Chapitre 1: Introduction et généralité sur la R.D.M

1. Introduction

La résistance des matériaux (RDM) est l'étude de la résistance et de la déformation des éléments d'une structure (bâtiment en béton, vélo et moto, moteur a combustion, boite de vitesse, excavatrice, Robot cartésien)(**Figure, 1**), dans le but de déterminer ou de vérifier leurs dimensions afin qu'ils supportent les charges dans des conditions de sécurité satisfaisantes et au meilleur cout. L'objectif de ce cours est l'étude de la résistance des solides vis-à-vis de sollicitations en efforts et leur déformation lors de ces sollicitations.

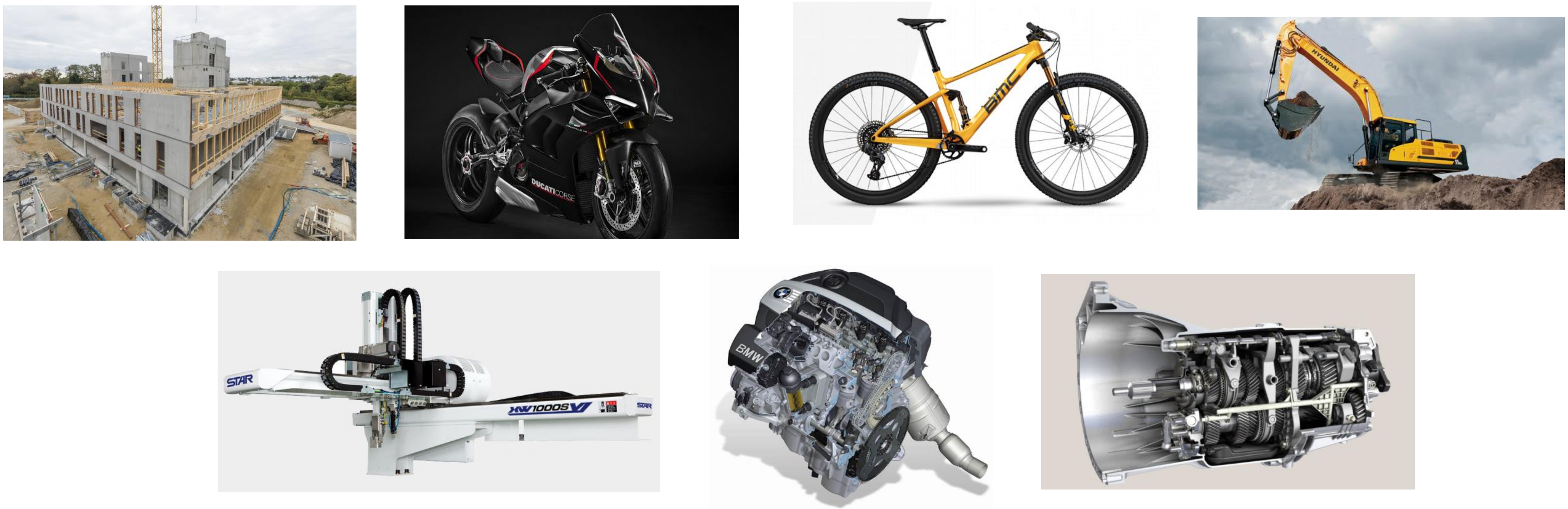


Figure. 1: Exemples de structures

2. Problèmes traites par la R.D.M

La résistances des matériaux nous permet de traiter trois types de problèmes, qui sont :

- **Problème de dimensionnement**
- *On connait* : Les forces appliquées sur la construction ainsi que les caractéristiques mécaniques des matériaux avec lesquelles sera réalisée la construction.
- *On détermine* : Les dimensions de la construction.
- **Problème de vérification**
- *On connait* : Les forces, les caractéristiques mécaniques du matériau et les dimensions de la construction
- *On vérifie* : La résistance et la rigidité de la construction.
- **Problème de portance d'une construction**
- *On connait* : Les caractéristiques mécaniques du matériau ainsi que les dimensions de la construction.
- *On détermine* : Les charges extérieures que pourra supporter cette construction.

3. Hypothèses sur le matériau en R.D.M.

Dans son utilisation courante, la RDM fait appel aux hypothèses suivante:

Le matériau est:

- **Élastique:** le matériaux reprend sa forme initiale après un cycle chargement déchargement.
- **Linéaire:** les déformations son proportionnelles aux contraintes
- **Homogène:** le matériau est de même nature dans toute sa masse
- **Isotrope:** les propriétés du matériau sont identiques dans toute les direction

Le problème est

En **petits déplacements:** les déformations de la structure résultant de son chargement son négligeables et n'affectent pratiquement pas sa géométrie,

Quasi statique: pas d'effet dynamique

Quasi isotherme: pas de changement de température,

4. Les différents type de corps étudies.

4.1 Les différents type de corps études

Lors du calcul R.D.M. les corps sont schématises (des simplifications dans la géométrie de la construction sont admises). En fonction de l'importance des dimensions des éléments de construction on, les classera en 2 catégories :

Les barres

Les barres (**figures 2** et **3**)sont les éléments dont l'une des dimensions (la longueur) est bien plus grande que les deux autres qui représentent les dimensions transversales (L > 4 a 5 fois max (a, b)).

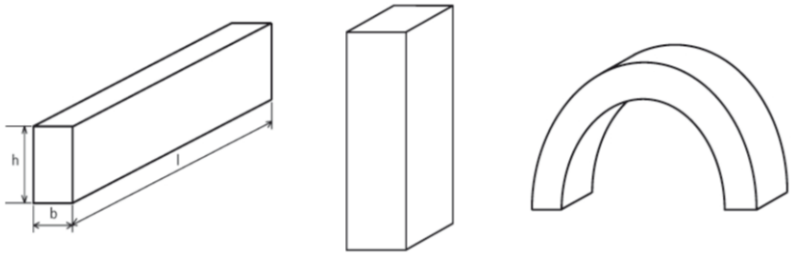


Figure. 3: Exemples de variante d'élément barre

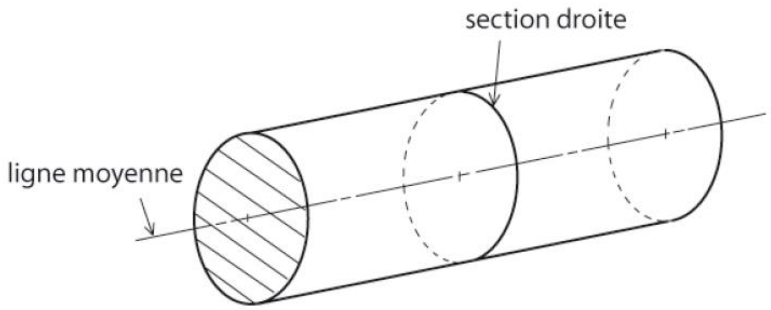


Figure. 2: L'élément barre

Les enveloppe (plaques, coques et membranes)

Les enveloppes sont des corps dont une des dimensions (l'épaisseur) est bien plus petite que les deux autres. Exemples (**figure 4**): Les coupoles, les parois de cuve, les dalles et les voiles de bâtiments.

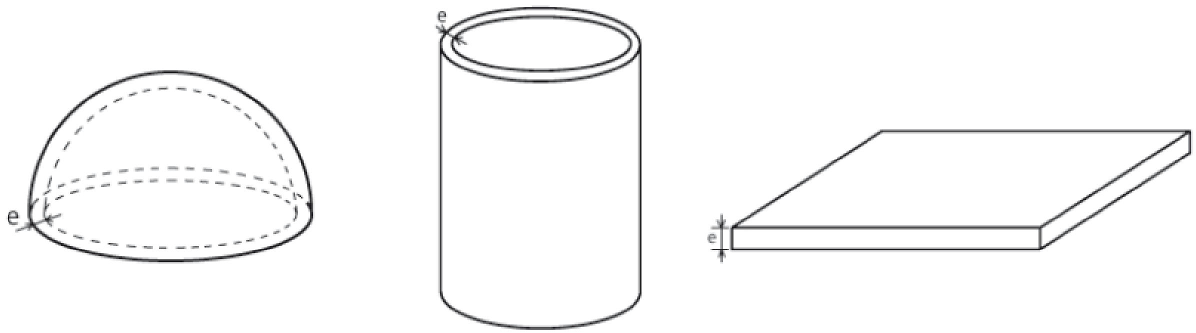


Figure 4: Exemples de l'élément enveloppe

Notre présent module se concentrera sur l'étude de 1er type d'éléments qui se trouve être le plus répandu dans les constructions. On se limitera a l'étude des systèmes plans composes de barres droites.

5. Les appuis

Les appuis sont des éléments ou des appareils réalises pour relier le corps avec le milieu environnant ou pour assembler les éléments de la même construction les uns par rapport aux autres. Leur rôle est de limiter partiellement ou totalement le mouvement de certaines parties de la construction (restreindre certains degrés de libertés).

Nous classerons les appuis en trois catégories :

5.1 L'appui simple (mobile)

Il y a deux degrés de liberté, la rotation autour de l'appui et la translation parallèlement au support de l'appui, la réaction qu'il développe est perpendiculaire au support, (**figure 5**).

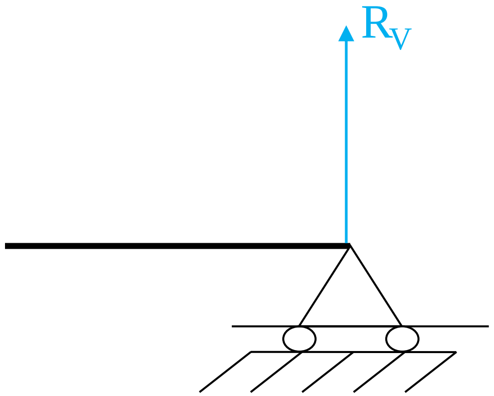


Figure. 5: L'appui simple

5.2 L'appui double (l'articulation)

Il a un seul degré de liberté, la rotation autour de l'appui. Toute translation est par contre empêchée. La réaction admet deux composantes perpendiculaires, (**figure 6)**.

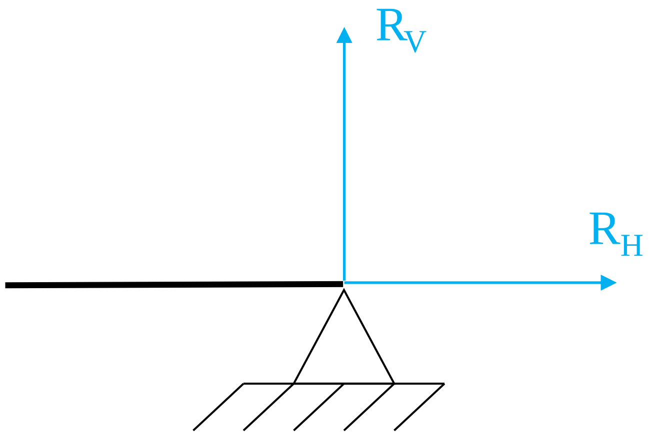


Figure. 6: L'appui double

5.2 L'encastrement

Il n'a aucun degré de liberté. Tout déplacement est empêche. Il développe deux composantes de réaction perpendiculaires et un moment concentre, (**figure 7)**.

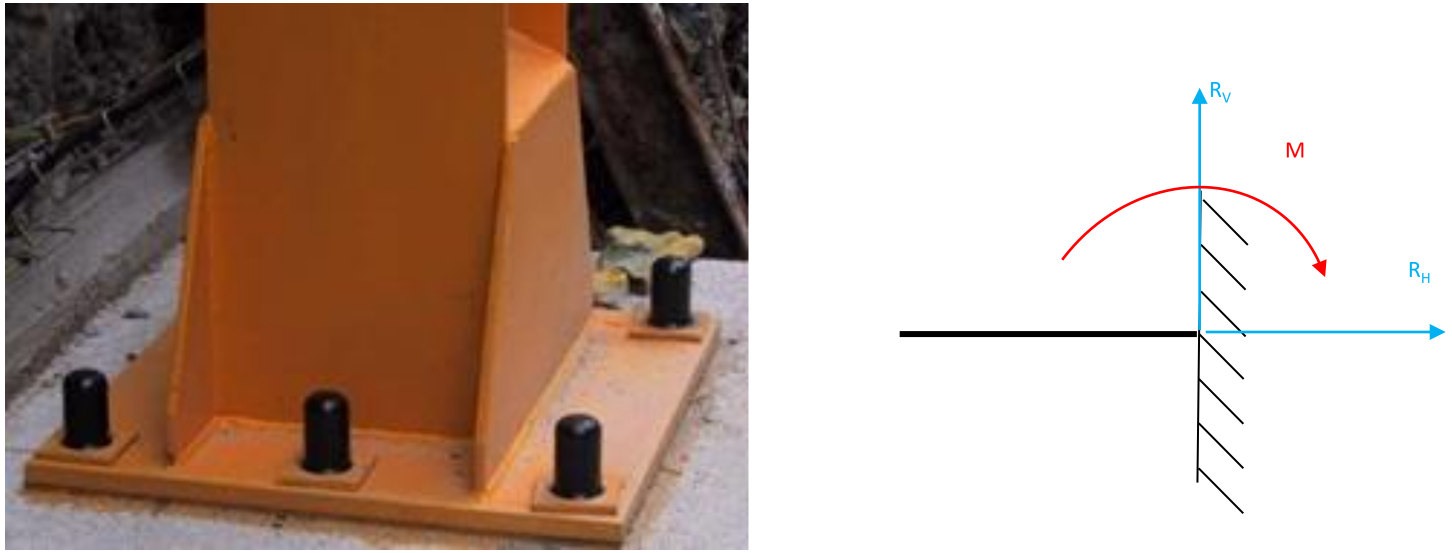


Figure. 7: L'encastrement

6. Les actions extérieures

Les forces ou les actions des corps voisins sur un corps considère sont appelle des efforts extérieurs ou les sollicitations extérieures. Elles peuvent se manifester sous la forme de forces actives agissantes (sollicitations) ou de forces réactives (les réactions d'appuis). L'action de ces forces peut se limiter a une zone plus ou moins importante du corps. On distinguera :

6.1 Les forces concentrées

L'action agit sur une région tellement réduite comparée a la longueur de l‘élément que l'on considèrera qu'elle agit en un point. On la notera par un majuscule (F, P). (Les unités sont le [N], le [kgf] ou la [tf].

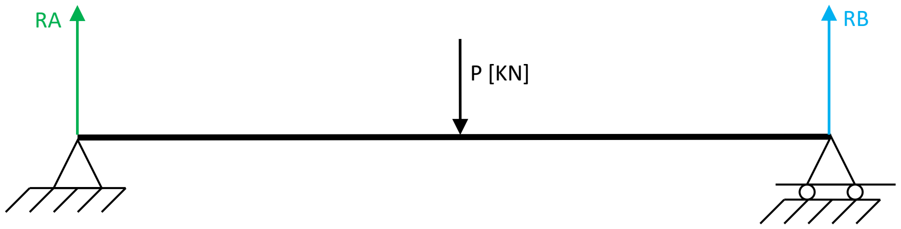


Figure. 7: force concentrée

2.3.2 Les forces reparties

Ce sont des actions qui agissent sur une certaine étendue de l‘élément considéré. Si la zone de répartition est une ligne on parlera de charge repartie linéique, si c'est une surface ce sera une charge repartie surfacique et si c'est un volume on perlera de charge repartie volumique. On la notera par une lettre minuscule (q, p et m).

L‘ intensité de la force sur cette étendue peut être constante alors on parlera de charge repartie uniforme, **(figure 8)**.

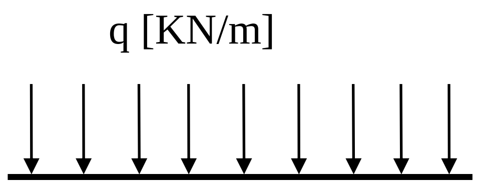


Figure. 8 : Charge repartie uniforme

L’intensité de la force sur cette étendue peut être variable et dans ce cas la variation sera dénie par la loi mathématique qui la caractérise (linéaire, parabolique, cubique, sinusoïdale...), on parlera de charge repartie triangulaire, trapézoïdale, parabolique, ou sinusoïdale, **(figure 9)**.

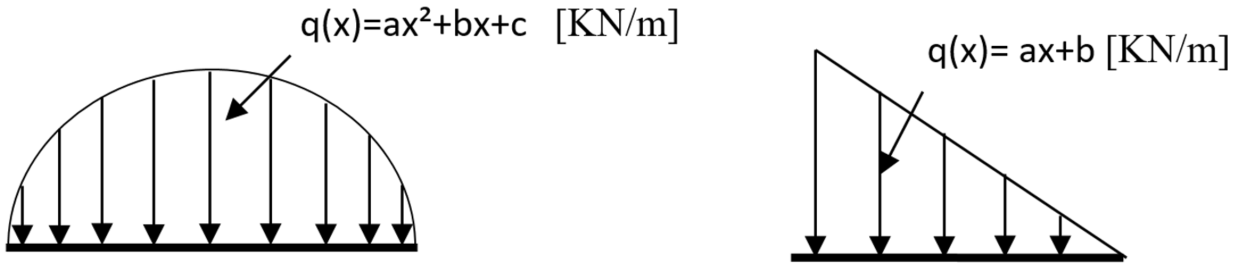


Figure. 9 : Charge repartie suivant une loi mathématique

6. Principe général d'équilibre – équation d'équilibre

Les conditions nécessaires et suffisant pour qu'un système soit en équilibre sont :

a) Les sommes des projections de toutes les forces sur les trois axes doivent être nulles.
b) Les sommes des moments par rapport à chacun des axes doivent être nulles,

Pour une construction (Structure), la vérification de ces conditions signifie qu'elle ne peut se déplacer
Soient ***oxyz*** trirectangle et Fx, Fy et Fz les projections sur les axes ox, oy et oz d'une force quelconque, les conditions d'équilibre (a) et (b) s'écrivent (cas général):

$$\begin{aligned} \sum Fx &= 0 \qquad \sum M/x = 0 \\ \sum Fy &= 0 \qquad \sum M/y = 0 \\ \sum Fz &= 0 \qquad \sum M/z = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Les équations (1) sont appelées équations d'équilibre de la statique.
Dans le cas d'un système plan, xy par exemple. Le système d'équations (1) se réduit à :

$$\sum Fx = 0 \qquad \sum Fy = 0 \qquad \sum M/\Delta = 0 \qquad (2)$$

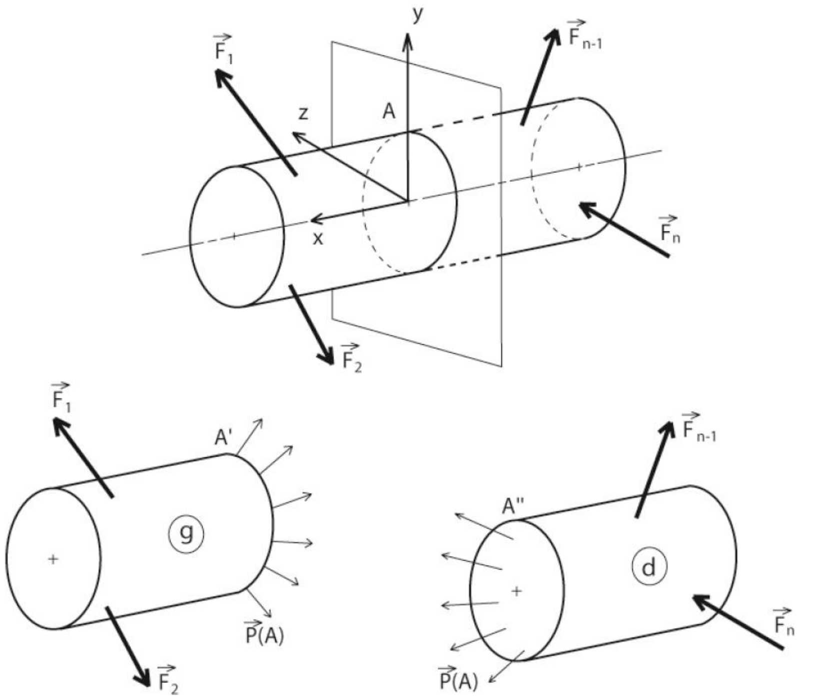
Où Δ est un axe quelconque perpendiculaire au plan xy.

6. Méthode des sections

Considérons un corps en forme de barre auquel est applique un système de forces extérieurs (F1, F2,...Fn) satisfaisant aux conditions de l'équilibre. Pour mettre en évidence les efforts intérieurs imaginons que l'on coupe la barre en deux parties suivant le plan (z, y) qui nous générera la section (A), **(figure 10)**

Equilibre des efforts extérieurs :

$$\begin{cases} \sum \vec{Fi} = \vec{0} \\ \sum M(\vec{Fi}) = \vec{0} \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \sum \vec{Fi}_{(g)} + \sum \vec{Fi}_{(d)} = \vec{0} \\ \sum M((\vec{Fi})_{(g)}) + \sum M((\vec{Fi})_{(d)}) = \vec{0} \end{cases}$$



Les liaisons entre les deux parties ont disparu, dans chaque partie sont remplacées par un système de forces intérieurs ($\vec{P}_A$).
Le système des forces dans A' est le même que celui dans A" mais de signe contraire (principe de l'action et de la réaction).
En appliquant le principe de l'équilibre entre les forces extérieures et les
forces intérieures pour les deux parties séparément on obtient :

Figure. 10: Charge repartie uniforme

$$\sum (\vec{Fi})_{(g)} + \vec{P_A} = \vec{0} \text{ et de même } -(\vec{P_A}) + \sum (\vec{Fi})_{(d)} = \vec{0}$$

Le système de forces intérieures ($\overrightarrow{P_A}$) peut être réduit au centre de gravite de la section A de façon a obtenir les deux éléments de réductions en G du système de forces intérieures qui sont la résultante générale RG et le moment résultant MG.

Intéressons nous a la partie droite (voir **figure 11**), les éléments de réduction des efforts intérieurs en A'' sont $\overrightarrow{RG}$ et $\overrightarrow{MG}$.

$$\vec{R}_G = \begin{cases} Rx = N & (effort\ normal\ ou\ longitudinal) \\ \left.\begin{matrix} Ry = Tx \\ Rz = Tz \end{matrix}\right\} & (effort\ tranchant\ ou\ tangentiels) \end{cases}$$

$$\vec{M}_G = \begin{cases} Mx = Mt & (Moment\ de\ torsion) \\ \left.\begin{matrix} My = Mfy \\ Mz = Mfz \end{matrix}\right\} & (Moment\ fléchissants) \end{cases}$$

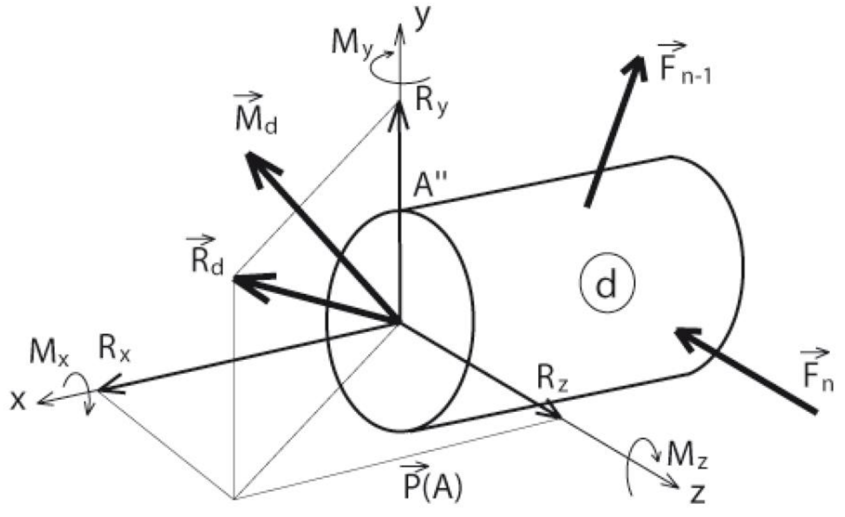


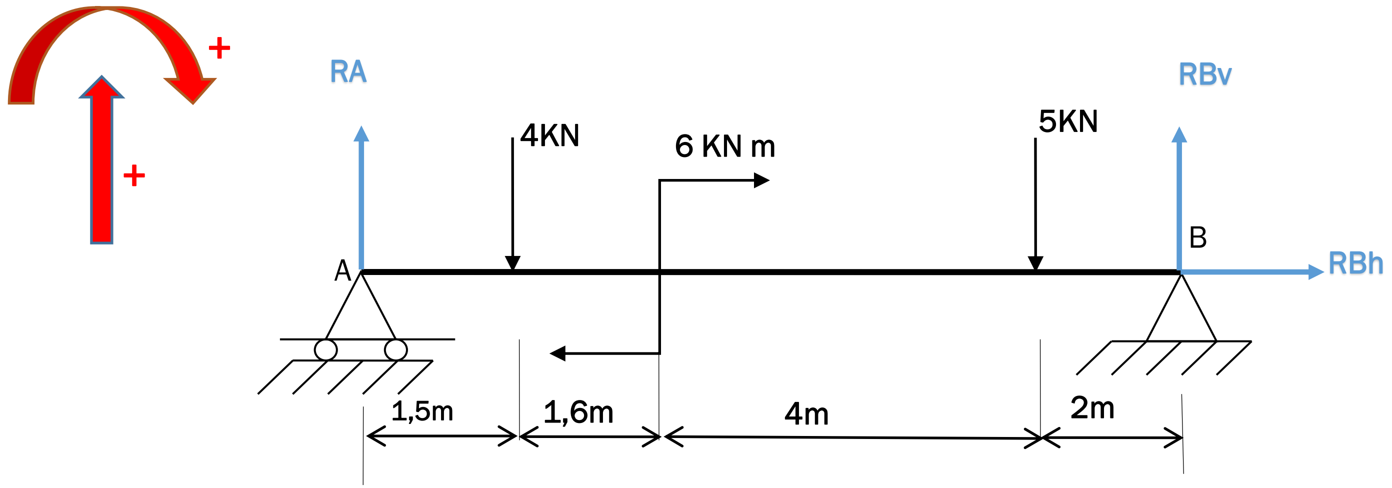
Figure 11: Les efforts intérieurs

$$\begin{cases} N = -\sum \overrightarrow{F_{ix}}(d) \\ Ty = -\sum \overrightarrow{F_{iy}}(d) \\ Tz = -\sum \overrightarrow{F_{iz}}(d) \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} Mt = -\sum Mx\left(\overrightarrow{F_{ix}}(d)\right) \\ M_{fy} = -\sum My\left(\overrightarrow{F_{iy}}(d)\right) \\ M_{fz} = -\sum Mz\left(\overrightarrow{F_{iz}}(d)\right) \end{cases}$$

Ces dernières équations sont algébriques, en pratique pour déterminer N, Ty, Tz, Mt, My et Mz nous adopterons des conventions de signes particulières pour chacune de ces composantes.

Exemple 1

Calculer les réactions d'appuis de la poutre de la figure suivante :



Détermination des forces de réactions aux appuis

$$\sum \overrightarrow{Fy} = 0 \Rightarrow R\text{Bh} = 0$$

$$\sum \overrightarrow{Fx} = 0 \Rightarrow RA - 4 - 5 + RBv = 0 \Rightarrow RA + RBv = 9 \text{ kN} \qquad (1)$$

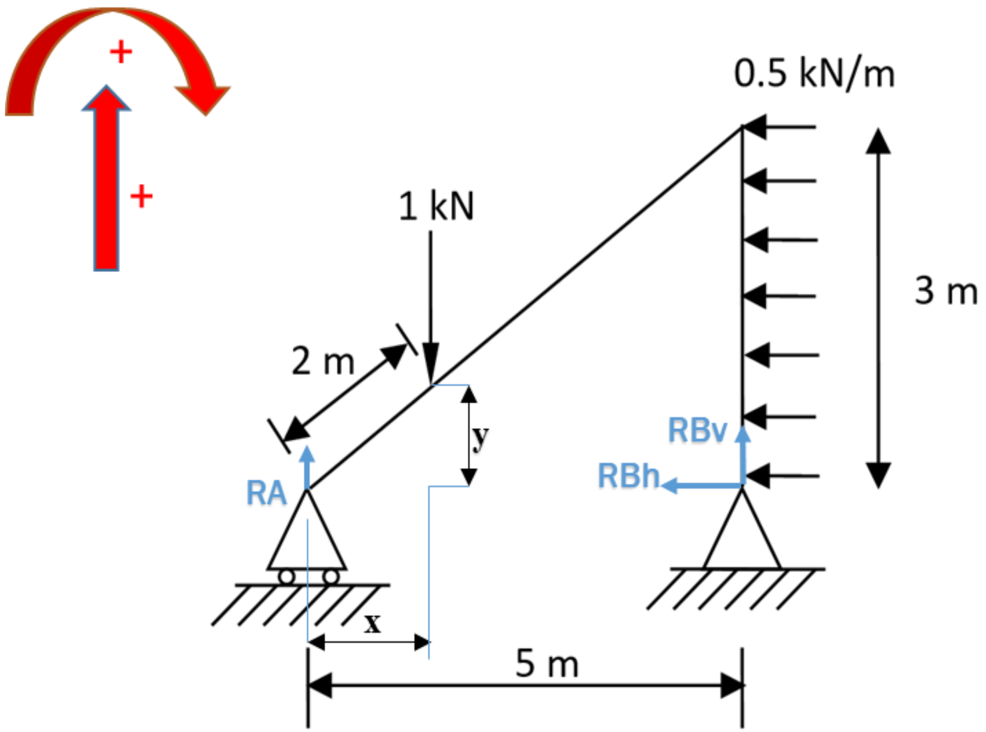
$$\sum \overrightarrow{M_{/A}} = 0 \Rightarrow \ 4 \times 1{,}5 + 6 + 5 \times 7{,}1 - RBv \times 9{,}1 = 0 \Rightarrow RBv = \frac{6 + 6 + 35{,}5}{9{,}1} = 5{,}219 \text{ kN}$$

On remplace RBv dans l'équation (1)

$$RA = 9 - 5{,}219 = 3{,}781 \text{ kN}$$

Exemple 2

Calculer les réactions d'appuis de la poutre de la figure suivante :



Détermination des forces de réactions aux appuis

$$\sum \overrightarrow{Fy} = 0 \Rightarrow RBh + 0.5 \times 3 = 0 \Rightarrow RBh = -1.5kN$$

$$\sum \overrightarrow{Fx} = 0 \Rightarrow RA - 1 + RBv = 0 \Rightarrow RA + RBv = 1 \text{ kN} \qquad (1)$$

$$\sum \overrightarrow{M_{/A}} = 0 \Rightarrow 1\,x - (0.5 \times 3) \times 1.5 - RBv \times 5 = 0 \Rightarrow RBv = \frac{2.25 - 1\,x}{5} \qquad (2)$$

$$\frac{3}{5} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{3}{5}x \qquad (3)$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{3}{5}x\right)^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{100}{34} \Rightarrow x = 1.715\ m$$

On remplace *x* dans l’équation (3)

$$y = 1.029\ m$$

On remplace *x* dans l'équation (2)

$$RBv = \frac{2.25 - 1\,x}{5} = -0.107\ kN$$

On remplace *RBv* dans l'équation (1)

$$RA = 1.107\ \text{kN}$$