Physique 2

Travaux dirigés

TD 2 : ÉlectroStatique

Exercice 1.

Voir Fichier "corrigéTDGauss.pdf"

Exercice 2. *Voir Fichier "corrigéTDGauss.pdf"*

Exercice 3.

I. Une sphère métallique est une sphère conductrice, donc la distribution de charges lorsque celle-ci est isolée sera une distribution surfacique.

* Pour calculer le champ électrique à une distance de $0,1$ m de la surface de cette sphère, il faut tout d'abord trouver l'expression du champ électrique E.
La surface fermée de Gauss est celle d'une sphère $S = 4\pi r^2$, le rayon de cette surface sera $r = R + 0,1 = 0,55$ m.

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

En considérant $r = 0,55$ m et $Q = 0.25\ 10^{-9}\ C$;

$$E = 7,44\ N/C$$

** à $0.35\ m$ du centre de la sphère $(0,35 < R)$, cela implique de trouver l'expression du champ électrique à l'intérieur du conducteur, or il n'y a pas de charges à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre, donc si $Q = 0$ alors $E = 0$.

II. Pour calculer le nombre d'électrons, il faut d'abord trouver la charge électrique qui se trouve sur la surface de ce conducteur. Sachant que le champ électrique sur la surface d'un conducteur est :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

Et

$$Q = \sigma S$$

Donc

$$Q = E.S.\varepsilon_0$$

On veut trouver la charge sur la surface du conducteur sphérique $(S = 4.\pi.R^2)$ isolé de 32 cm de diamètre $(R = 32/2\ cm)$ pour produire un champ électrique équivalent à $E = 1150$ N/C.

$$Q = 3,275\ 10^{-9}\ C$$

Et

$$n_e = \frac{Q}{e} = \frac{3,275\ 10^{-9}}{1,6\ 10^{-19}} = 2,04\ 10^{10}\ e^-$$

Exercice 4.

I. Le cylindre (Cy_1) a une distribution de charge volumique.

a. On recherche l'expression du champ électrique en tout point de l'espace, c'est à dire à $r < R_1$ et à $r > R_1$.
La surface fermée de Gauss que l'on doit utiliser est celle d'un cylindre (voir l'exercice Gauss cylindre) et sachant que le champ électrique est radial quand $L >> R_1$, alors ;

$$\Phi = \oint \vec{E}d\vec{S} = E.S_L \cos 0° + E.S_D \cos 90° = E.S_L$$

Et

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Avec $S_L = 2\pi rL$
À $r < R_1$; on aura

$$Q_{int} = \rho \int_0^r dV = \rho \int_0^r rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz = \rho\pi r^2 L$$

et donc

$$E.2\pi rL = \frac{\rho\pi r^2 L}{\varepsilon_0}$$

On obtiendra

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$$

À $r > R_1$; la charge interne à la surface de Gauss considérée sera

$$Q_{int} = Q_1 = \rho \int_0^{R_1} rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz = \rho\pi R_1^2 L$$

et donc

$$E = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r}$$

L'expression du champ électrique en tout point de l'espace sera :

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r & \text{à } r < R_1 \\ \\ \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r} & \text{à } r > R_1 \end{cases}$$

b. La charge électrique contenue dans ce cylindre si $\rho = -0,106\ C/m^3$ est :

$$Q_1 = \rho.V = \rho.\pi R_1^2 L = -0,106.\pi.10^{-4} \times 15.10^{-2} = -5.10^{-6}C = -5\mu C$$

II. On enveloppe, à présent, le cylindre (Cy_1) par un cylindre (Cy_2) creux métallique.

a. Cy_2 est un conducteur puisque métallique. Une des caractéristiques d'un conducteur à l'équilibre est qu'il ne peut avoir de charges en son sein, i.e la charge totale interne du conducteur est nulle. La quantification de la nouvelle distribution de charges du système se fera en prenant en compte cette caractéristique.
Jusqu'à R_1, la distribution de charges est volumique et est égale à
$Q_1 = -5\mu C$, donc pour que notre conducteur ait une charge nulle, les charges négatives (électrons) vont migrer vers la surface externe créant une polarisation entre les deux surfaces du cylindre creux (Cy_2). On aura donc $Q_1 = -5\mu C$, $Q_2 = +5\mu C$ à R_2 et $Q_3 = -5\mu C$ à R_3.

b. L'expression du champ électrique ne changera pas dans les régions suivantes : $r < R_1$ et $R_1 < r < R_2$.
À $R_2 < r < R_3$; $E = 0$ car $Q_{int} = Q_1 + Q_2 = 0$
À $r > R_3$; $Q_{int} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_3 = \sigma 2\pi R_3 L$
La distribution de charge sur le conducteur ne peut être que surfacique !

$$E.2\pi rL = \frac{\sigma\pi R_3 L}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0 r}$$

L'expression du champ électrique en tout point de l'espace sera :

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r & \text{à } r < R_1 \\ \\ \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r} & \text{à } R_1 < r < R_2 \\ \\ 0 & \text{à } R_2 < r < R_3 \\ \\ \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0 r} & \text{à } r > R_3 \end{cases}$$

c. Le potentiel électrique dans toutes les régions du système est calculé à partir de la loi $V = -\int \vec{E}.d\vec{r}$.

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + A & \text{à } r < R_1 \\ \\ -\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln r + B & \text{à } R_1 < r < R_2 \\ \\ C & \text{à } R_2 < r < R_3 \\ \\ -\frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0} \ln r + D & \text{à } r > R_3 \end{cases}$$

Le potentiel s'annule en $r = 0$, cela implique que $A = 0$. En vérifiant la condition de continuité du potentiel en R_1, on peut écrire que

$$-\frac{\rho}{4\varepsilon_0} R_1^2 = -\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln R_1 + B$$

On peut déduire ;

$$B = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \left[\ln R_1 - \frac{1}{2} \right]$$

En procédant de la même manière en R_2 ;

$$-\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln R_2 + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \left[\ln R_1 - \frac{1}{2} \right] = C$$

$$C = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \left[\ln \frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{2} \right]$$

Pour trouver la constante D, on vérifie la continuité du potentiel en R_3 ;

$$C = -\frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0} \ln R_3 + D$$

Donc

$$\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \left[\ln \frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{2} \right] = -\frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0} \ln R_3 + D$$

$$D = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \left[\ln \frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{2} \right] + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0} \ln R_3$$

L'expression du potentiel électrique en tout point de l'espace sera :

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 & \text{à } r < R_1 \\ \\ \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \left[\ln \frac{R_1}{r} - \frac{1}{2} \right] & \text{à } R_1 < r < R_2 \\ \\ \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \left[\ln \frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{2} \right] & \text{à } R_2 < r < R_3 \\ \\ \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \left[\ln \frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{2} \right] + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0} \ln \frac{R_3}{r} & \text{à } r > R_3 \end{cases}$$

d. La densité de charge sur la surface externe du cylindre (Cy_2) est ;

$$\sigma_3 = \frac{Q_3}{S_3} = \frac{Q_3}{2\pi.R_3L} = \frac{-5.10^{-6}}{2\pi.1,5.10^{-2} \times 15.10^{-2}} = -3,53.10^{-4}C/m^2$$

Exercice 5.

Le champ électrique qui se trouve entre les deux armatures est obtenu, à partir du théorème de Gauss, sous la forme suivante :

$$E = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0 r}$$

Sachant que le champ électrique est le gradiant du potentiel, on peut à partir de $V = -\int E(r)dr$, écrire que

$$V_1 = -\frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln r_1$$

Et

$$V_2 = -\frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln r_2$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\ln r_2/r_1 > 0$$

La capacité étant

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Alors

$$C = \frac{2\pi L\varepsilon_0}{\ln r_2/r_1}$$

Exercice 6.

I. La sphère (S_1) est pleine et métallique de rayon $R_1 = 3$ cm, la distribution de charge ne peut être que surfacique puisque la sphère est métallique donc conductrice.

1. Le champ électrique, en tout point, est :

<u>À $r < R_1$:</u> Il n'y a pas de charge à l'intérieur d'un conducteur ($Q_i = 0$). Donc $E = 0$

<u>À $r > R_1$:</u> Le champ électrique sera obtenu à partir de

$$E.4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R_1^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

<u>À $r = R_1$:</u> Le champ élecrique sera

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

2. Le potentiel est égal à $\sigma R_1/\varepsilon_0$ à $r = 0$.

<u>À $r < R_1$:</u> Le potentiel est constant et donc $V_I = \sigma R_1/\varepsilon_0$.

<u>À $r > R_1$:</u> Le potentiel sera obtenu à partir de

$$V_{II} = -\int E.dr = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r} + A$$

À $r \approx R_1$, la condition de continuité nous permet d'écrire :

$$V_I(r \approx R_1^-) = V_{II}(r \approx R_1^+)$$

$$\Rightarrow \sigma R_1/\varepsilon_0 = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 R_1} + A$$

Donc

$$A = 0$$

Et le potentiel sera

$\underline{\text{À } r < R_1 :}$ $V_I = \sigma R_1/\varepsilon_0$.

$\underline{\text{À } r > R_1 :}$ $V_{II} = \sigma R_1^2/(\varepsilon_0 r)$

II. 1. La sphère conductrice interne S_1 est chargée initialement de $Q = +5q$, en enveloppant celle-ci par une autre sphère conductrice, la surface interne de la sphère S_2 se chargera de $Q_i = -Q = -5q$ pour neutraliser les charges et la surface externe de S_2 étant chargée initialement par $Q_{ei} = -5q$ sera chargée par $Q_e = Q_{ei} + Q = -5q + 5q = 0$.

2. L'expression du champ électrique ne va pas changer dans les régions $0 < r < R_1$ et $R_1 < r < R_2$ car le flux dépend des charges à l'intérieur des surfaces fermées, et ces charges ne changent pas dans ces régions.

3. pour calculer le rayon interne R_2, on doit tout d'abord trouver la différence de potentiel entre les armatures.

$\underline{\text{À } R_1 < r < R_2 :}$ le champ électrique est sous la forme

$$E = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

Donc

$$V_{R_1} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

Et

$$V_{R_2} = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Sachant que la charge qui se trouve sur la surface de rayon R_1 est égale à

$$Q = \sigma 4\pi R_1^2$$

d'où

$$V_{ab} = V_{R_1} - V_{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) > 0$$

La capacité est

$$C = Q/V_{ab} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

On donne $C = 10\ pF$, on obtient alors

$$R_2 = 0,045\ m$$

4. Les densités de charges de la surface de (S_1) et de la surface interne et externe de (S_2) seront

$$\sigma_1 = Q/S_1$$

Et

$$\sigma_2 = -Q/S_2$$

Avec $S_1 = 4\pi R_1^2$, $S_2 = 4\pi R_2^2$ et $Q = 40\ 10^{-9}\ C$, on trouvera alors

$$\sigma_1 = 3,53\ 10^{-6}\ C/m^2$$

Et

$$\sigma_2 = -1,57\ 10^{-6}\ C/m^2$$

$\sigma_3 = 0$ car il n'y a pas de charges sur la surface externe de S_2.