y_G = \frac{\sum Sy(i)}{\sum A\,(i)} = \frac{281{,}25 + 2531{,}25 - 505{,}72}{354{,}48} = 6{,}51\ cm$$

Exercice 3

Calculez pour la surface ci-contre les moments d'inertie Ixx et Iyy si b = 25 cm .



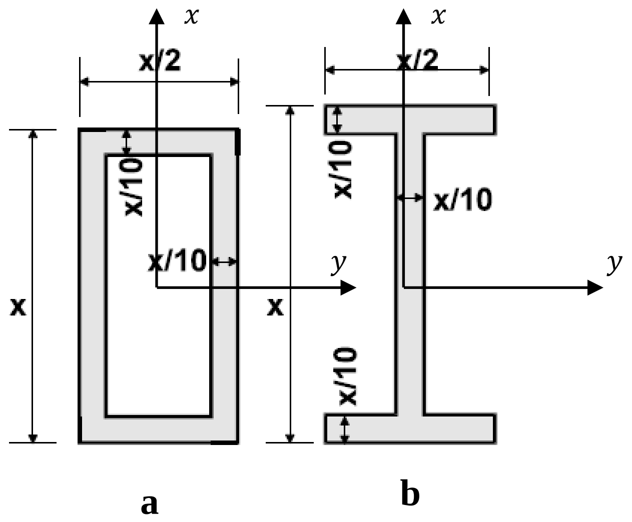
Solution

a) b=25 cm

$$I_{xx} = \frac{30 \times 5^3}{12} + \frac{5 \times 25^3}{12} = 6822.92\ cm^4$$

$$I_{yy} = \frac{5 \times 30^3}{12} + 20^2 \times 30 \times 5 + \frac{25 \times 5^3}{12} + 2.5^2 \times 5 \times 25 = 72291.67\ cm^4$$

Exercice 4



1°) Calculez pour chaque surface la valeur de x et la section de telle façon que le moment d'inertie central Iyy maximum est 54 cm^4.

Solution

a)

$$I_{yy}=\frac{x^4}{24}-\frac{\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{5}\right)\left(x-\frac{x}{5}\right)^3}{12}=54\ cm^4\ \Rightarrow x=\sqrt[4]{\frac{54}{\frac{1}{24}-\frac{8}{625}}}\Rightarrow x=6.58\ cm$$

$$A=\frac{6{,}58^2}{2}-\left(\frac{3\times 6{,}58}{10}\right)\left(\frac{4\times 6{,}58}{5}\right)\Rightarrow 11.25\ cm^2$$

b)

$$I_{yy}=\frac{x^4}{24}-\frac{\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{10}\right)\left(x-\frac{x}{5}\right)^3}{12}=54\ cm^4\ \Rightarrow x=\sqrt[4]{\frac{54}{\frac{1}{24}-\frac{64}{3750}}}\Rightarrow x=6.84\ cm$$

$$A=\frac{6{,}84^2}{2}-\left(\frac{2\times 6{,}84}{5}\right)\left(\frac{4\times 6{,}84}{5}\right)\Rightarrow A=8.42\ cm^2$$