

Chapitre 2: Etude de l'effort normal :Traction et Compression

2.1 Effort normal et contrainte normale

2.1.1 Effort normal

Une barre soumise a des forces extérieures parallèles a son axe longitudinal développera intérieurement des efforts intérieurs de liaison normaux a la section.

Convention de signe :

Si dans une section droite l'effort normal est dirigé de façon qu'il pointe en sens contraire de cette section, il est appelé effort normal de traction et il sera considéré conventionnellement positif.

Dans le cas où il pointe vers la section, il est appelé effort normal de compression et il sera considéré négatif, voir **figure 1**.

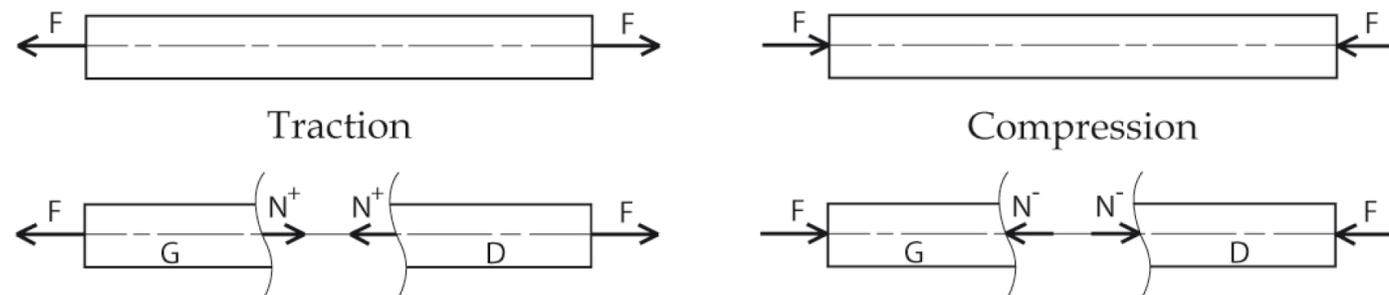


Figure. 1: Convention de signe

$$N(x) = \sum \vec{F}_{ix} (G) = \sum \vec{F}_{ix} (D)$$

La somme algébrique est régie ici par la convention de signe édictée précédemment.

2.1.2 Contrainte normale

Les contraintes se développant dans une section soumise à N sont normales à la section et auront le signe de l'effort normal.

Si dans une section droite l'effort N est de type traction, la contrainte correspondante sera dite contrainte normale de traction et elle est notée σ_t , dans le cas où l'effort N est de type compression alors la contrainte est dite contrainte normale de compression et elle est notée σ_c .

$$\sigma_t = \frac{N^+}{A} \quad \text{et} \quad \sigma_c = \frac{N^-}{A}$$

Remarques :

Dans une section soumise à un effort normal la répartition des contraintes est constante dans cette section (tous les points de la section sont soumis à la même contrainte).

Par contre le long de la barre la contrainte normale reste constante si l'effort normal et l'aire de la section ne varient pas le long de celle-ci, on dira alors que la contrainte est homogène, si cependant l'effort normal ou l'aire de la section est variable alors la contrainte ne sera pas homogène le long de la barre. Exemple : cas de la barre à section variable, ou d'une barre verticale soumise à son poids propre. (voir figure 2)

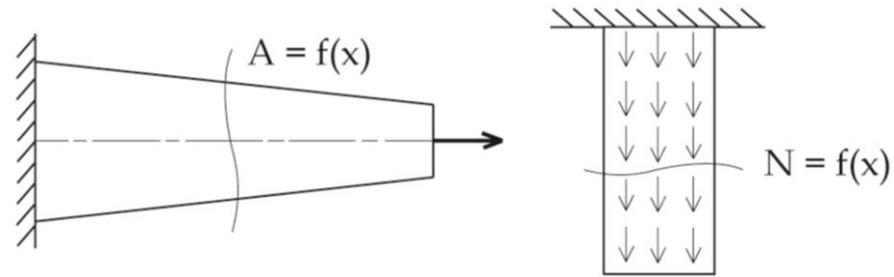


Figure. 2: Exemple de contrainte non homogène

2.2 Loi de Hooke et calcul des déformations

En appliquant deux forces égales et opposées aux extrémités d'une barre de section constante A et de longueur L celle-ci s'allonge (se raccourcit) d'une longueur ΔL comme indique sur la figure 3.

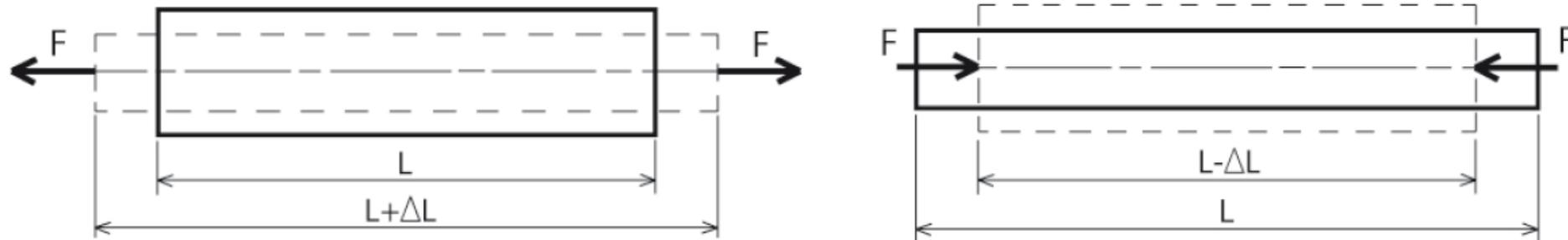


Figure. 3: Déformation d'une barre

ΔL : variation de longueur absolue.

$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$: déformation ou variation de la longueur unitaire.

En 1678, le savant anglais Robert HOOKE a établi expérimentalement que la relation entre la contrainte agissant sur les sections droites d'une barre est la déformation engendrée était linéaire, dans certaines limites des forces agissant sur la barre, et ce pour beaucoup de matériaux de construction.

La loi expérimentale en découlant est la loi de Hooke :

$$\sigma = E \varepsilon$$

E : module d'élasticité longitudinale ou module de Young, en [MPa], exprime l'une des caractéristiques mécaniques du matériau. Il est déterminé expérimentalement par l'essai de traction.

Quelques valeurs de E (module de Young) pour différents matériaux de construction :

$$E_{\text{Acier}} = 2 \text{ a } 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa ;}$$

$$E_{\text{Bton}} = 0,1 \text{ a } 0,3 \cdot 10^5 \text{ MPa ;}$$

$$E_{\text{Aluminium}} = 0,8 \text{ a } 0,9 \cdot 10^5 \text{ MPa.}$$

Nous avons établi auparavant que :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \text{ et } \sigma = \frac{N}{A}$$

En remplaçant ces deux relations dans la loi de Hooke, nous obtenons la relation liant l'effort à l'allongement absolu :

$$\Delta L = \frac{N L}{E A}$$

Cette relation est valide pour une barre sous état de contrainte homogène et constituée du même matériau sur toute sa longueur. Dans le cas de non homogénéité de contrainte ou de matériau il faudrait appliquer la loi de Hooke pour un segment de barre de longueur élémentaire dx puis généraliser à toute la barre en faisant la sommation sur toute la longueur de celle-ci (voir figure 4) :

$$\Delta dx = \frac{N(x) dx}{E(x) A(x)} \Rightarrow \Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{E(x) A(x)} dx$$

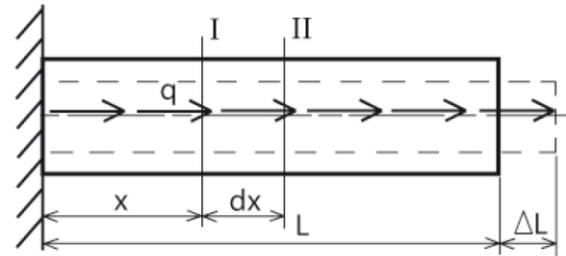


Figure 4: Cas de non homogénéité de contrainte ou de matériau

Remarques :

Si la barre est constituée de plusieurs tronçons tels que dans chaque tronçon l'homogénéité de la contrainte et du matériau est assurée alors en discrétisant la sommation sur la longueur de la barre :

$$\Delta L_T = \sum \Delta L_i \quad \text{avec} \quad \Delta L_i = \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$$

N_i : effort normal dans le tronçon i

L_i : longueur du tronçon i

E_i : module de Young du tronçon i

A_i : aire de la section du tronçon i

Exemple 1:

Déterminer l'allongement total d'une barre verticale de section A et de longueur L, de poids volumique γ . (figure 5)

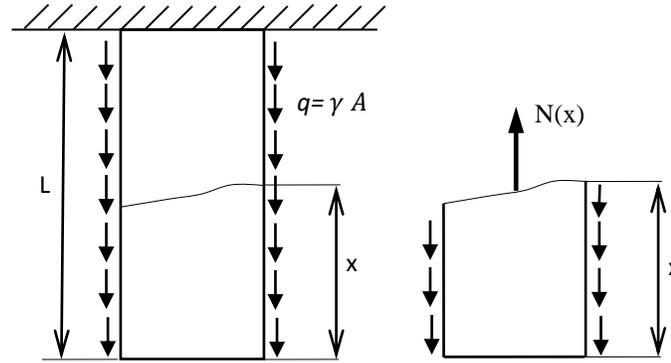


Figure. 5: Exemple d'application

$N(x) = q \cdot x = \gamma \cdot A \cdot x$: fonction linéaire de x

La contrainte normale dans la section d'abscisse x:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \gamma \cdot x \quad : \text{Fonction linéaire de x}$$

L'allongement de la partie de la barre de longueur x:

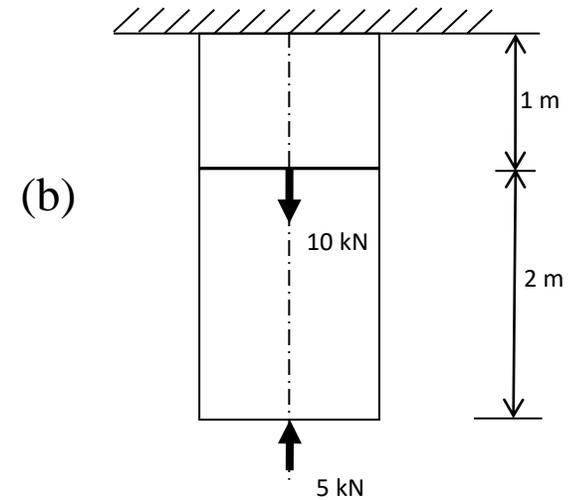
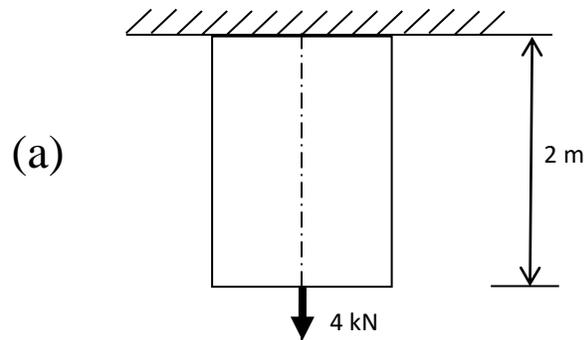
$$\Delta L(x) = \int_0^x \frac{N(x)}{E \cdot A} dx = \frac{1}{E} \int_0^x \sigma(x) dx = \frac{\gamma}{E} \int_0^x x dx = \frac{\gamma}{E} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right] \quad : \text{fonction parabolique de x}$$

L'allongement total de la barre:

$$\Delta L_T = \Delta L(x = L) = \frac{\gamma \cdot L^2}{2 \cdot E}$$

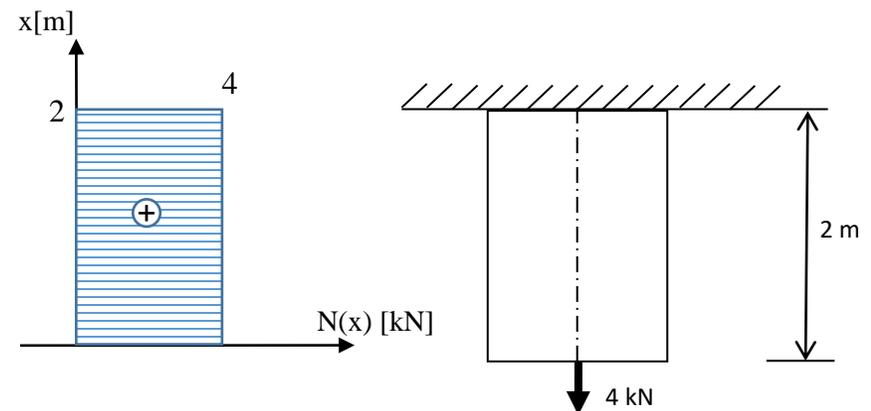
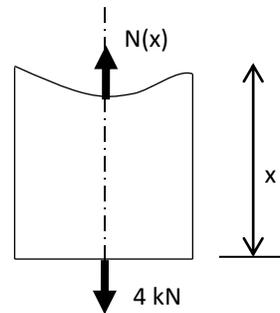
Exemple 2:

- Tracer les diagramme des efforts normaux des systèmes suivant



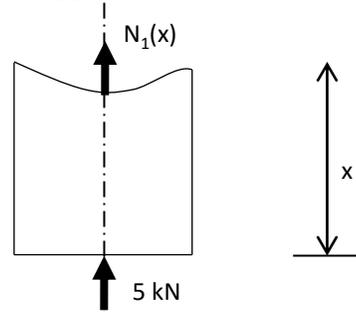
- (a) Diagramme des efforts normaux

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}(x) - 4 = 0 \Rightarrow \vec{N}(x) = 4 \text{ kN}$$



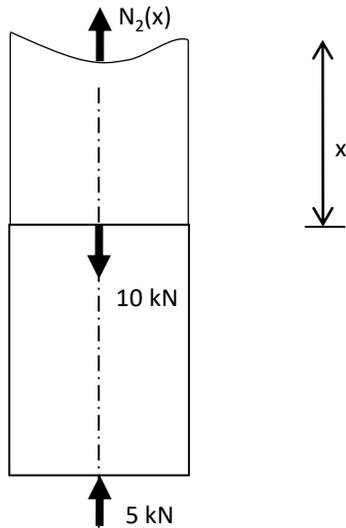
• (b) Diagramme des efforts normaux

1^{er} tronçon $0 \leq x \leq 2$

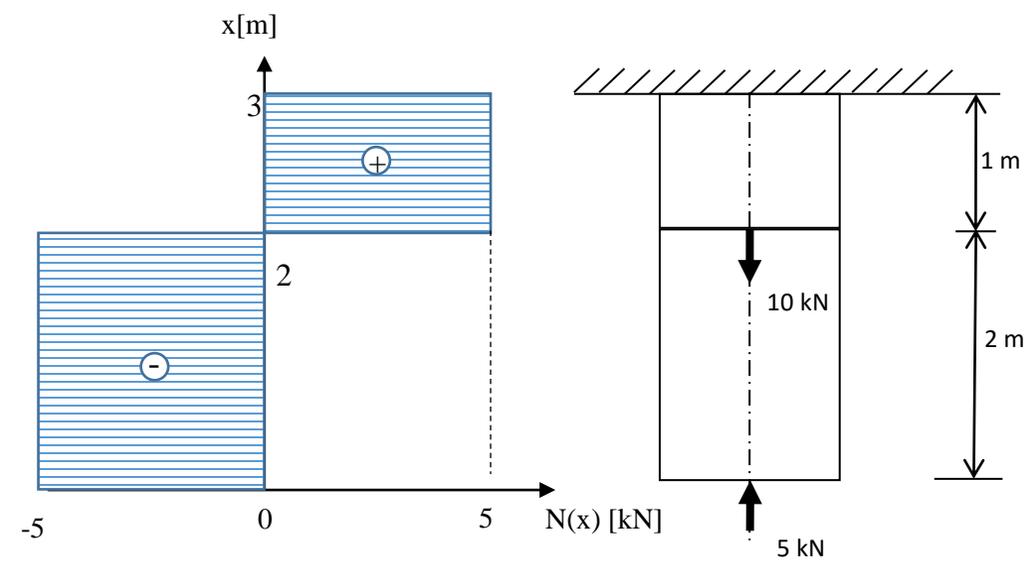


$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_1(x) + 5 = 0 \Rightarrow \vec{N}_1(x) = -5 \text{ kN}$$

2^{eme} tronçon $2 \leq x \leq 3$



$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_2(x) + 5 - 10 = 0 \Rightarrow \vec{N}_2(x) = 5 \text{ kN}$$



2.3 Coefficient de Poisson

La déformation longitudinale s'accompagne d'une déformation transversale, pour définir cette corrélation on introduit le coefficient de Poisson . (figure 6)

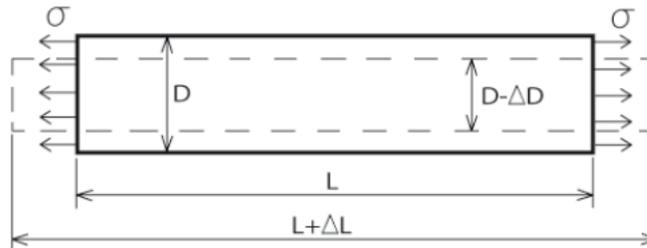


Figure. 6: Déformation longitudinale et transversale

$$\nu = \frac{\epsilon_{tr}}{\epsilon_l} \text{ avec } \epsilon_l = \frac{\Delta L}{L} \text{ et } \epsilon_{tr} = \frac{\Delta D}{D}$$

Le coefficient de Poisson est une constante mécanique caractérisant le matériau. Pour un matériau isotrope sa valeur ne dépasse jamais 0,5.

Quelques valeurs de (coefficient de Poisson) pour différents matériaux de construction :

$$\nu_{Acier} = 0,25 \text{ à } 0,33 ;$$

$$\nu_{Aluminium} = 0,32 \text{ à } 0,36 ;$$

$$\nu_{caoutchouc} = 0,5.$$

Remarque :

A partir de E et de ν on peut définir une autre caractéristique mécanique du matériau qui aura elle aussi la dimension d'une contrainte, il s'agit du module d'élasticité transversal ou module de glissement, noté G :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

2.4 L'essai de traction

Pour déterminer les caractéristiques physiques décrivant le comportement mécanique des matériaux vis-à-vis des charges et des déformations en résultant on exécute les essais de traction sur des échantillons dont les dimensions sont normalisées. Pour déterminer les caractéristiques des matériaux (E , G et ν) il est nécessaire d'effectuer des essais expérimentaux. Le plus répandu et en même temps le plus simple est l'essai de traction.

L'expérience de traction nécessite :

- Une machine (**figure 6a, 6b**) qui développe une force modulable de zéro à une valeur maximale caractéristique de la machine et qui mesure les allongements et les amincissements de l'échantillon.
- L'échantillon qu'on appelle éprouvette (**figure 6c**) qui a des dimensions normalisées, il est soit tourné dans une barre (de forme cylindrique) ou découpé dans de la tôle (la section étant rectangulaire) ; à leurs deux extrémités les têtes de l'éprouvette sont réalisées plus larges que dans la partie centrale qu'on appelle partie travaillante.

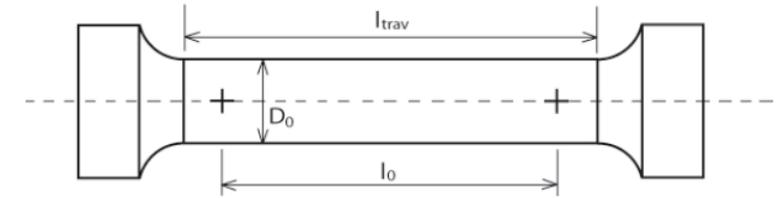
Où $l_{trav} = 15 D_0$ et l_0 défini comme longueur initiale (voir figure 6c).



(a)



(b)



(c)

Figure. 6: Eprouvette de l'essai de traction

L'essai de traction se déroule de la force zéro jusqu'à la rupture de l'éprouvette.

Le diagramme force (F) - allongement (l) de la longueur l_0 , pour l'acier doux, a l'aspect représenté sur la figure 7.

On partage le diagramme en zones correspondant aux différents comportements de l'éprouvette pendant l'essai.

Zone OA : Zone élastique où s'applique la loi de Hooke. L'éprouvette s'allonge proportionnellement aux efforts, jusqu'au point A si la force de traction est supprimée l'éprouvette reprend sa longueur initiale.

Zone AB : Zone d'écoulement général (élasto-plastique). Le segment AB est appelé palier d'écoulement, cette phase se caractérise par une variation de longueur importante alors que la force reste sensiblement constante. Dans la plupart des cas de matériaux on observe pas de palier AB. Au-delà du point A si on annule la force de traction l'éprouvette ne reprend pas sa longueur initiale, il subsistera un allongement résiduel.

Zone BC : Zone d'écrouissage. L'allongement continue d'augmenter malgré un accroissement de la force plus faible que dans la zone élastique.

Le point C : A partir de ce point l'éprouvette s'étrangle (voir figure 8) et l'allongement va continuer à croître alors que la force décroît (on dit que la rupture est amorcée). C définit le point où la force atteint sa valeur max.

Le point D : Point où interviendra la rupture de l'éprouvette.

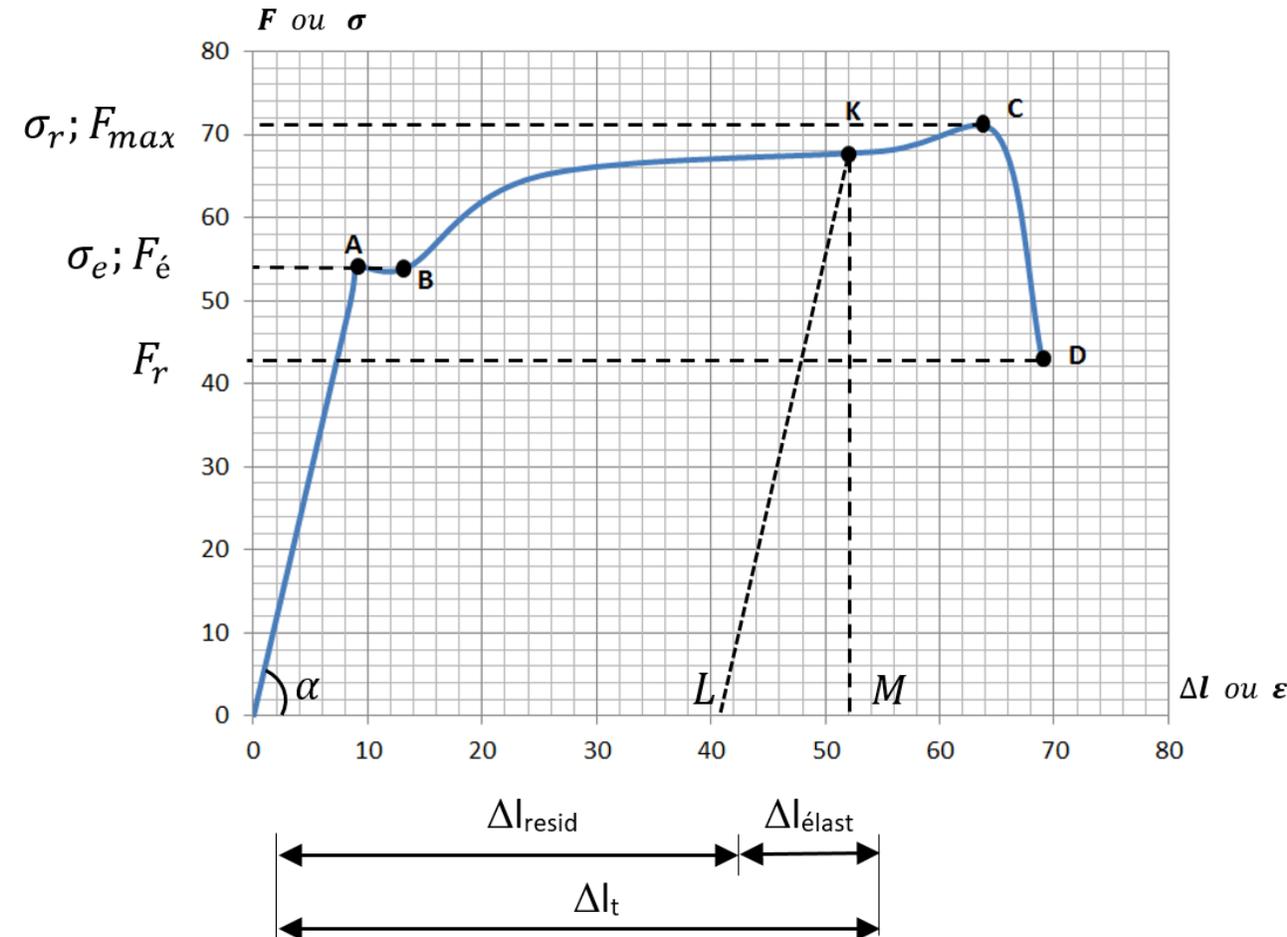


Figure. 7: Diagramme de l'essai de traction

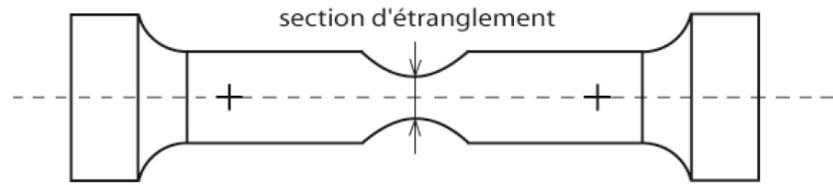


Figure. 8: Etranglement de la section de l'éprouvette

σ_e : contrainte limite d'élasticité,

σ_r : contrainte de rupture,

δ : allongement de rupture,

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = tg(\alpha)$: module de Young.

En général tous les matériaux ne développent pas le même diagramme ($F/\Delta L$) que celui de l'acier doux, l'importance des différentes phases sont plus ou moins importante en fonction des caractéristiques élastiques du matériau, c'est-à-dire de sa propriété à présenter de grandes déformations résiduelles sans rupture.

Certains matériaux ne développent pas de phase d'écoulement voire pas du tout de phase plastique. Pour cela on classe les matériaux en matériaux plastiques (ceux pour lesquels la phase plastique existe, **ex:** *Aluminium, Acier doux, Cuivre...*) et les matériaux fragiles (ceux pour lesquels la phase plastique n'existe pas ou est très brève, **ex:** *Fonte, Verre, Brique, Pierre...*).

2.5 Contraintes admissibles et condition de résistance

Toute pièce mécanique doit être calculée pour satisfaire à son fonctionnement avec une certaine marge de sécurité et sous les différentes sollicitations imposées durant son cycle de vie. C'est pour tenir compte d'un certain nombre d'incertitudes relatives à la composition réelle du matériau, à ses propriétés mécaniques, à la conformité de la pièce avec les hypothèses de la Résistance des Matériaux, ou même aux états de surface de la pièce ainsi qu'à son vieillissement, que les concepteurs sont conduits à adopter un certain coefficient de sécurité (s) par rapport à la limite élastique qui s'exprime par :

$$\sigma_{adm} = \sigma_p = \frac{\sigma_e}{s}$$

La caractéristique σ_p du matériau, est appelée résistance pratique en traction. On la définit généralement, non à partir de la limite élastique

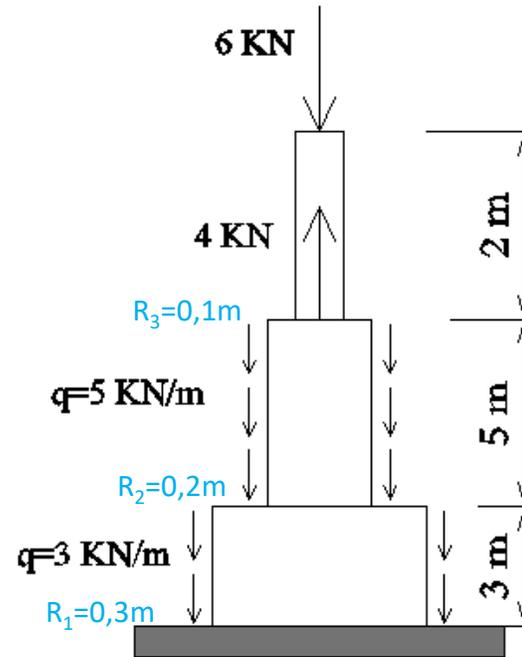
Un état de contrainte donne satisfait au critère de résistance si :

$$\sigma \leq \sigma_p$$

Les coefficients de sécurité choisis par le concepteur dépendent du degré de fiabilité souhaité pour la pièce et de la connaissance des contraintes qui s'appliquent sur elle. Ce coefficient est de l'ordre 4 à 8 pour les métaux et de 10 à 12 pour les bois.

Exemple

- Tracer les diagramme des efforts normaux $N(x)$ et contraintes normales $\sigma(x)$ du système suivant
- Calculer l'allongement totale Δl , où $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Mpa}$



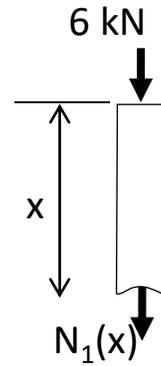
- Diagramme des efforts normaux et contraintes normales

1^{er} tronçon $0 \leq x \leq 2$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_1(x) + 6 = 0 \Rightarrow \vec{N}_1(x) = -6 \text{ kN}$$

$$\vec{\sigma}_1(x) = \frac{-6}{0,1^2 \pi}$$

$$\vec{\sigma}_1(x) = -191,08 \text{ kN/m}^2$$



2^{eme} tronçon $2 \leq x \leq 7$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_2(x) + 6 - 4 + q(x) = 0 \Rightarrow \vec{N}_2(x) = -2 - 5(x)$$

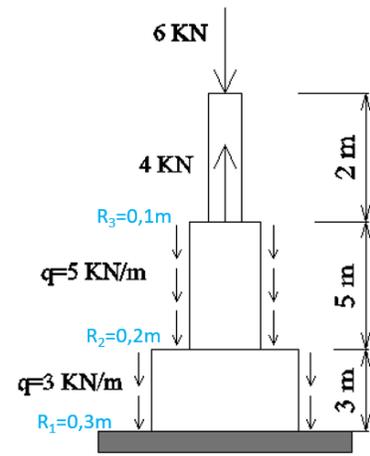
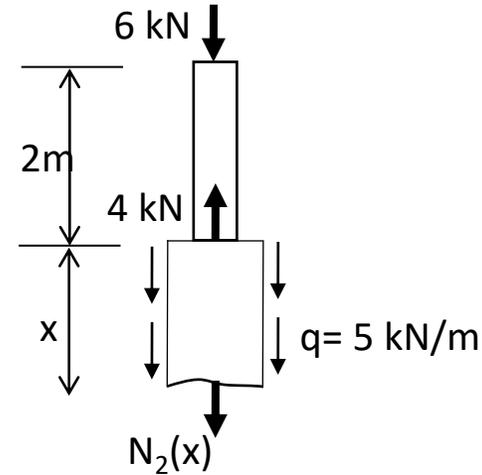
$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \vec{N}_2(x) = -2 \text{ kN}$$

$$\text{Si } x = 5 \Rightarrow \vec{N}_2(x) = -27 \text{ kN}$$

$$\vec{\sigma}_2(x) = \frac{-2 - 5(x)}{0,2^2 \pi}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \vec{\sigma}_2(x) = -15,918 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Si } x = 5 \Rightarrow \vec{\sigma}_2(x) = -214,963 \text{ kN/m}^2$$



3^{eme} tronçon $7 \leq x \leq 10$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_3(x) + 6 - 4 + 5(5) + q(x) = 0 \Rightarrow \vec{N}_3(x) = -27 - 3(x)$$

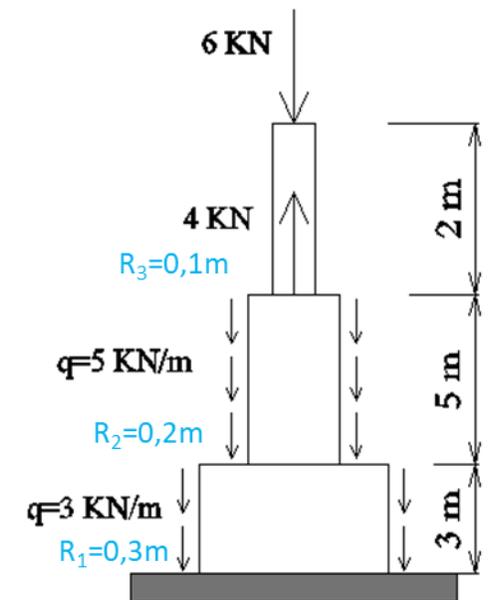
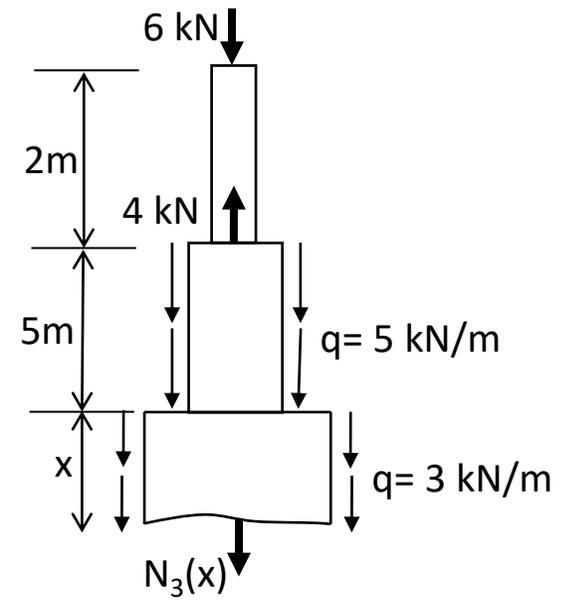
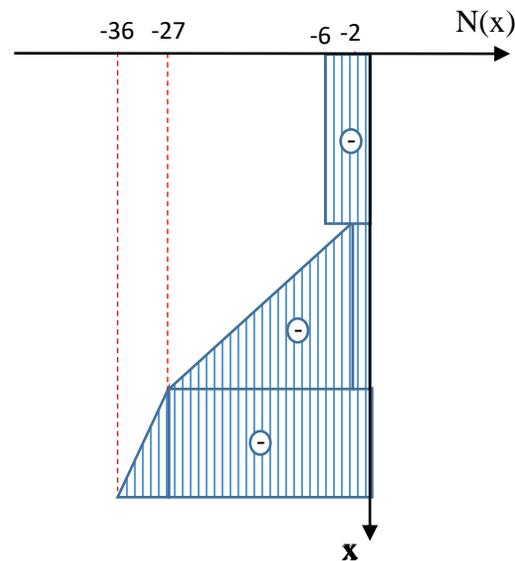
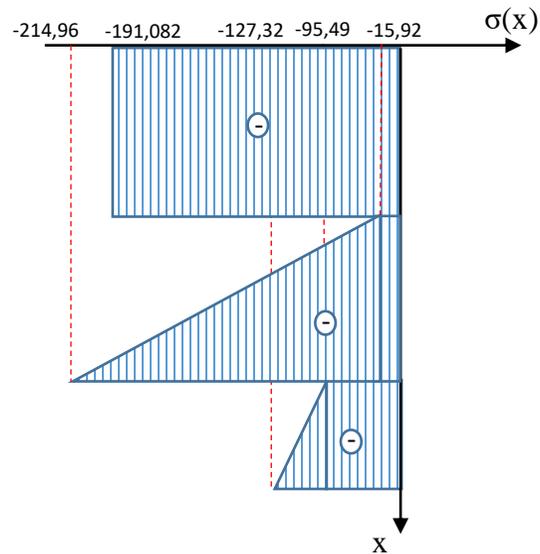
$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \vec{N}_3(x) = -27 \text{ kN}$$

$$\text{Si } x = 3 \Rightarrow \vec{N}_3(x) = -36 \text{ kN}$$

$$\vec{\sigma}_3(x) = \frac{-27 - 3(x)}{0,3^2 \pi}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \vec{\sigma}_3(x) = -95,49 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Si } x = 3 \Rightarrow \vec{\sigma}_3(x) = -127,32 \text{ kN/m}^2$$



- l'allongement Δl

$$\Delta L = \Delta L1 + \Delta L2 + \Delta L3$$

$$\Delta L1 = \int_0^{l1} \frac{\vec{\sigma}_1(x)}{E} dx = \frac{1}{E} \int_0^{l1} \frac{-6}{0,1^2 \pi} dx = \frac{1}{2,1 \cdot 10^{11} \times 0,1^2 \pi} [-6x]_0^2 = -1,819 \cdot 10^{-9} m$$

$$\Delta L2 = \int_0^{l2} \frac{\vec{\sigma}_2(x)}{E} dx = \frac{1}{E} \int_0^{l2} \frac{-2 - 5(x)}{0,2^2 \pi} dx = \frac{1}{2,1 \cdot 10^{11} \times 0,2^2 \pi} \left[-2x - 5 \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = -2,747 \cdot 10^{-9} m$$

$$\Delta L3 = \int_0^{l3} \frac{\vec{\sigma}_3(x)}{E} dx = \frac{1}{E} \int_0^{l3} \frac{-27 - 3(x)}{0,3^2 \pi} dx = \frac{1}{2,1 \cdot 10^{11} \times 0,3^2 \pi} \left[-27x - 3 \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = -1,592 \cdot 10^{-9} m$$

$$\Delta L = -1,819 \cdot 10^{-9} + -2,747 \cdot 10^{-9} + -1,592 \cdot 10^{-9} = -6,158 \cdot 10^{-9} m = -6,158 \cdot 10^{-6} mm$$

