

FORCES EXERCEES PAR UN FLUIDE EN ECOULEMENT (AUTOUR D'OBSTACLES)

Soit l'écoulement autour d'une sphère. L'écoulement du point amont A s'arrête à un point B sur la surface de l'objet avec la vitesse qui décroît jusqu'à zéro; le point B est appelé point d'arrêt. L'écoulement se divise alors en deux parties au point B. Pour la sphère, l'écoulement se sépare ensuite au point C en produisant un sillage avec des tourbillons (zone de décollement). En appliquant l'équation de Bernoulli entre le point amont A et le point d'arrêt B, on peut déterminer la pression P_0 au point d'arrêt (la pression P_0 est appelée pression d'arrêt):

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

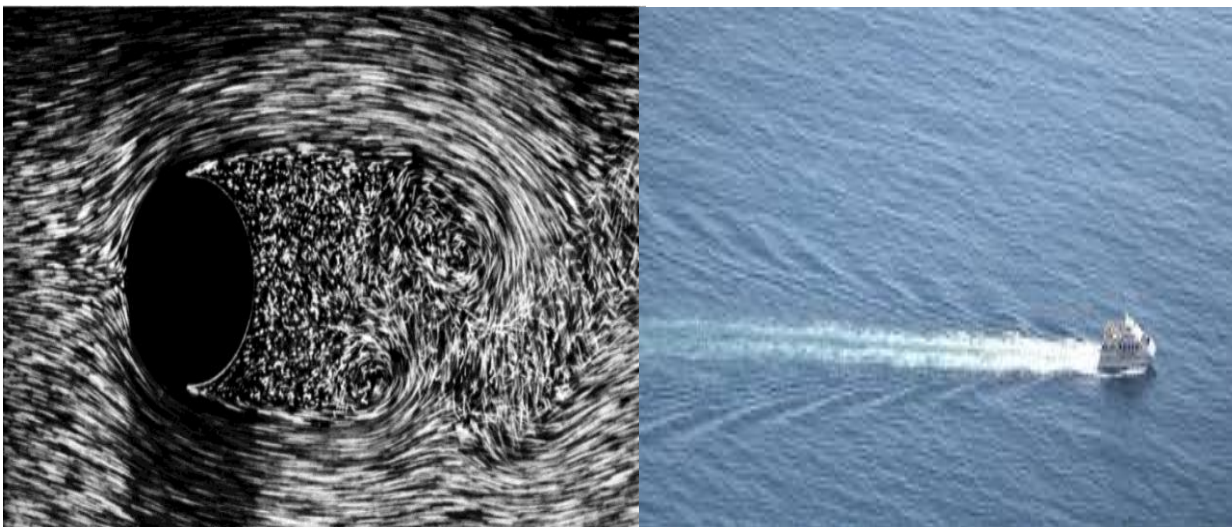
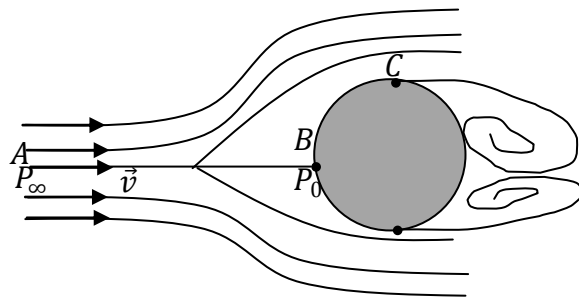
$$P_A = P_\infty$$

$$z_A = z_B$$

$$P_B = P_0$$

$$v_B = 0 \text{ point d'arrêt}$$

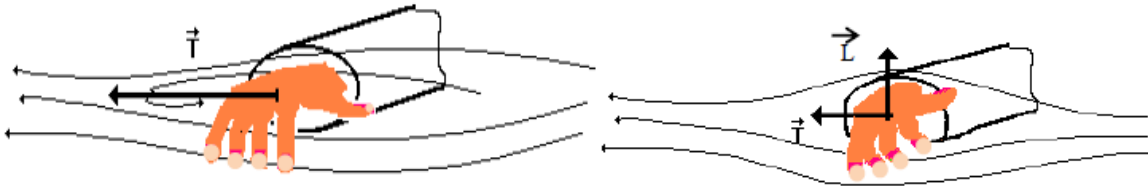
$$P_0 = P_\infty + \frac{1}{2} \rho v^2$$



1. Forces agissant sur un obstacle

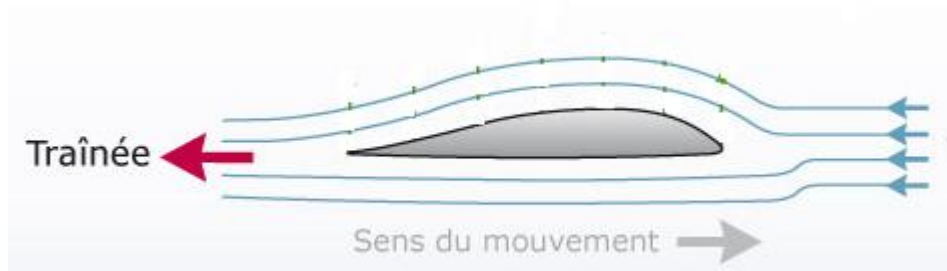
Lorsqu'un objet est placé dans un écoulement, il est soumis à une force provenant du fluide environnant. De la même manière, lorsqu'on met en mouvement un corps dans un fluide, on s'aperçoit qu'il est nécessaire de faire un effort, non seulement lors de son accélération, mais aussi ensuite pour maintenir sa vitesse. Le fluide a tendance à freiner le corps pour le ramener à vitesse nulle. Par exemple, si j'étends un drap par jour de grand vent, je suis obligé de le retenir pour éviter de le voir "partir avec le vent". La force totale exercée sur un obstacle se décompose en deux forces; une force de traînée \vec{T} parallèle à la direction de l'écoulement, et une force de portance \vec{L} , perpendiculaire à l'écoulement. Amusons-nous à expérimenter ces deux forces de façon très simple: en voiture, je passe le bras par la fenêtre et je place ma main à l'horizontale dans le filet d'air: ma main est tirée vers l'arrière, je suis obligé de coincer le

coude ou d'exercer un effort pour la maintenir. Elle subit une résistance au passage de l'air qu'on appelle la traînée. Si, maintenant, j'incline ma main dans le filet d'air sans la mettre ni verticale ni horizontale: une autre force apparaît en plus de la traînée, perpendiculaire à la direction du déplacement et qui a tendance à faire monter ma main: c'est la *portance*. Elle entraîne ma main vers le haut si sa position correspond à celle du schéma; si j'incline ma main dans l'autre sens, elle sera entraînée vers le bas.



2. Force de traînée

Considérons l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle. La force de traînée, tend à entrainer l'obstacle avec l'écoulement. Dans le cas d'un objet se déplaçant dans un fluide au repos, c'est la force qui s'oppose au déplacement.



Pour calculer la traînée, on utilise la formule empirique (expérimentale) suivante :

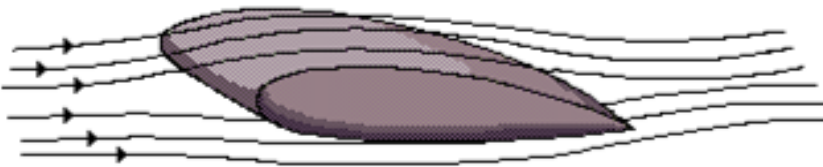
$$T = \frac{1}{2} \rho S v^2 C_d$$

où S est la surface projetée de l'objet sur un plan vertical à la direction de l'écoulement uniforme (surface frontale) et C_d est le coefficient de traînée sans dimension. Quelques exemples du coefficient C_d sont fournis dans le Tableau 1 en fonction de la géométrie et du type d'écoulement (nombre de Reynolds Re).



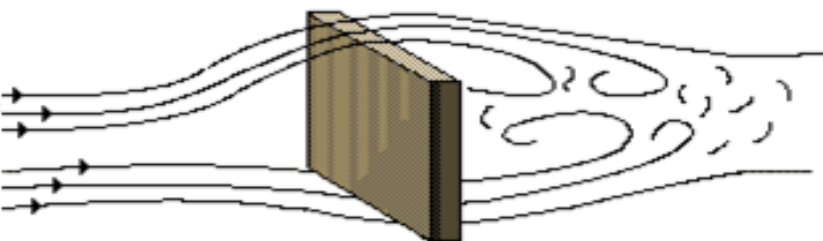
Sphère

Les objets ronds, tels que les balles de tennis, subissent une traînée d'intensité modérée.



Aile d'avion

La forme d'une aile d'avion réduit la traînée.



Carré

Les objets plats à bords carrés subissent une traînée de grande intensité.

En pratique, le coefficient de traînée est calculé en utilisant des relations empiriques basées sur des données expérimentales. Les cas classiques le plus étudiés sont la sphère et le cylindre.

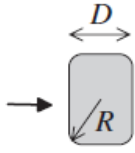
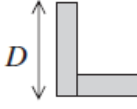
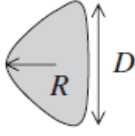
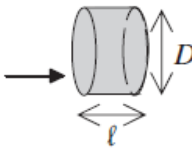
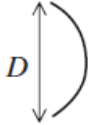

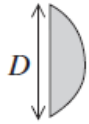

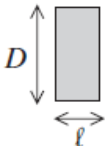

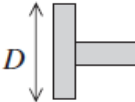



géométrie	S	Re	C _D		géométrie	S	Re	C _D	
			R/D	C _D				l/D	C _D
	b × D	10 ⁵	R/D	C _D		b × D	>10 ⁴	1,98	
			0	2,2					
			0,02	2,0					
			0,17	1,2					
			0,33	1,0					
	b × D	10 ⁵	R/D	C _D		π D ² /4	>10 ⁵	l/D	C _D
			0	1,4				0,5	1,1
			0,02	1,2				1	0,93
			0,08	1,3				2	0,83
			0,25	1,1				4	0,85
	b × D	2 × 10 ⁴	2,3			π D ² /4	>10 ⁴	θ	C _D
								10	0,30
								30	0,55
								60	0,80
								90	1,15
	b × D	>10 ⁴	2,15			π D ² /4	1,4		
	b × D	>10 ⁴	l/D	C _D		A	1,1		
			0,5	2,5					
			1	2,2					
			2	1,6					
			3	1,3					
	b × D	>10 ⁴	1,80			A	0,96		
	A	U (m · s ⁻¹)		C _D		A	1,4		
		10		0,43					
		20		0,26					
		30		0,20					

Tableau 1: quelques valeurs du coefficient de traînée en fonction de la forme de l'obstacle et du nombre de Reynolds (b est la largeur des profils, A est la surface apparente au vent, l'écoulement est toujours dirigé de la gauche vers la droite).

2.1. Traînée pour un cylindre; cas d'un fluide parfait

On considère l'écoulement d'un fluide parfait autour d'un cylindre tel qu'il est représenté sur la figure ci-dessous. La théorie des écoulements potentiels (cours de cinématique des fluides) donne l'expression du champ de vitesse En coordonnées cylindrique fonction de la vitesse amont v :

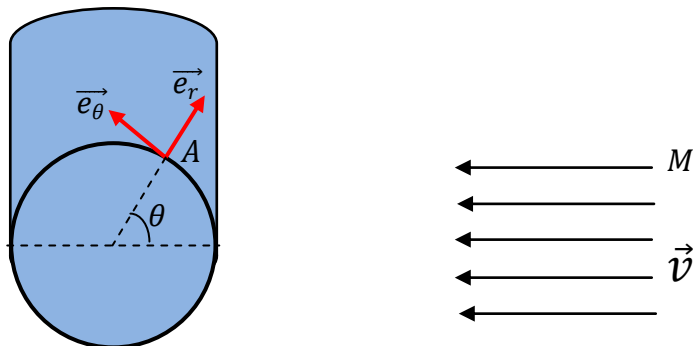
$$\mu_r = -v \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$\mu_\theta = v \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$$

Pour un cylindre $R = r$, donc;

$$\mu_r = 0$$

$$\mu_\theta = 2v \sin \theta$$



Appliquons l'équation de Bernoulli entre un point M qui se trouve à l'infini (à la vitesse v et la pression P_∞) et le point, on obtient (les deux points se trouve au même niveau):

$$P_\infty + \frac{1}{2} \rho v^2 = P + \frac{1}{2} \rho \mu_\theta^2$$

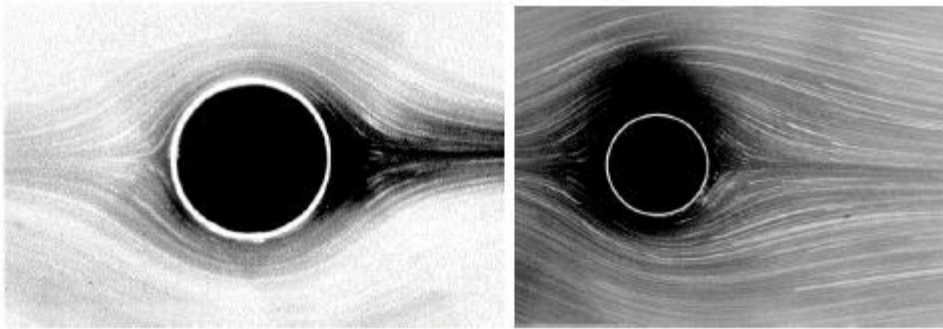
$$P_\infty + \frac{1}{2} \rho v^2 = P + \frac{1}{2} \rho (2v \sin \theta)^2$$

$$P = P_\infty + \frac{1}{2} \rho v^2 (1 - 4(\sin \theta)^2)$$

2.2. Cas d'un fluide visqueux

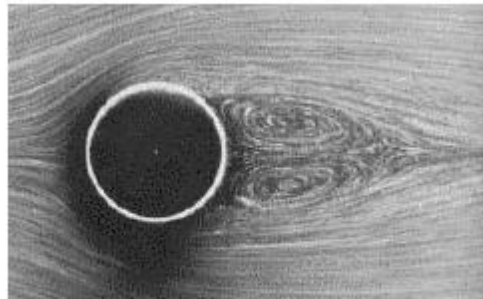
En fonction du nombre de Reynolds l'écoulement autour d'un cylindre présente différents régimes :

- $Re < 5$ les lignes de courants sont parfaitement symétriques (entre l'amont et l'aval du cylindre), les forces sur le cylindre sont essentiellement d'origine visqueuse.



$Re = 0.16$ et $Re = 1.54$.

- $5 < Re < 44$ En aval du cylindre on observe une zone de recirculation, formée de tourbillons qui restent attachés au cylindre.



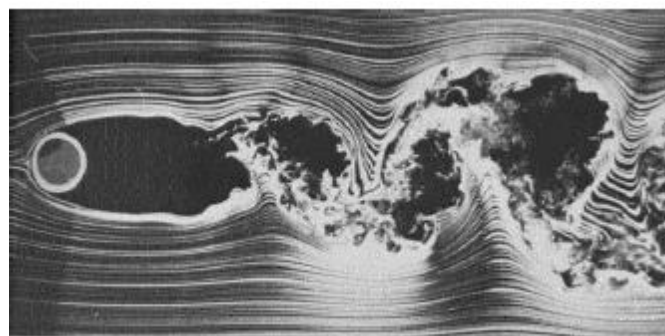
$Re = 26$.

- $44 < Re < 300$ En aval du cylindre on observe une allée de tourbillons alternés (allée de Bénard von Karman). L'écoulement est très périodique.



$Re = 140$.

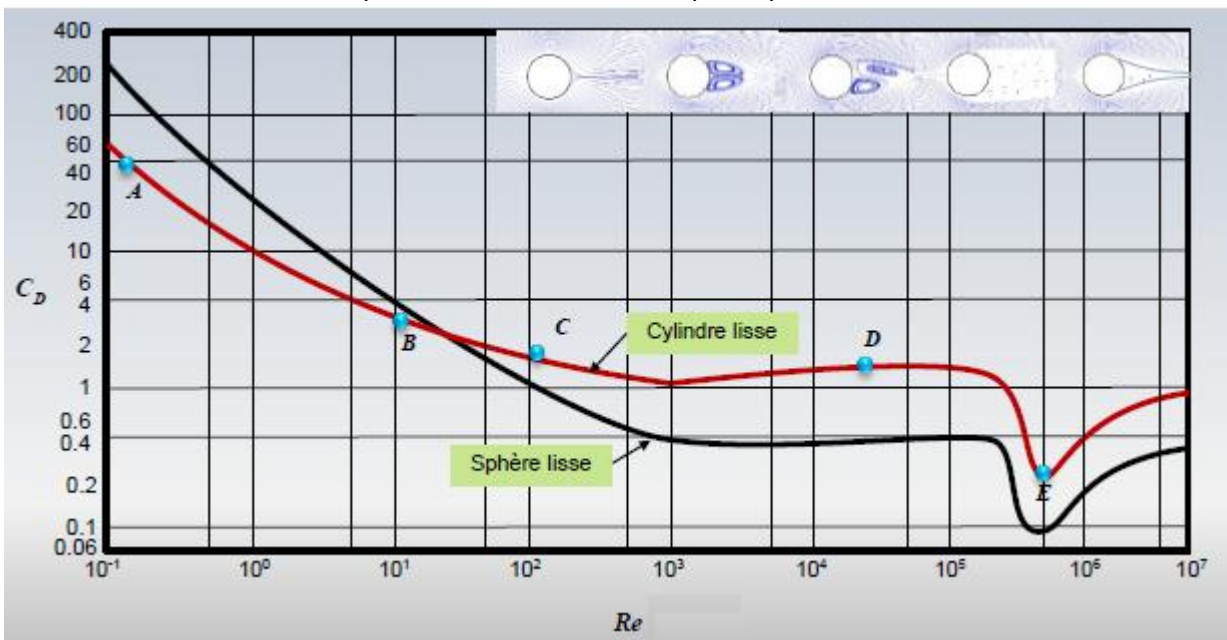
- $300 < Re < 3 \cdot 10^5$ Le détachement des tourbillons devient irrégulier, l'écoulement en aval du cylindre est turbulent.



$Re = 10^4$.

- $Re > 3 \cdot 10^5$ les couches limites, jusque-là laminaires, deviennent turbulentes. Elles restent attachées plus longtemps au cylindre, ce qui réduit la zone de recirculation, et se traduit par une chute brutale du coefficient de traînée.

La Figure ci-dessous montre l'évolution du coefficient de traînée C_d en fonction du nombre de Reynolds pour un cylindre de diamètre d et de longueur infinie placé dans un écoulement uniforme de vitesse v ainsi qu'un obstacle de forme sphérique.



On note que C_d diminue considérablement à partir de faibles valeurs de Re , jusqu'à atteindre un plateau $C_d \approx 1$, mais lorsque Re augmente encore le coefficient C_d décroît jusqu'à une valeur de 0,3 car le point de séparation change soudainement d'endroit (plus en aval) diminuant ainsi la zone de sillage derrière le cylindre.

- A très faible nombre de Reynolds, en traînée dite de Stokes (1845, 1851) et est égale à :

$$T = 3\pi\eta dv$$

Sachant, qu'on sait que

$$T = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_d$$

Dans le cas d'une sphère $S = \pi R^2$, l'égalité entre ces deux relations donne

$$3\pi\eta dv = \frac{1}{2}\rho S v^2 C_d = \frac{1}{2}\rho\pi R^2 v^2 C_d$$

$$3\pi\eta(2R)v = \frac{1}{2}\rho\pi R^2 v^2 C_d$$

$$6\eta = \frac{1}{2}\rho R v C_d$$

$$12 \frac{\eta}{\rho R v} = C_d$$

$$R = \frac{d}{2} \text{ et } Re = \frac{\rho v D}{\eta}$$

$$C_d = \frac{24}{Re}$$

- Lorsque le Reynolds n'est pas très petit devant l'unité (valable si $Re < 5$), Oseen (1910,1927) et Lamb (1911) ont utilisé la formule suivante:

$$C_d = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right)$$

- Il existe ensuite des formules empiriques approchées qui donnent d'assez bons résultats jusqu'à la crise de traînée caractérisée par une chute brutale de C_d ($Re < 400\ 000$), par exemple la relation de White :

$$C_d = \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0,4$$

- La formule de Schiller-Naumann (1933) (attention, valable pour $Re < 800$ seulement):

$$C_d = \frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687})$$

Exemple

Calculer de la traînée sur une balle de tennis à $v = 200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, $R = 33 \text{ mm}$, $\eta_{air} = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\rho_{air} = 1,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Comparez au poids de la balle ($m = 58 \text{ g}$).

$$v = 200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 55,55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{1,23 \cdot 55,55 \cdot 0,066}{15 \cdot 10^{-6}} = 300636$$

Graphiquement $C_d \approx 0,4$

$Re < 400\ 000$, on utilise la relation de White:

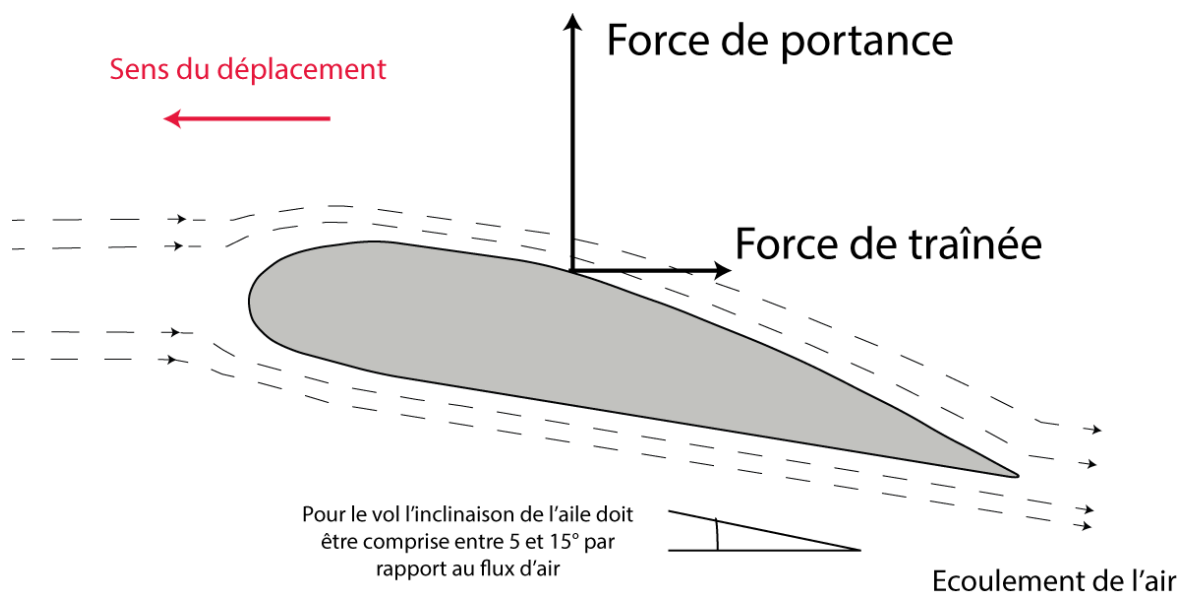
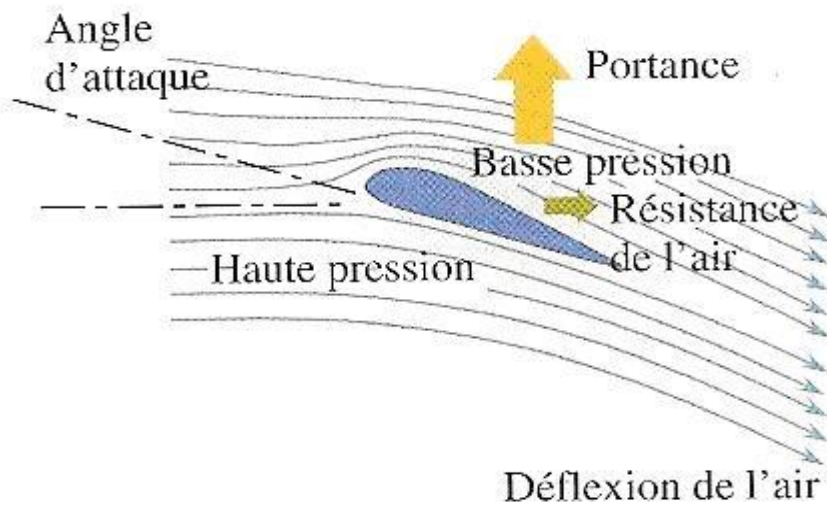
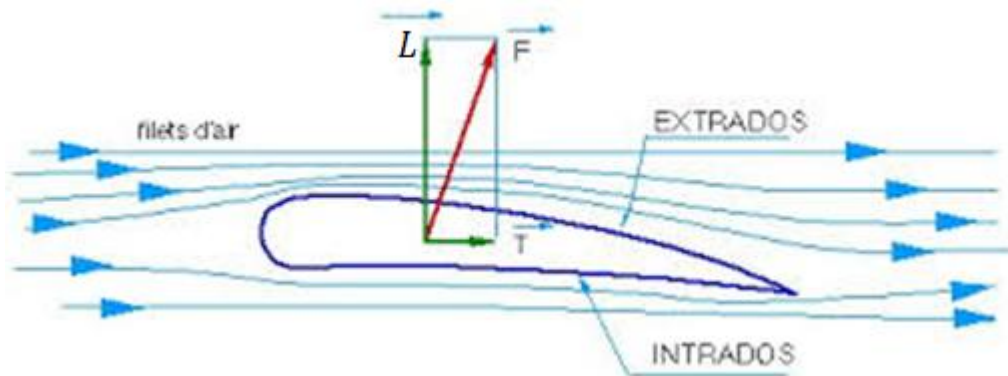
$$C_d = \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0,4 = 0,412$$

$$\frac{1}{2} \rho S v^2 C_d = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 v^2 C_d = 2,67 \text{ N}$$

3. Force de portance

La portance est une force perpendiculaire au déplacement du fluide. Elle est créée par l'aspiration dans une zone de dépression formée sur le dessus du profil dessiné à cet effet. La portance est en général la force nécessaire pour faire voler l'aile avec sa charge elle est liée à la traînée qui devra être compensée par une poussée au moins égale pour décoller.

L'explication du phénomène de portance peut être en partie donnée, par la variation de vitesses du fluide, entre l'intrados et l'extrados. Cette variation de vitesse (les particules parcourant l'extrados vont plus vite que celles de l'intrados du fait de la plus grande distance et de la viscosité du courant de fluide) provoque une variation de pression qui génère la portance.



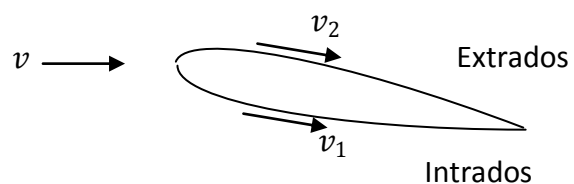
On appelle l'angle que fait ma main avec l'écoulement l'*incidence*. Celle-ci sera comptée positivement si l'avant de ma main (côté pouce) est incliné vers le haut, négativement dans le sens contraire. Pour le schéma, j'ai choisi une incidence positive. On peut donc en conclure que:

- Une incidence positive amène une "portance vers le haut", soit une portance (tout simplement),
- Une incidence négative amène une "portance vers le bas", soit une déportance.

Calculons la variation de pression qui génère la portance en utilisant l'équation de Bernoulli entre l'intrados et l'extrados (on néglige la variation de z);

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$



Les v_1 et v_2 ne sont pas nulles et sont nécessairement liées à la vitesse d'écoulement du fluide grâce des coefficients a et b tq:

$$v_1 = a \cdot v$$

$$v_2 = b \cdot v$$

$$P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v^2(b^2 - a^2)$$

Donc la force de portance exercée sur l'objet est

$$L = P \cdot S = \frac{1}{2}\rho v^2 S(b^2 - a^2)$$

On définit, par suite, le coefficient de portance $C_L = b^2 - a^2$

La force de portance s'écrit alors:

$$L = \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L$$