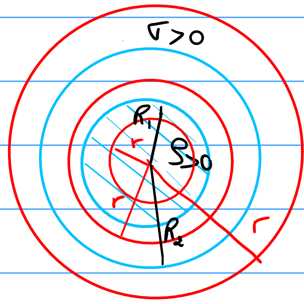
Correction du TD 4 (Gauss)

Exercice 1 :

2 sphères l'une chargée $\rho > 0$ et l'autre chargée $\sigma > 0$.



La surface de Gauss est une sphère donc $\oiint S = r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

1)

$S = 4\pi r^2$

$\underline{r < R_1}$ $\quad \vec{E}.\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ $\quad$ E et S même direction ($\cos 0$)

et $Q_{int} = \rho \int_0^r r^2 dr \, 4\pi = \frac{\rho r^3 4\pi}{3}$

$\Rightarrow E \, 4\pi r^2 = \rho \frac{4\pi}{3\varepsilon_0} r^3$

$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$

$\underline{R_1 < r < R_2}$ $\quad Q_{int} = \rho \int_0^{R_1} r^2 dr \, 4\pi = \frac{\rho 4}{3} \pi R_1^3$

$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2}$

$\underline{r > R_2}$ Il y aura deux distributions de charges à l'intérieur de la surface de Gauss. $Q_{int} = Q_\rho + Q_\sigma$

$Q_\rho = \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3$ et $Q_\sigma = \sigma \int dS = \sigma R_2^2 4\pi$ (R_2 est le rayon de la surface où la charge est distribuée (σ))

$E \, 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \sigma R_2^2 4\pi}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0 r^2}$

2) Calcul du potentiel

Dans ce cas nous avons 03 régions où nous devons déterminer le potentiel et ensuite vérifier la continuité du potentiel d'une région à une autre.

$$V = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + A & r < R_1 \quad \mathrm{I} \\ \dfrac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + B & R_1 < r < R_2 \quad \mathrm{II} \\ \dfrac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + \dfrac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0 r} + C & r > R_2 \quad \mathrm{III} \end{cases}$$

avec $V = -\int E\,dr$

à $r \to \infty$, $V_{\mathrm{III}} = V_0$ le potentiel V_{III} car $r \to \infty$ donc à $r > R_2$

$\Rightarrow \boxed{C = V_0}$

$$V_{\mathrm{III}}(R_2) = V_{\mathrm{II}}(R_2) \Rightarrow \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_2} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0 R_2} + V_0 = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_2} + B$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R_2 + V_0}$$

$$V_{\mathrm{II}}(R_1) = V_{\mathrm{I}}(R_1) \Rightarrow \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_1} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R_2 + V_0 = -\frac{\rho R_1^2}{6\varepsilon_0} + A$$

$$\boxed{A = \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} + V_0 + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}}$$

$$V_{\mathrm{I}} = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} + V_0 \qquad r < R_1$$

$$V_{\mathrm{II}} = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} + V_0 \qquad R_1 < r < R_2$$

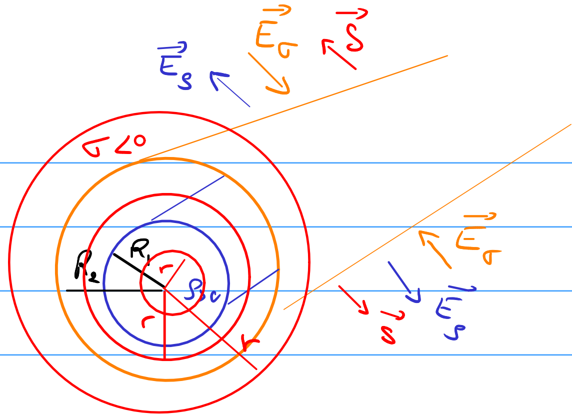
$$V_{\mathrm{III}} = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0 r} + V_0 \qquad r > R_2$$

Si on remplace r par R_2 on retrouve $V_{\mathrm{III}} = V_{\mathrm{II}}$ et si on remplace r par R_1 on retrouve $V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}}$. les constantes (A, B, C) ne peuvent pas être en fct de r.

Exercice 2

02 cylindres, l'une chargée $\rho > 0$ et l'autre $\sigma < 0$.

La surface de Gauss sera $S_L = 2\pi r L$



$r < R_1$ $\quad \vec{E}\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ avec $Q_{int} = \rho \int_0^r r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz = \rho \pi r^2 L$

$$E\, 2\pi r L = \frac{\rho \pi r^2 L}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$$

$R_1 < r < R_2$ $\quad \vec{E}.\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad Q_{int} = \rho \int_0^{R_1} r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz = \rho \pi R_1^2 L$

$$E\, 2\pi r L = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \pi R_1^2 L \Rightarrow E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{R_1^2}{r}$$

$r > R_2$ $\quad$ Dans ce cas, nous avons deux distributions l'une ρ et l'autre σ. Avec $\sigma < 0$

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \oint (\vec{E}_\rho + \vec{E}_\sigma).d\vec{S} = \vec{E}_\rho \vec{S} + \vec{E}_\sigma \vec{S} = E_\rho S \cos 0 + E_\sigma S \cos \pi$$

($\vec{E}_\sigma$ est sens inverse de $\vec{S}$) voir figure.

$$E_\rho S - E_\sigma S = \frac{Q_\rho + Q_\sigma}{\varepsilon_0} \qquad Q_\sigma = \sigma 2\pi R_2 L \text{ et } Q_\rho = \rho \pi R_1^2 L$$

$$E_\rho S = \frac{Q_\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_\rho = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{R_1^2}{r} \quad \text{et} \quad -E_\sigma S = \frac{Q_\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_\sigma = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R_2}{r} > 0$$

module positif $\sigma < 0$

$$\text{et } E = E_\rho + E_\sigma = \boxed{\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r} - \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0 r}}$$

$$V = \begin{cases} -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + A & \text{I} \quad r < R_1 \\ -\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln r + B & \text{II} \quad R_1 < r < R_2 \\ -\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln r + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} \ln r + C & \text{III} \quad r > R_2 \end{cases}$$

à $r=0 \longrightarrow V_I = 0 \Rightarrow A = 0$

$$V_I(R_1) = V_{II}(R_1) \Rightarrow -\frac{\rho R_1^2}{4\varepsilon_0} = -\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln R_1 + B$$

$$\Rightarrow B = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\left(\ln R_1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$V_{II}(R_2) = V_{III}(R_2) \Rightarrow -\cancel{\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln R_2} + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\left(\ln R_1 - \frac{1}{2}\right) = -\cancel{\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln R_2} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}\ln R_2 + C$$

$$\Rightarrow C = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\left(\ln R_1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}\ln R_2$$

$$V = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 & r < R_1 \\ -\dfrac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln r + \dfrac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\left(\ln R_1 - \dfrac{1}{2}\right) & R_1 < r < R_2 \\ -\dfrac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln r + \dfrac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}\ln r + \dfrac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\left(\ln R_1 - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}\ln R_2 & r > R_2 \end{cases}$$

Après vérification, en remplaçant r par R_2 on voit que $V_{III} = V_{II}$ et qd $r = R_1$ $V_I = V_{II}$.