



Cours de mécanique des fluides

Dr. Sidi Mohamed Benhamou

Classes préparatoires

1^{er} cycle universitaire

Avant-propos

Parmi les grands domaines de la mécanique, la mécanique des fluides nous a de tout le temps passionnés, qu'il s'agisse des écoulements d'air (les moulins, la marine à voile, puis l'aéronautique bien sûr, les mouvements des grandes masses de l'atmosphère) ou d'eau (l'hydraulique, les écoulements autour des coques, les circulations marines et océaniques). Elle reste un champ si remarquable d'investigation à la fois technique, expérimentale et théorique. Après plusieurs siècles de travaux très remarquables, de nombreux phénomènes essentiels restent encore mal expliqués.

Un cours de mécanique des fluides est, donc aujourd'hui, un élément capital de la formation de l'ingénieur. Le présent polycopié est constitué un outil à la disposition des étudiants de deuxième année des classes préparatoires aux grandes écoles, en particulier, ceux de l'école nationale supérieure en sciences appliquées de Tlemcen. Son principal objectif est d'aider les étudiants à progresser dans cette discipline par un travail personnel sérieux et efficace. Il couvre la totalité du programme officiel de la mécanique des fluides de deuxième année.

Ce polycopié traite les trois grandes parties de la mécanique des fluides, à savoir, la statique, la cinématique et la dynamique des fluides. C'est pourquoi ce cours a été divisé en quatre chapitres qui se déclinent comme suit:

Le premier chapitre, traite la statique des fluides, ou hydrostatique et étudie les fluides au repos. La statique des fluides constitue, historiquement, le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression. Dans ce chapitre, nous rapportons la démonstration de la loi fondamentale de la statique des fluides et introduisons les forces hydrostatiques, l'équilibre relatif et la flottabilité.

Le deuxième chapitre traite de la cinématique des fluides et rappelle les deux descriptions d'un fluide en mouvement, celle de Lagrange et celle d'Euler. En outre, l'équation des lignes de courant et l'équation de continuité

(conservation de la masse) et de l'accélération de la particule fluide sont rapportées. Les types d'écoulement y sont, également, évoqués.

Le troisième chapitre traite de la dynamique des fluides incompressibles parfaits. Dans ce chapitre, le théorème de Bernoulli et quelques exemples d'applications y sont traités.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à la dynamique des fluides incompressibles réels. Après avoir introduit la notion de viscosité, l'équation de Navier-Stokes est rappelée. L'écoulement de Poiseuille, les régimes d'écoulement et les pertes de charge linéaires et singulières y sont également examinés.

LISTE DES ABREVIATIONS ET SYMBOLES

$\rho[kg/m^3]$	masse volumique
$W[N/m^3]$	poids volumique
d	densité
χ_θ	coefficient de compressibilité isotherme
$dF[N]$	élément de force
$P[Pa]$	pression
$dS[m^2]$	élément de surface
\vec{n}	vecteur unitaire
$\vec{f}_V[N]$	force volumique
$V[m^3]$	volume
$\vec{g}[m/s^2]$	accélération de la pesanteur
$m[Kg]$	masse
$T[K]$	température absolue
$M[Kg/mol]$	masse molaire
$h[m]$	hauteur
$\ell[m]$	largeur
$L[m]$	longueur
θ	angle d'inclinaison
G	centre de gravité
C	centre de poussée
$I_G[m^4]$	moment d'inertie quadratique par rapport à l'axe qui passe par G
$R[m]$	rayon
$\vec{a}[m/s^2]$	accélération
$\omega[rad/s]$	vitesse angulaire
$P_A[N]$	poussée d'Archimède
M	métacentre
$\vec{v}[m/s]$	vitesse
$t[s]$	temps
$\frac{DG}{Dt}$	dérivée particulière
$q_V[m^3/s]$	débit volumique
$q_m[Kg/s]$	débit massique

$\vec{P}(t)[Kg \cdot m/s]$	quantité de mouvement
$R[N]$	réaction d'un jet
$\eta[Pa]$	viscosité dynamique
$\gamma[m^2/s]$	viscosité cinématique
Re	nombre de Reynolds
$D[m]$	diamètre
λ	coefficient de pertes de charge linéaires ou régulières
$\Delta P_L[Pa]$	pertes de charges linéaires
$\varepsilon[m]$	rugosité
$\Delta P_s[Pa]$	pertes de charges singulières
K	coefficient de perte de charge singulière
$\Delta H[m]$	pertes de charge en mètre
$W[J]$	travail mécanique échangé entre le fluide et la machine

TABLE DES MATIERES

Chapitre I: Statique des fluides: l'hydrostatique

Introduction	1
1. Notion de fluide.....	1
2. Définition d'une particule fluide	1
3. Propriétés physiques	2
3.1. Masse volumique	2
3.2. Poids volumique.....	2
3.3. Densité	3
3.4. Compressibilité	3
3.5. Viscosité	3
4. Classification des fluides.....	3
4.1. Fluide incompressible	3
4.2. Fluide compressible	4
4.3. Fluide parfait.....	4
4.4. Fluide réel	4
4.5. Fluide newtonien	5
4.6. Fluide non newtonien	5
5. Principes et théorèmes généraux.....	5
5.1. Notion de pression et échelle de pression	5
5.1.1. Définition de la pression	5
5.1.2. Pression en un point d'un fluide	6
5.1.3. Pression absolue et pression relative	7
5.2. Principe fondamental de la statique des fluides	7
5.2.1. Cas d'un fluide incompressible et homogène	9
5.2.2. Cas d'un fluide compressible	10
5.3. Mesure de la pression	11
5.3.1. Le baromètre	11
5.3.2. Le manomètre.....	12
5.4. Principe des vases communicants.....	12

5.5.	Théorème de Pascal	13	
6.	Force hydrostatique exercée par un fluide sur une paroi	14	
6.1.	Force exercée sur un élément de surface.....	14	
6.2.	Résultante des forces hydrostatiques sur une paroi plane	15	
6.2.1.	Module de la force	15	
6.2.2.	Point d'application de la force hydrostatique (centre de poussée)	16	
6.2.3.	Cas d'une paroi plane verticale	17	
6.2.4.	Cas d'une paroi plane horizontale	18	
6.3.	Résultante des forces hydrostatiques sur une paroi courbée ...	18	
6.3.1.	Détermination de la composante horizontale.....	19	
6.3.2.	Détermination de la composante verticale	19	
7.	Equilibre relatif.....	21	
7.1.	Pression dans un fluide soumis à une accélération horizontale constante.....	22	
7.2.	Pression dans un fluide soumis à une rotation constante.....	23	
8.	Principe d'Archimède – Flottabilité	25	
8.1.	Principe d'Archimède	25	
8.2.	Equilibre d'un corps immergé dans un liquide	26	
8.3.	Stabilité des corps immergés.....	27	
8.4.	Stabilité des corps Flottants.....	28	
 Chapitre II: Cinématique des fluides			
Introduction			31
1.	Fluide en mouvement.....	31	
1.1.	Description de Lagrange.....	31	
1.2.	Description d'Euler	32	
2.	Vecteur tourbillon	32	
3.	Lignes de courant.....	33	
4.	Tube de courant.....	34	
5.	Trajectoire.....	34	
6.	Dérivée particulière	36	

6.1.	Définition.....	36
6.2.	Relation de la dérivée particulaire	36
6.3.	Expression de l'accélération de la particule fluide.....	36
7.	Loi de conservation de masse (équation de la continuité)	37
7.1.	Débit volumique.....	37
7.2.	Débit massique	37
8.	Classification des écoulements des fluides.....	38
8.1.	Écoulement stationnaire ou permanent.....	38
8.2.	Écoulement uniforme.....	38
8.3.	Écoulement irrotationnel (potentiel)	38
8.4.	Écoulement rotationnel (tourbillonnaire)	39
 Chapitre III: Dynamique des fluides incompressibles parfaits		
1.	Equation d'Euler	40
2.	Equation de Bernoulli	40
3.	Application du théorème de Bernoulli	42
3.1.	Vidange d'un réservoir (formule de Torricelli)	42
3.2.	Tube de Pitot	43
3.3.	Tube de Venturi.....	44
4.	Théorème de la quantité de mouvement en régime permanent.....	44
4.1.	Réaction d'un jet.....	45
4.2.	Jet impactant	45
 Chapitre IV: Dynamique des fluides incompressibles réels		
1.	Notion de viscosité	47
1.1.	Profil de vitesse.....	47
1.2.	Viscosité dynamique	47
1.3.	Viscosité cinématique	47
2.	Equation de Navier-Stockes.....	48
3.	Écoulement de fluide dans une canalisation (écoulement de Poiseuille)	49
4.	Régime d'écoulement – Nombre de Reynolds.....	51

5. Pertes de charge.....	53
5.1. Pertes de charge linéaires.....	53
5.2. Pertes de charge singulières ou accidentelles	55
6. Equation de Bernoulli pour un fluide réel.....	58
7. Equation de Bernoulli avec production d'énergie	58
8. Couche limite.....	58
 BIBLIOGRAPHIE	 59

CHAPITRE I
STATIQUE DES FLUIDES:
L'HYDROSTATIQUE

STATIQUE DES FLUIDES: L'HYDROSTATIQUE

Introduction

L'utilisation des milieux fluides est très courante dans les réalisations industrielles. Leur transport dans des réservoirs ou dans des canalisations, constitue la principale préoccupation lorsque ces corps sont des matières premières comme l'eau, le pétrole, le gaz naturel ... Les fluides servent à véhiculer l'énergie qu'ils accumulent sous forme de pression ou de vitesse (centrale hydroélectrique, vérins, moteurs hydrauliques ou pneumatiques). L'omniprésence des milieux fluides justifie l'étude de leur comportement.

La mécanique des fluides est une branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides lorsqu'ils subissent des forces ou des contraintes. Elle comprend deux grandes parties:

- La statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression.
- La dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement.

On distingue également d'autres branches liées à la mécanique des fluides: l'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, ... La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, la météorologie, la climatologie et l'océanographie et la médecine.

1. Notion de fluide

Un fluide est un milieu matériel continu (La matière a une structure discontinue; nous admettons que la masse et toutes ses propriétés sont réparties continûment dans le matériau), déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Un fluide est aussi un milieu isotrope: propriétés du fluide les mêmes dans toutes les directions de l'espace qu'il occupe.

2. Définition d'une particule fluide

Une particule fluide est un petit élément de fluide, suffisamment petit pour que l'on puisse considérer que ses propriétés sont homogènes

(pression, masse volumique, vitesse... identiques en tout point de la particule fluide), mais elle contient un nombre suffisamment grand de molécules pour que l'on puisse oublier leur individualité (particule assimilé à un milieu continu).

3. Propriétés physiques

Un fluide peut être caractérisé par des grandeurs:

- Qui déterminent sa quantité de substance: masse, volume, débit...
- Relatives à son état: température, pression,...
- Propres à sa nature: viscosité, masse volumique....
- Qui se rapportent à son écoulement: débit, vitesse....
- Qui indiquent les types d'énergie véhiculées par le fluide: thermique, cinétique, potentielle....

3.1. Masse volumique

La masse volumique d'un corps est le rapport entre la masse et le volume occupé. Notée ρ , elle s'exprime en kg/m^3

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Fluide	Masse volumique $\rho(kg/m^3)$	Type de fluide
Benzène	$0,880 \cdot 10^3$	Liquide
Chloroforme	$1,489 \cdot 10^3$	
Eau	10^3	
Huile d'olive	$0,918 \cdot 10^3$	
Mercure	$13,546 \cdot 10^3$	
Air	$0,001205 \cdot 10^3$	Gaz
Hydrogène	$0,000085 \cdot 10^3$	
Méthane	$0,000717 \cdot 10^3$	

3.2. Poids volumique

$$W(N/m^3) = \frac{m \cdot g}{V} = \rho \cdot g$$

3.3. Densité

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique du fluide référence}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{réf}}}$$

Dans le cas des liquides on prend l'eau comme fluide référence. Dans le cas des gaz on prend l'air comme fluide référence.

3.4. Compressibilité

La compressibilité d'un corps représente la variation de volume du corps en réponse à une variation de pression. C'est la propriété physique qui permet de faire la différence entre un liquide et un gaz. Pour quantifier cet effet, on introduit le coefficient de compressibilité isotherme défini par:

$$\chi_{\theta} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right) (\text{Pa}^{-1})$$

Un accroissement de pression entraîne une diminution de volume, et inversement; d'où la nécessité de mettre un signe moins devant le coefficient de compressibilité. χ_{θ} a les dimensions de l'inverse d'une pression.

3.5. Viscosité

C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide, autrement dit sa capacité à s'écouler. Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force. Les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement. Elle peut être mesurée par un viscosimètre à chute de bille, dans lequel on mesure le temps écoulé pour la chute d'une bille dans le fluide.

4. Classification des fluides

4.1. Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque que le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. La masse volumique ρ (kg/m^3) est constante (eau, huile...). Le module de compressibilité χ_{θ} est toujours très faible pour les liquides assimilés à des

fluides incompressibles. Pour l'eau, dans des conditions normales, il est de l'ordre de $\frac{1}{20000} Pa^{-1}$.

4.2. Fluide compressible

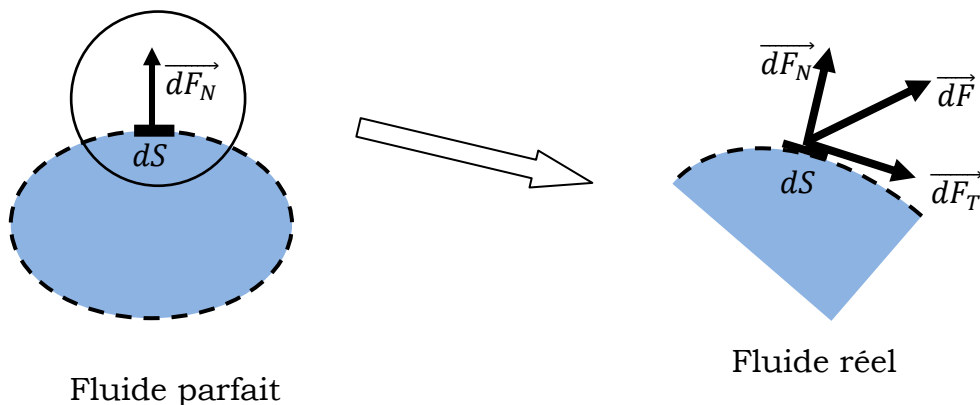
Un fluide est dit compressible lorsque que le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. La masse volumique ρ est variable. Les gaz sont des fluides compressibles.

4.3. Fluide parfait

Dans un fluide parfait, les forces de contacts sont perpendiculaires aux éléments de surfaces sur lesquelles elles s'exercent. La notion fluide parfait est une pure abstraction, destinée à faciliter certains calculs de mécanique des fluides théorique. En fait, un fluide parfait n'existe pas dans la réalité, puisque tous les fluides sont visqueux. La viscosité peut être très faible et dans ce cas on introduit le modèle de fluide parfait.

4.4. Fluide réel

Dans un fluide réel, il existe des forces (tangentes) élémentaires qui s'opposent au mouvement. C'est ce que l'on appelle la viscosité.



Dans un fluide réel en mouvement, les forces de contact possèdent des composantes tangentes qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides: c'est la viscosité. La viscosité est définie pour un fluide réel en mouvement.

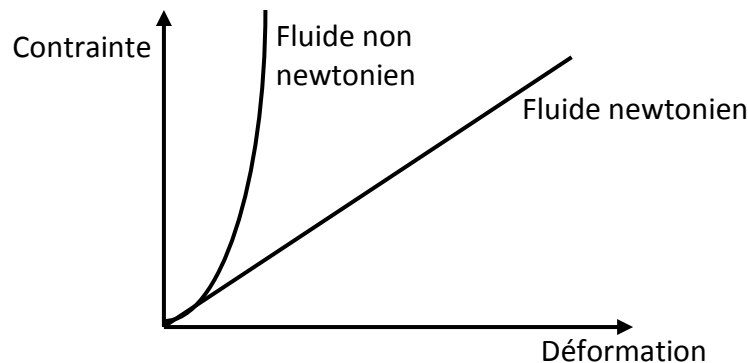
Nota: Un fluide réel au repos, peut être considéré comme parfait.

4.5. Fluide newtonien

Les fluides "newtoniens" ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz)

4.6. Fluide non newtonien

Les fluides "non newtoniens" qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent (le sang, les gels..)



5. Principes et théorèmes généraux

La statique des fluides est une branche de la mécanique des fluides qui étudie l'équilibre des fluides au repos, sous l'action de forces extérieures. Comme la viscosité se ne manifeste que s'il y a mouvement relatif des particules, les lois de la statique des fluides s'appliquent aussi bien aux fluides parfaits qu'aux fluides visqueux (réels).

Lors d'une plongée sous-marine ou au fond d'un barrage, on constate que la pression de l'eau augmente avec la profondeur.

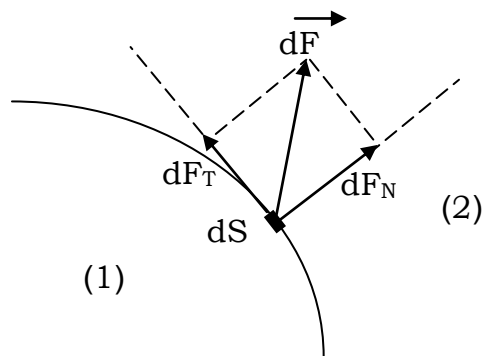
Les effets de la pression doivent être pris en considération lors du dimensionnement des structures tels que les barrages, les sous-marins, les réservoirs... etc. Les ingénieurs doivent calculer les forces exercées par les fluides avant de concevoir de telles structures.

5.1. Notion de pression et échelle de pression

5.1.1. Définition de la pression

Dans un milieu quelconque, donc aussi dans un milieu fluide, la force que la partie (1) exerce sur la partie (2) à travers un élément de surface réel ou fictif dS a une direction quelconque. Cette force peut être décomposée en;

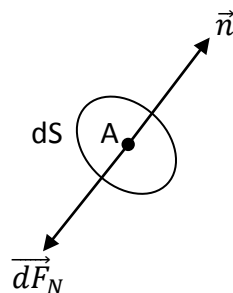
- Une composante tangentielle dF_T
- Une composante normale dF_N .



La quantité dF_T/dS , représente la contrainte tangentielle et dF_N/dS la contrainte normale. Par définition, on appelle la force de pression la contrainte normale.

Remarque; en statique des fluides, seules la contrainte dF_N/dS normale à dS interviennent, les contrainte tangentielle dF_T/dS n'apparaissent qu'en dynamique; elles correspondent aux frottements visqueux des couches fluides en mouvement les unes par rapport aux autres et par rapport à la paroi de la conduite.

5.1.2.Pression en un point d'un fluide



Sur la surface de centre A, d'aire dS , orientée par sa normale extérieure \vec{n} , la force de pression élémentaire \vec{dF}_N s'exprime par:

$$\vec{dF}_N = -P \cdot dS \cdot \vec{n}$$

La pression est une grandeur scalaire qui représente l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface. Elle est définie en un point A d'un fluide par l'expression suivante:

$$P = \frac{\|\vec{dF}_N\|}{dS}$$

5.1.3. Pression absolue et pression relative

La pression absolue est la pression réelle, elle est toujours positive.

La pression relative se définit par rapport à la pression atmosphérique existant au moment de la mesure.

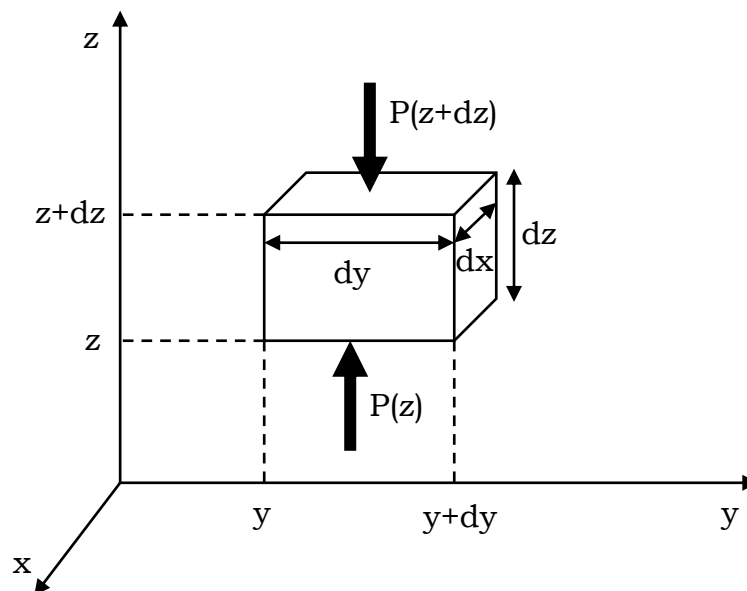
La relation suivante permet de passer de l'une à l'autre:

$$P_{\text{absolue}} = P_{\text{relative}} + P_{\text{atmosphérique}}$$

5.2. Principe fondamental de la statique des fluides

L'étude est effectuée sur un fluide placé dans un champ de forces extérieures (par exemple le champ de pesanteur terrestre). La force par unité de volume correspondante est notée \vec{f}_V . La pression au sein du fluide est variable dans l'espace. Les coordonnées cartésiennes sont utilisées dans un premier temps.

Considérons une particule fluide qui a la forme d'un parallélépipède rectangle situé entre x et $x + dx$, y et $y + dy$, z et $z + dz$; son volume est $dV = dx dy dz$.



Nous allons appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) au fluide situé dans le parallélépipède. Le fluide est au repos, donc son accélération est nulle. Le bilan des forces est;

- Les forces de pression du fluide situé autour de dV (donc extérieur au système): il y a six forces de pression s'appliquant sur chacune des six faces du parallélépipède.
- Les forces extérieures autres que les forces normales, s'appliquant sur l'ensemble du fluide de dV (par exemple le poids).

Projetons le PFD sur l'axe (Oz): les forces de pression étant orthogonales aux faces du parallélépipède, seuls 2 forces de pression sont dirigées suivant (Oz): la pression s'exerçant sur la face du dessous (en z) notée $P(z)$ et dirigée vers le haut, et la pression s'exerçant sur la face du dessus (en $z + dz$) notée $P(z + dz)$ et dirigée vers le bas. Notons que la pression variant dans le fluide, a priori $P(z) \neq P(z + dz)$.

Cette projection s'écrit:

$$\sum F_z - P(z + dz)dxdy + P(z)dxdy = 0$$

F_z représente les forces extérieures autres que les forces de pression. En divisant par $dV=dxdydz$:

$$\sum \frac{F_z}{dV} - \left(\frac{P(z + dz)dxdy + P(z)dxdy}{dV} \right) = 0$$

soit

$$\sum (f_v)_z - \left(\frac{dP}{dz} \right) = 0$$

f_v sont les forces volumiques s'appliquant sur l'élément dV du fluide (c'est à dire force par volume).

Cette relation se détermine de la même manière suivant x et y , ce qui permet d'écrire le principe fondamental de la statique des fluides:

$$\sum \vec{f}_v - \overrightarrow{grad}P = 0$$

Si on considère que la force de pesanteur (ce qui est le plus courant, fluide situé sur Terre, comme l'atmosphère terrestre ou les océans). La force volumique de pesanteur est:

$$\vec{f}_v = \frac{\vec{F}}{dV} = \frac{(dm)\vec{g}}{dV} = \rho\vec{g}$$

avec dm la masse du volume élémentaire dV et $\rho=dm/dV$ la masse volumique du fluide considéré. En appliquant le principe fondamental de la statique des fluides projeté sur (Oz) , il vient:

$$-\rho g - \frac{dP}{dz} = 0$$

Soit

$$dP = -\rho g dz \tag{1}$$

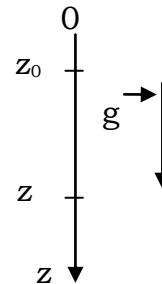
5.2.1.Cas d'un fluide incompressible et homogène

Supposons ici que la seule force appliquée est le champ de pesanteur terrestre, et que le champ de pesanteur est uniforme: la relation (1) peut donc être utilisée avec g constante.

Pour un fluide incompressible $\rho = \text{Cst}$. La relation (1) s'intègre donc aisément en:

$$\int_{P_0}^P dP = \rho g \int_{z_0}^z dz$$

$$P - P_0 = \rho g(z - z_0)$$

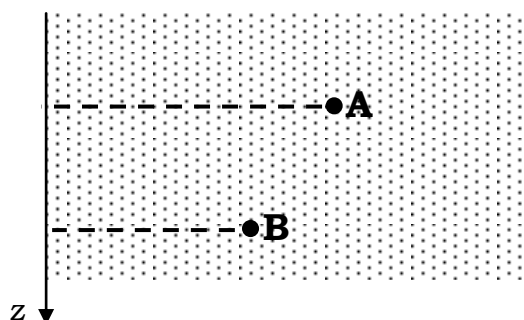


• **Conséquences**

- Les surfaces isobares sont horizontales.
- $P = P_0 + g \int \rho dz$ le dernier terme de cette égalité est le poids du liquide contenu dans un cylindre de hauteur $z - z_0$ et d'aire l'unité.

• **Exemple**

La pression de l'eau dans l'océan à 15 m de profondeur est de 4 bars. On souhaite connaître la pression qui règne à 200 m de profondeur. La densité de l'eau de mer est de 1,02.



$$\rho_{mer} = d_{mer} \cdot \rho_{eau} = 1,02 \cdot 1000 = 1020 \text{ kg/m}^3$$

$$P_B = P_A + g\rho(z_B - z_A)$$

$$P_B = 4 \cdot 10^5 + 9,81 \cdot 1020(185) = 22,51 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 22,51 \text{ bars}$$

5.2.2. Cas d'un fluide compressible (l'atmosphère isotherme considéré comme gaz parfait)

Pour étudier la variation de la pression atmosphérique terrestre en fonction de l'altitude, on considère la température comme constante et le champ de pesanteur uniforme. On considère que l'air est un gaz parfait décrit par la loi;

$$P = \frac{\rho RT}{M}$$

L'équation (1) s'écrit:

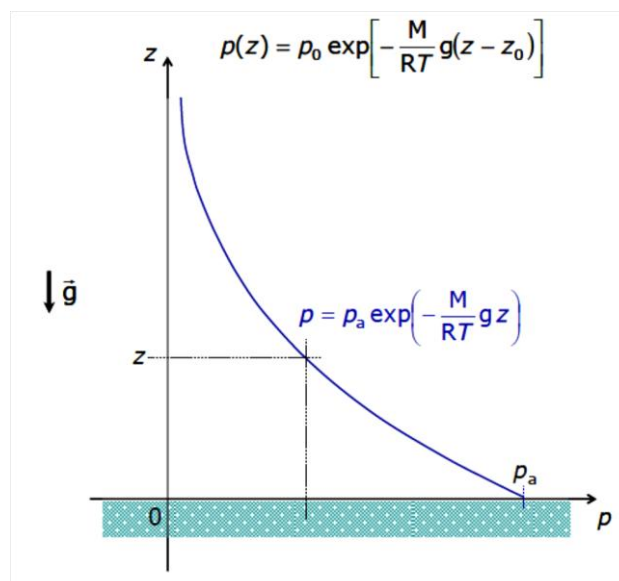
$$dP = -\rho g dz$$

$$dP = -\frac{PM}{RT} g dz$$

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = \int_{z_0}^z -\frac{M}{RT} g dz$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{M}{RT} g(z - z_0)$$

$$P = P_0 \exp\left[-\frac{M}{RT} g(z - z_0)\right]$$



- **Exemple**

Dans les couches basses de l'atmosphère terrestre (pour $0 < z < 11000 \text{ m}$: la troposphère), le modèle de l'atmosphère isotherme doit être remplacé par un modèle où la température varie avec l'altitude. On admet la loi empirique $T(z) = T_0 - \lambda z$, avec $T_0 = 288\text{K}$ et $\lambda = 6,5 \text{ K.Km}^{-1}$. On pose $H = R T_0/Mg$ et l'air est tj supposé parfait. Calculer dans ce cas la pression à $Z_1 = 11\text{km}$, $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Rép. $P = 22605 \text{ Pa}$.

5.3. Mesure de la pression

5.3.1. Le baromètre

Le baromètre est un appareil qui permet de mesurer la pression absolue, en particulier la pression atmosphérique. Le premier baromètre a été inventé par Torricelli en 1644. Torricelli remplit de mercure un tube de verre d'un mètre de long, fermé à une extrémité. Il le retourne et le plonge dans une cuvette remplie de mercure. Il constate alors que le niveau de mercure dans le tube s'abaisse, laissant un espace de vide au-dessus de lui. Il vient de découvrir la pression atmosphérique, comme il l'écrit dans une lettre: « Nous vivons submergés au fond d'un océan d'air élémentaire, dont on sait par des expériences incontestables qu'il a un poids »

La figure ci-contre représente le baromètre de Torricelli. $\rho_{\text{mercure}} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

La pression au point A vaut $P_A = 0$ (vide absolu).

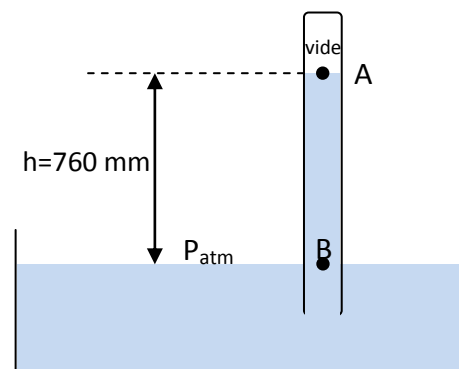
Le point B appartient au plan isobare dont la pression est $P_B = P_{\text{atm}}$.

Nous avons donc

$$P_B - P_A = \rho g h$$

$$P_{\text{atm}} = P_A + \rho g h = 13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,76 = 1,01396 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Question: quelle devrait être la hauteur de la colonne si le tube était rempli d'eau. Rép. $10,32 \text{ m}$

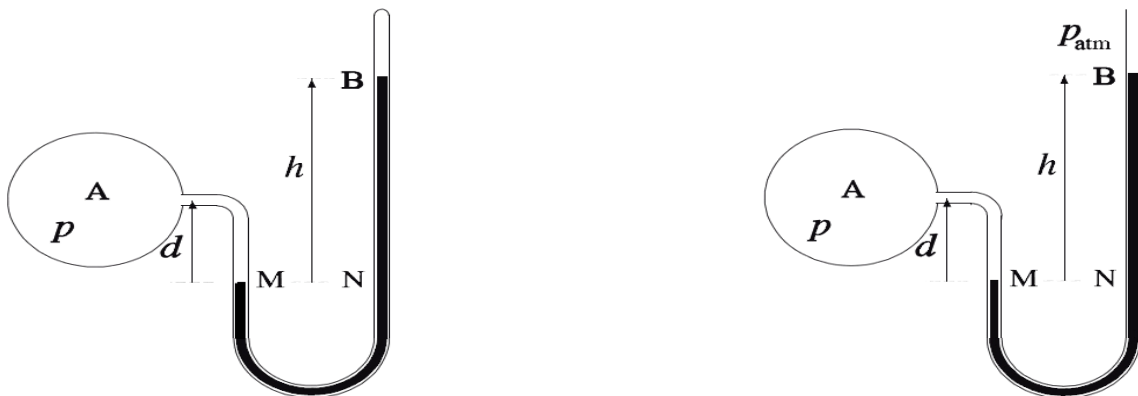


Remarque; Le baromètre est utilisé uniquement pour mesurer la pression atmosphérique.

5.3.2. Le manomètre

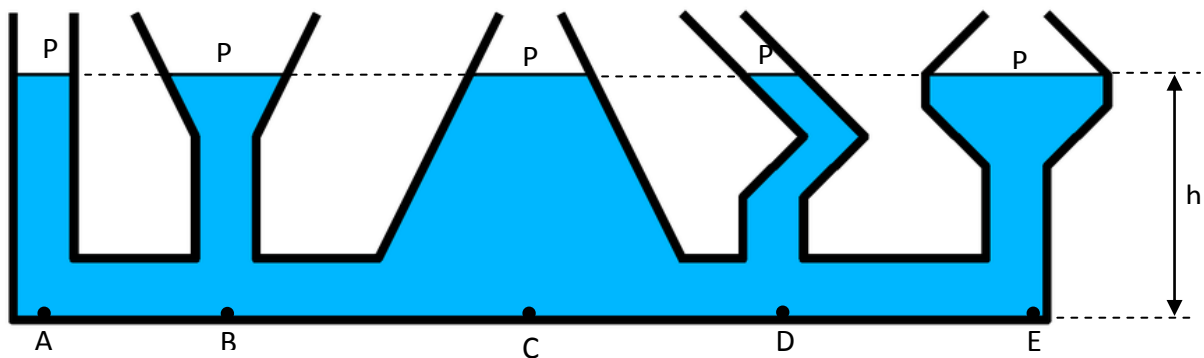
Un manomètre est un appareil destiné à mesurer la différence de pression entre un fluide contenu dans une enceinte fermée et la pression atmosphérique. Il s'agit donc d'un appareil de mesure de la pression relative.

Manomètre à bout fermé (à gauche) et manomètre à bout ouvert (à droite)



5.4. Principe des vases communicants

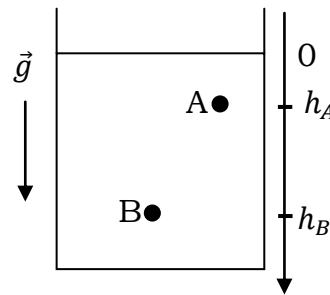
Considérons des vases de formes quelconques communicants entre eux et contenant un même liquide au repos;



- Si elles sont soumises à la même pression P , les surfaces libres sont à la même hauteur h .
- Les pressions en A, B, C, D et E sont identiques, quelle que soit la forme du récipient.

5.5. Théorème de Pascal

Soient deux points, A et B, situés dans un même liquide à des profondeurs différentes (h_A et h_B respectivement).



D'après l'équation fondamentale de la statique des fluides, nous avons, en supposant qu'à $h = 0$, la pression est nulle, $P_A = \rho g h_A$ et $P_B = \rho g h_B$

$$P_B - P_A = \rho g (h_B - h_A) = \rho g \Delta h$$

Pour une différence $h_B - h_A$ constante dans un même liquide au repos, la différence $P_B - P_A$ est constante, i.e que si P_A augmente, P_B augmentera de la même quantité.

Enoncé; dans un fluide incompressible en équilibre, toute augmentation de pression produite en un point est transmise intégralement aux autres points du fluide.

Application: Presse hydraulique

La presse hydraulique est une application intéressante du théorème de Pascal, c'est un moyen simple de multiplier les forces, un petit piston de section S_1 , sur lequel s'exerce une force F , communique la pression F_1/S_1 à un grand récipient surmonté d'un piston de section S_2 . Si les deux pistons sont aux mêmes niveaux du liquide, $P_A = P_B$, donc $F_1/S_1 = F_2/S_2$

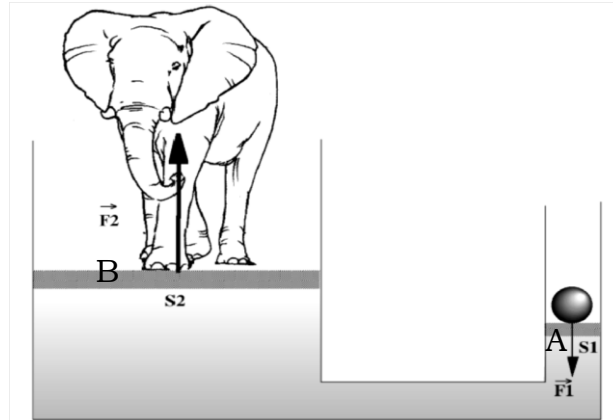
La surpression $P = F_1/S_1$ est transmise en tout point donc $P = F_2/S_2$

$$F_2 = P \cdot S_2 = \left(\frac{F_1}{S_1}\right) \cdot S_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

$$\text{or } S_2 \gg S_1$$

$$\text{donc } F_2 \gg F_1$$

Il est donc possible de soulever de lourdes charges au point B en appliquant de petite force au point A.

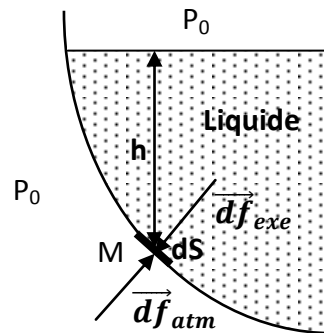


Principe de base du vérin hydraulique

6. Force hydrostatique exercée par un fluide sur une paroi

6.1. Force exercée sur un élément de surface

Soit un liquide contenu dans un récipient de forme quelconque. Soit P_0 la pression du gaz (le plus courant est l'air) environnant le récipient.



En un point M situé à une distance h de la surface libre du liquide, la pression est:

$$P(M) = P_0 + \rho gh$$

L'élément de surface dS entourant le point M subit:

- Une force \vec{df}_1 normale à dS et orientée vers l'extérieur de la part du liquide:

$$\vec{df}_1 = PdS = [P_0 + \rho gh]dS \cdot \vec{n}$$

- Une force \vec{df}_2 normale à dS et orientée vers l'intérieur du fluide de la part du gaz environnant (l'air)

$$\vec{df}_2 = -P_0 dS \cdot \vec{n}$$

La résultante s'exerçant sur dS est donc [force relative]:

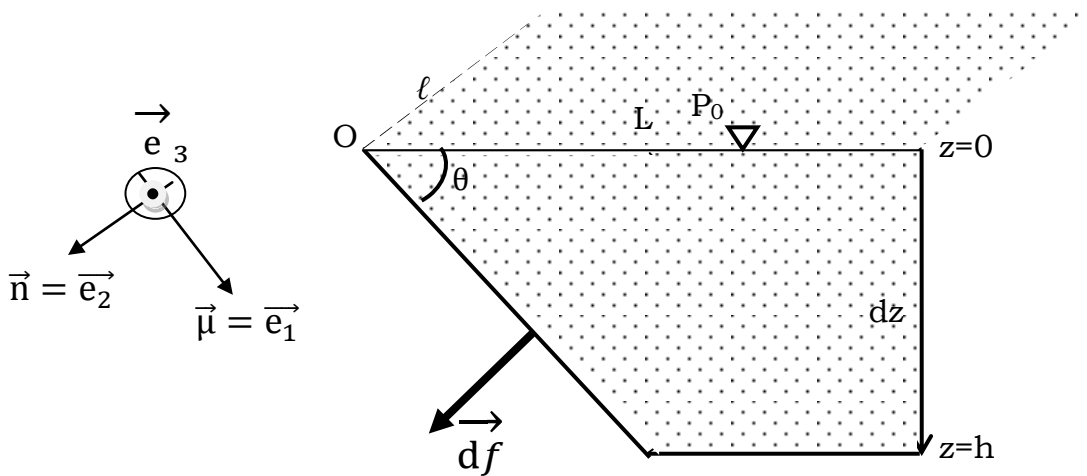
$$\vec{df} = \vec{df}_1 + \vec{df}_2 = (\rho gh) dS \cdot \vec{n}$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire normal à dS et orienté vers l'extérieur.

6.2. Résultante des forces hydrostatiques sur une paroi plane

6.2.1. Module de la force

Soit ℓ la largeur de la paroi perpendiculaire au plan de la figure et L sa longueur dans le plan de la figure.



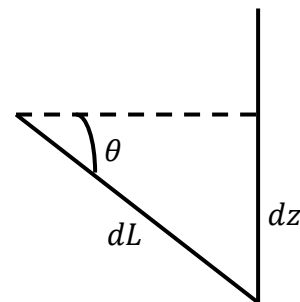
$$dS = d\ell \cdot dL$$

$$\sin\theta = \frac{dz}{dL} \Rightarrow dL = \frac{dz}{\sin\theta}$$

$$dS = d\ell \cdot \frac{dz}{\sin\theta}$$

$$\|\vec{df}\| = \rho g z \cdot dS = \rho g z \cdot d\ell \cdot \frac{dz}{\sin\theta}$$

$$f = \frac{\rho g}{\sin\theta} \cdot \int_0^\ell d\ell \cdot \int_0^h z dz = \frac{\rho g}{\sin\theta} \cdot \ell \cdot \frac{h^2}{2}$$



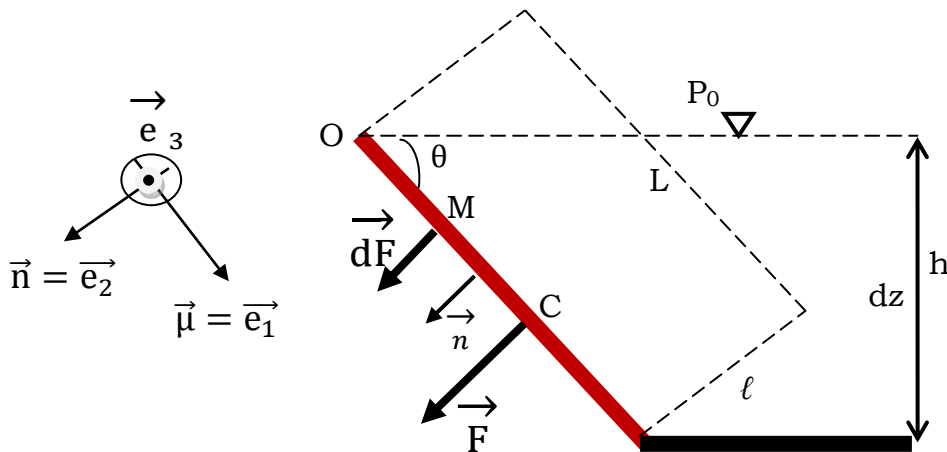
Sachant que

$$\frac{h}{2} = h_G, \quad L = \frac{h}{\sin\theta}, \quad S = \ell \cdot L$$

$$f = \rho g h_G \cdot S = P_G \cdot S$$

6.2.2. Point d'application de la force hydrostatique (centre de poussée)

C'est le point d'application de la résultante de la force de poussée. Il se détermine par le calcul du moment de la force F par rapport à un point O quelconque, choisissons le haut niveau de la surface libre du fluide.



Pour déterminer le point d'application de \vec{F} , noté C, on écrit le moment en O

$$\vec{OC} \wedge \vec{F} = \int \vec{OM} \wedge d\vec{F}$$

Le moment de la résultante = résultantes des moments en un point (O par exemple).

$$\vec{F} = \frac{\rho g}{\sin\theta} \cdot \ell \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \vec{n}$$

$$dF = \rho g z \cdot d\ell \cdot \frac{dz}{\sin\theta}$$

$$\vec{OC} = OC \cdot \vec{\mu}$$

$$OC \cdot F \cdot \underbrace{\vec{\mu} \wedge \vec{n}}_{\vec{e}_3} = \int OM \cdot dF \cdot \underbrace{\vec{\mu} \wedge \vec{n}}_{\vec{e}_3}$$

$$OC \cdot F = \int OM \cdot dF$$

$$OC \cdot \frac{\rho g}{\sin\theta} \cdot \ell \cdot \frac{h^2}{2} = \int OM \cdot \rho g z \cdot d\ell \cdot \frac{dz}{\sin\theta}$$

avec $OM = \frac{z}{\sin\theta}$

$$OC \cdot \frac{\rho g}{\sin\theta} \cdot \ell \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{\rho g}{(\sin\theta)^2} \cdot \int_0^\ell d\ell \cdot \int_0^h z^2 dz$$

$$OC \cdot \sin\theta \cdot \ell \cdot \frac{h^2}{2} = \ell \cdot \frac{1}{3} \cdot h^3$$

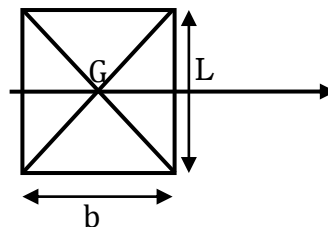
$$OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{\sin\theta} = \frac{2}{3} L$$

- Ou bien, on peut appliquer directement la relation;

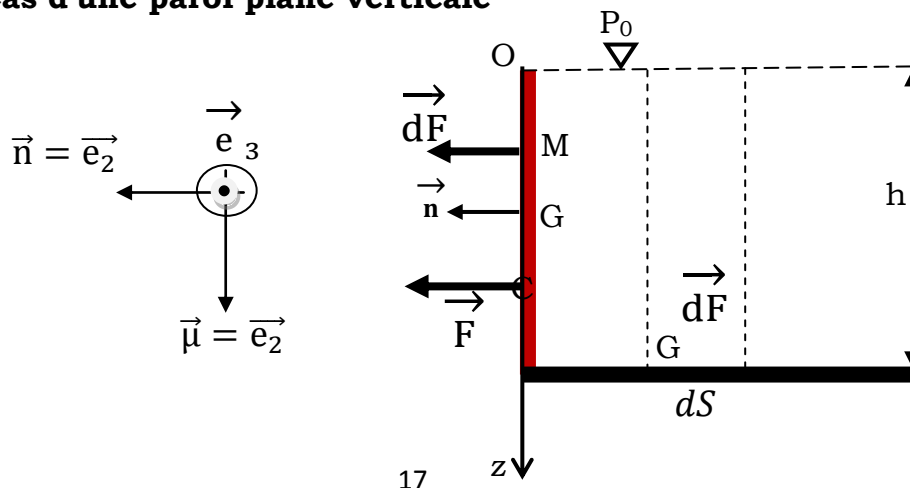
$$z_C = z_G + \frac{I_G}{z_G \cdot S_{AB}}$$

I_G représente le moment d'inertie (quadratique) par rapport à l'axe qui passe par le centre de gravité de la surface S, par exemple pour une section rectangulaire;

$$I_G = \frac{bL^3}{12} z_C = \frac{L}{2} + \frac{\frac{bL^3}{12}}{\frac{L}{2}Lb} = \frac{2}{3} L$$



6.2.3. Cas d'une paroi plane verticale



$$\vec{OC} \wedge \vec{F} = \int \vec{OM} \wedge d\vec{F}$$

$$F = P_G.S = \rho g \frac{h}{2} L. \ell$$

$$dF = \rho g z. dS = \rho g z. \ell. dz$$

$$OM = z$$

$$OC. \rho g \frac{h}{2} L. \ell = \int_0^h z. \rho g z. \ell. dz \Rightarrow OC. \frac{h}{2} L. = \int_0^h z^2. dz = \frac{1}{3} h^3$$

$$OC.L = \frac{2}{3} h^2$$

Puisque L=h donc

$$OC = \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} L$$

6.2.4. Cas d'une paroi plane horizontale (voir figure précédente)

$$dF = P.dS = \rho gh.dS$$

$$F = \int \rho gh. dS = \rho gh. S$$

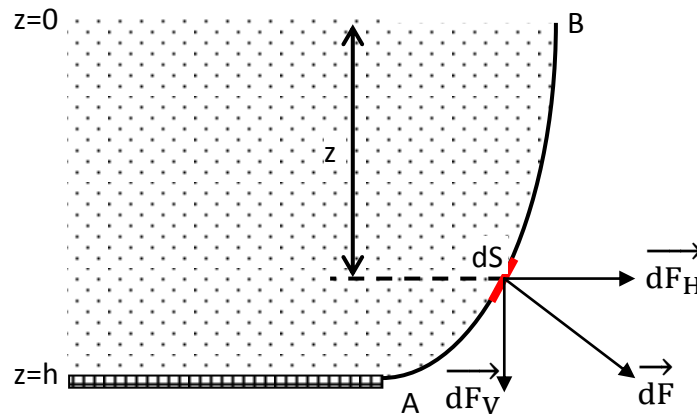
car toute la surface sera touchée par le fluide

La force de pression applique sur une paroi horizontale, est égale au poids d'une colonne liquide verticale.

Le point d'application de cette force est situé au centre de gravité de la surface.

6.3. Résultante des forces hydrostatiques sur une paroi courbe

Considérons une paroi AB courbe de surface S en contact avec un liquide. La résultante des forces de pression F peut être décomposée en deux composantes; une composante horizontale F_H et une composante verticale F_V.

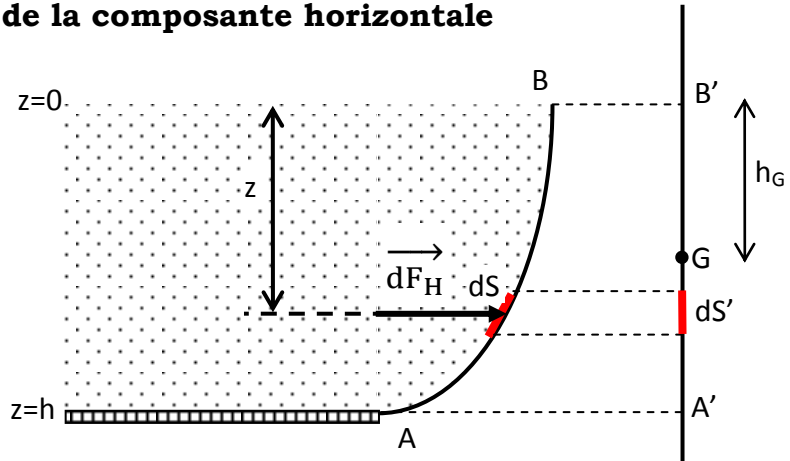


6.3.1. Détermination de la composante horizontale

$$dF_H = \rho g z dS'$$

$$F_H = \int \rho g z dS'$$

$$F_H = \rho g h_G S'$$



où la surface S' est la projection de la surface S sur le plan perpendiculaire à la surface libre du liquide.

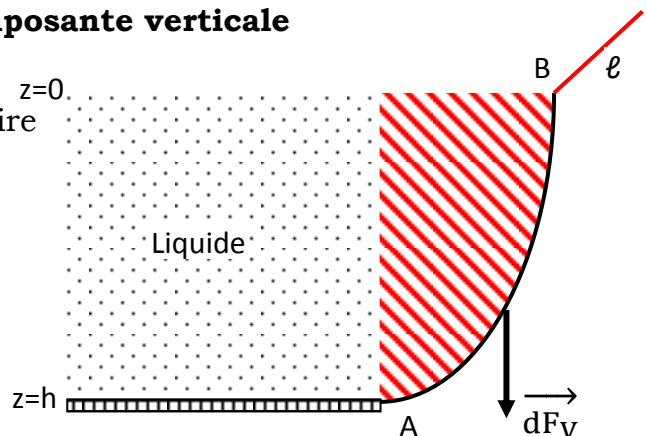
Nota 1: le centre de poussée de la composante horizontale est le centre de poussée de la section projetée S' .

6.3.2. Détermination de la composante verticale

$$dF_V = \rho g z dS$$

avec $z dS = dV$ est le volume élémentaire

$$F_V = \rho g V$$

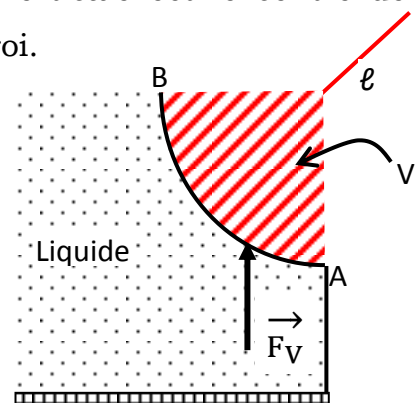


La composante verticale F_V est égale au poids du volume du liquide porté par cette paroi.

Nota 2: le centre de poussée de la composante verticale est le centre de gravité de la colonne du liquide délimitée par la paroi.

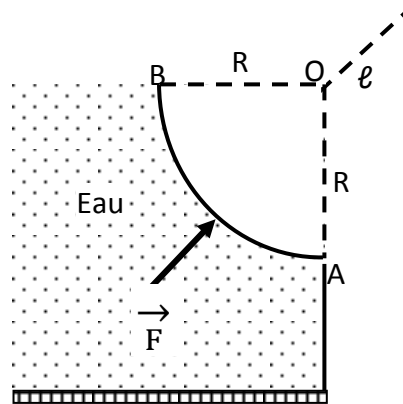
Remarque: si le liquide est au dessous de la paroi, la composante verticale représente le poids du liquide s'appuyant sur le contour AB

$$F_V = \rho g V$$



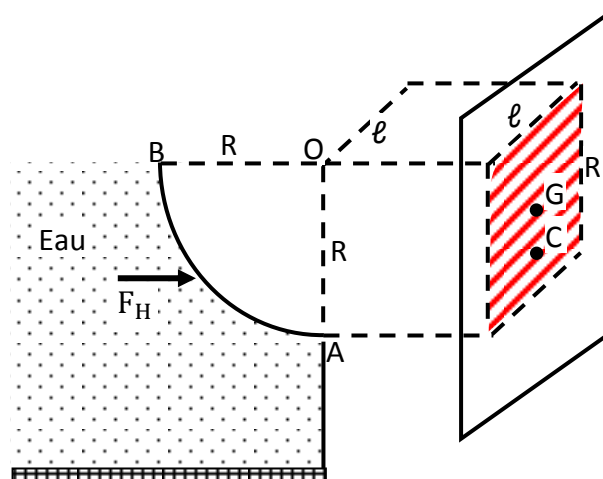
Exemple

Déterminer la résultante des forces hydrostatiques appliquée par l'eau sur un quart de cylindre



Nous décomposons, tout d'abord, la résultante des forces hydrostatiques en deux composantes F_H et F_V

- Calcul de F_H



$$F_H = \rho g h_G S'$$

S' est la projection de la surface S sur le plan perpendiculaire à la surface libre du liquide.

$$S' = R \cdot \ell$$

$$h_G = \frac{R}{2}$$

$$F_H = \rho g \frac{R^2}{2} \cdot \ell$$

Le point d'application de F_H est $OC = \frac{2}{3}R$

- Calcul de F_V

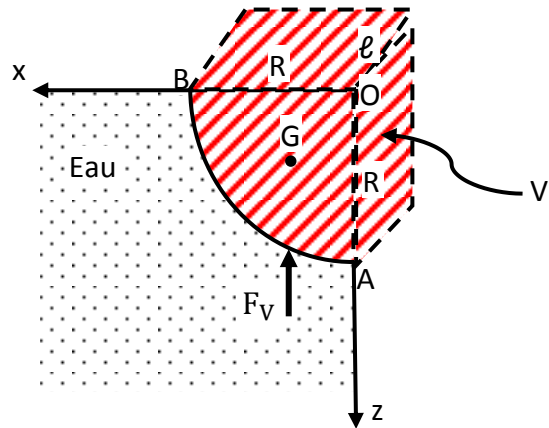
$$F_V = \rho g V$$

$$V = S_{ABO} \cdot \ell = \frac{\pi R^2}{4} \cdot \ell$$

$$F_V = \rho g \frac{\pi R^2}{4} \cdot \ell$$

$$x_G = \frac{1}{S} \iint x dS$$

$$z_G = \frac{1}{S} \iint z dS$$



En coordonnées polaires

$$x_G = \frac{1}{S} \iint (r \cos \theta) r dr d\theta = \frac{1}{S} \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{4R}{3\pi}$$

$$z_G = \frac{1}{S} \iint (r \sin \theta) r dr d\theta = \frac{1}{S} \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{4R}{3\pi}$$

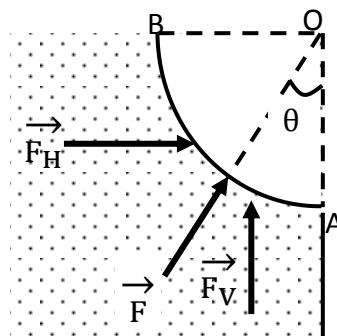
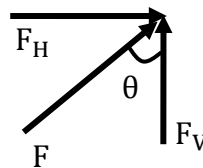
$$C = G \left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi} \right)$$

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{\left(\rho g \frac{R^2}{2} \cdot \ell \right)^2 + \left(\rho g \frac{\pi R^2}{4} \cdot \ell \right)^2} = \rho g \frac{R^2}{2} \ell \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}$$

Le centre de poussée ou le point d'application de la résultante des forces hydrostatiques par l'eau sur cette paroi courbée est déterminé graphiquement;

$$\tan \theta = \frac{F_H}{F_V} = \frac{\rho g \frac{R^2}{2} \cdot \ell}{\rho g \frac{\pi R^2}{4} \cdot \ell} = \frac{2}{\pi}$$

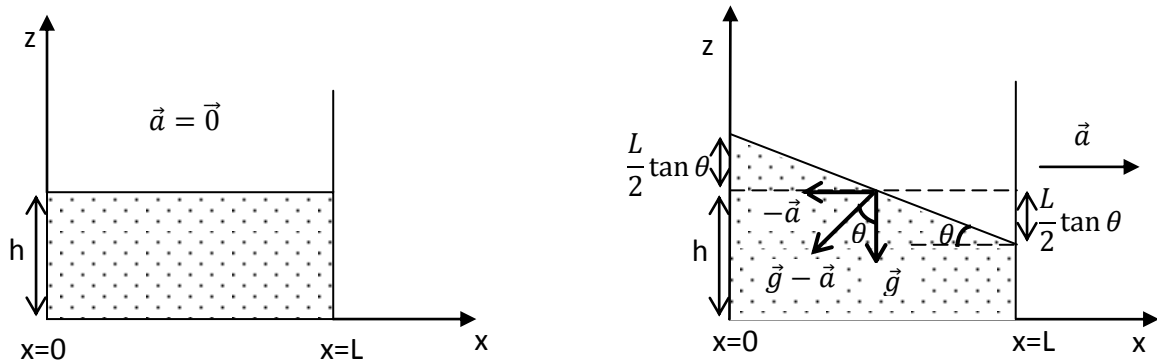
$$\theta = 32^\circ$$



7. Equilibre relatif

7.1. Pression dans un fluide soumis à une accélération horizontale constante

Soit un réservoir contenant un liquide soumis à une accélération \vec{a} constante horizontale



$$\tan \theta = \left| \frac{\vec{a}}{\vec{g}} \right|$$

Le principe fondamental de la statique des fluides s'écrit:

$$\sum \vec{f}_V - \overrightarrow{\text{grad}P} = 0(*)$$

\vec{f}_V = forces volumiques extérieures:

- Le poids $f_{V1} = \frac{dm \cdot \vec{g}}{dv} = \rho \vec{g}$
- La force d'inertie opposée à \vec{a} ; $f_{V2} = \frac{-dm \cdot \vec{a}}{dv} = -\rho \vec{a}$

$$(*) \Rightarrow \rho(\vec{g} - \vec{a}) = \overrightarrow{\text{grad}P}$$

Projection de cette équation donne

$$\begin{cases} Ox: -\rho a = \frac{\partial P}{\partial x} \\ Oy: \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ Oz: -\rho g = \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

D'un autre coté, nous avons la différentielle de la pression;

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{=0} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = -\rho a dx - \rho g dz$$

$$dP = -\rho(adx + gdz)$$

• **Equation des surfaces isobares**

Les surfaces isobares sont tel que $dP = 0$

$$dP = -\rho(adx + gdz) = 0$$

$$adx - gdz$$

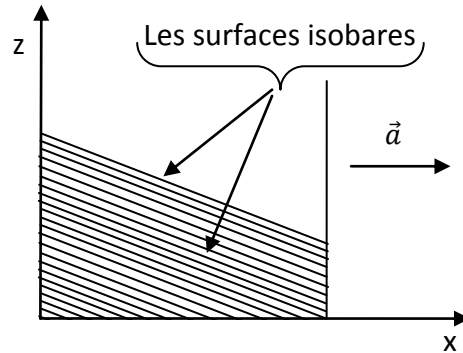
$$\int dz = -\int \frac{a}{g} dx$$

$$z = -\frac{a}{g}x + cst$$

$$x = 0, z = h + \frac{L}{2} \tan \theta$$

$$cst = h + \frac{L}{2} \tan \theta$$

$$z = -\frac{a}{g}x + h + \frac{L}{2} \tan \theta$$



7.2. Pression dans un fluide soumis à une rotation uniforme

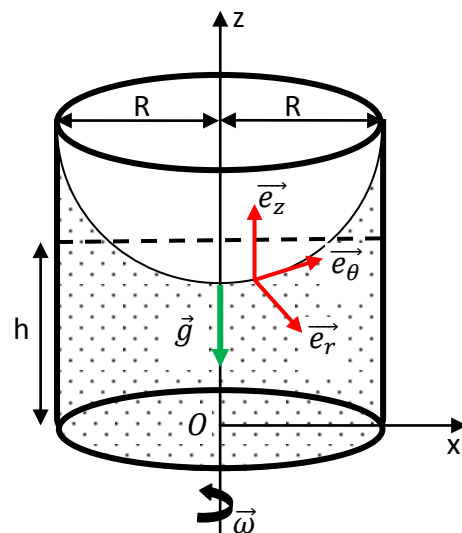
Soit un vase de rayon R contenant un liquide dont la surface libre est initialement à la hauteur h. Le vase tourne autour de son axe Oz à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ constante.

D'après la théorie du mouvement circulaire, l'accélération radiale est;

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Par rapport à un repère tournant autour du vase $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, le liquide est au repos et est soumis aux forces:

- Le poids $f_{V_1} = \rho \vec{g}$
- La force d'inertie; $f_{V_2} = \rho \omega^2 r \cdot \vec{e}_r$



Le principe fondamental de la statique des fluides s'écrit:

$$\sum \vec{f}_V - \overrightarrow{grad}P = 0$$

$$\rho \vec{g} + \rho \omega^2 r \cdot \vec{e}_r = \overrightarrow{grad}P$$

$$\overrightarrow{grad}P = \frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z$$

Projection de cette équation donne (coordonnées cylindriques (O, r, θ, z))

$$\begin{cases} \vec{e}_r: \rho \omega^2 r = \frac{\partial P}{\partial r} \\ \vec{e}_\theta: \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ \vec{e}_z: -\rho g = \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial P}{\partial z} dz = \rho(\omega^2 r dr - g dz)$$

• **Equation des surfaces isobares**

$$dP = \rho(\omega^2 r dr - g dz) = 0$$

$$\int dz = \frac{\omega^2}{g} \int r dr$$

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0$$

Ce sont des paraboloides de révolution de même axe que l'axe de rotation.

• **Equation de la surface libre**

Sans rotation, le volume est $V = \pi R^2 h$

En rotation, ce volume peut s'écrire en somme suivante:

$$V = V_1 + V_2$$

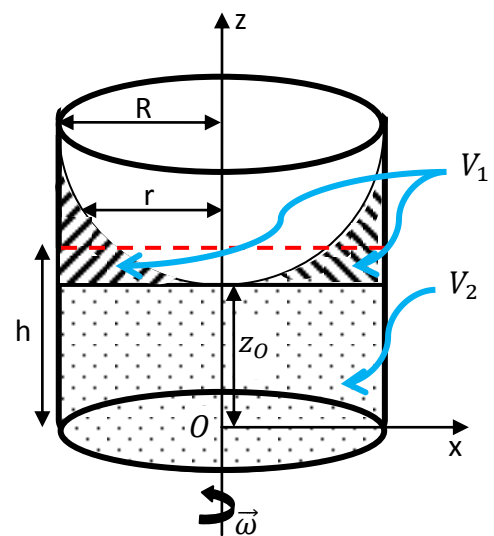
$$V_1 = \int_0^R \pi(R^2 - r^2) dz$$

avec $dz = \frac{\omega^2}{g} r dr$

$$V_1 = \int_0^R \pi(R^2 - r^2) \frac{\omega^2}{g} r dr = \frac{\pi \omega^2 R^4}{4g}$$

$$V_2 = \pi R^2 z_0$$

On aura donc



$$V = \pi R^2 h = \pi R^2 z_0 + \frac{\pi \omega^2 R^4}{4g}$$

$$z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

Par suite l'équation de la surface libre est

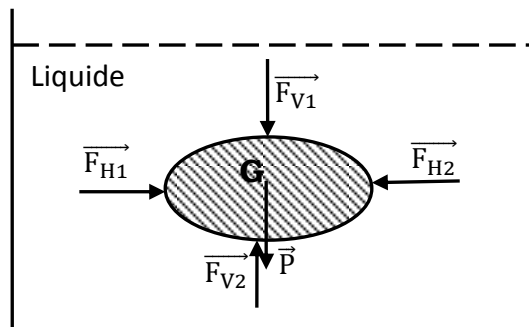
$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0 = \frac{\omega^2}{2g} \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right) + h$$

Si $z = h$, on aura $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$

8. Principe d'Archimède – Flottabilité

8.1. Principe d'Archimède

Soit un corps solide de volume V immergé dans un liquide de masse volumique ρ



Le corps est soumis aux;

- Son poids
- Les forces de pression verticales et horizontales.
 - La résultante des forces de pression horizontales est nulle car $F_{H1} = F_{H2}$
 - La résultante des forces de pression verticales est $F_V = F_{V2} - F_{V1}$ dirigée vers le haut.

Il est donc soumis à une force dirigée en sens inverse du poids et égale en intensité pour assurer l'équilibre des forces. Cette force est appelée *Poussée d'Archimède*.

Énoncé du principe d'Archimède

Tout corps plongé dans un liquide subit une poussée verticale dirigée vers le haut, de centre de poussée C (le centre de gravité de la partie immergée) et dont l'intensité est égale au poids de liquide déplacé.

$$P_A = \rho_{\text{fluide}} \cdot g \cdot V_{\text{liquide déplacé}}$$

8.2. Equilibre d'un corps immergé dans un liquide

L'équation d'équilibre pour un corps immergé dans fluide est $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$$\vec{P} + \vec{P}_A = \vec{0}$$

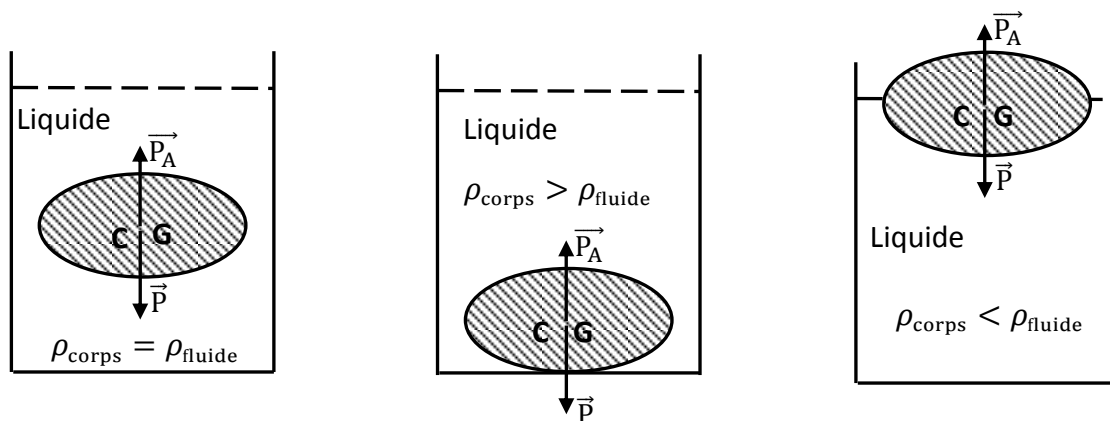
$$P = \rho_{\text{corps}} \cdot g \cdot V_{\text{corps}}$$

$$P_A = \rho_{\text{fluide}} \cdot g \cdot V_{\text{imm}} = \rho_{\text{fluide}} \cdot g \cdot V_{\text{déplacé}} = \rho_{\text{corps}} \cdot g \cdot V_{\text{corps}}$$

$$\rho_{\text{corps}} \cdot V_{\text{corps}} = \rho_{\text{fluide}} \cdot V_{\text{déplacé}}$$

$$\frac{\rho_{\text{corps}}}{\rho_{\text{fluide}}} = \frac{V_{\text{déplacé}}}{V_{\text{corps}}}$$

- $\rho_{\text{corps}} = \rho_{\text{liquide}}$ le corps est immergé et reste entre deux couches liquides (équilibre indifférent).
- $\rho_{\text{corps}} > \rho_{\text{liquide}}$ le corps descend jusqu'à toucher le fond du récipient.
- $\rho_{\text{corps}} < \rho_{\text{liquide}}$ le corps monte et flotte jusqu'à la surface du liquide.



Application

Un iceberg de masse volumique $\rho_{\text{corps}} = 920 \text{ kg/m}^3$ flotte dans l'océan (masse volumique de l'eau salée: $\rho_{\text{fluide}} = 1025 \text{ kg/m}^3$). Le volume émergé est 500 m^3 . Quel est le volume immergé ?

$$\vec{P} + \vec{P}_A = 0$$

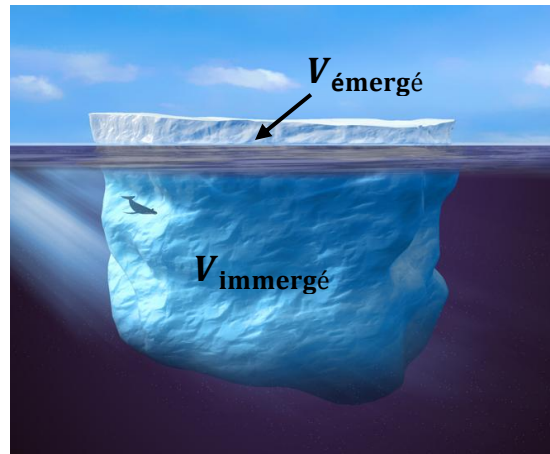
$$P = \rho_{\text{corps}} \cdot g \cdot V_{\text{corps}}$$

$$= \rho_{\text{corps}} \cdot g \cdot (V_{\text{émergé}} + V_{\text{immergé}})$$

$$P_A = \rho_{\text{fluide}} \cdot g \cdot V_{\text{imm}}$$

$$\rho_{\text{corps}} \cdot g \cdot (V_{\text{émergé}} + V_{\text{immergé}}) = \rho_{\text{fluide}} \cdot g \cdot V_{\text{imm}}$$

$$V_{\text{immergé}} = \frac{\rho_{\text{corps}}}{\rho_{\text{fluide}} - \rho_{\text{corps}}} V_{\text{émergé}}$$

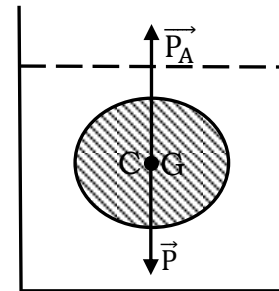


Application numérique; $V_{\text{immergé}} = 4380\text{m}^3$

8.3. Stabilité des corps immergés

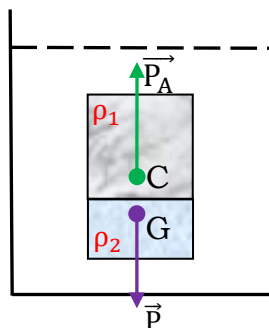
Soit un corps immergé dans un liquide. Deux situations sont observées;

- Si le corps est homogène, alors le centre de poussée C (appelé aussi centre de carène) coïncide avec le centre de gravité du corps G, l'équilibre est dite indifférent.

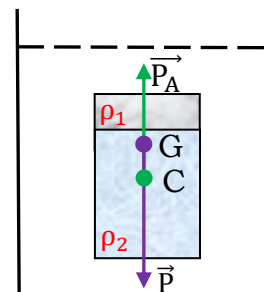


Définition: Une position d'équilibre est dite indifférente lorsqu'un mobile ne manifeste aucune tendance à quitter la nouvelle position qui lui est assignée.

- Si le corps est hétérogène (exemple; un solide qui se compose de deux matières différentes), alors le centre de poussée C est différent de G;



C est en dessus de G; équilibre stable



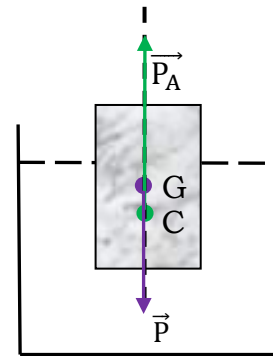
C est en dessous de G; équilibre instable

Remarques;

- Une position d'équilibre est dite stable lorsqu'un mobile légèrement écarté de sa position initiale sous l'effet d'une action perturbatrice très petite tend à y revenir de lui-même.
- Une position d'équilibre est dite instable lorsqu'un mobile légèrement écarté de sa position initiale sous l'effet d'une action perturbatrice tend à s'écarter de cette position initiale.

8.4. Stabilité des corps flottants

- Si le centre de gravité G est au-dessus du centre de poussée C , le poids et la poussée d'Archimède ont la même ligne d'action, G et C doivent être sur la même verticale. Cette situation correspond à une position stable.

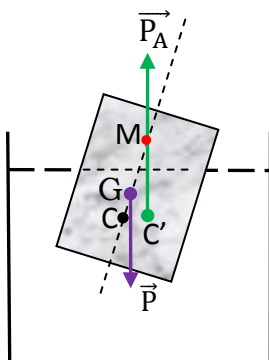


G est en dessus de C ; position stable

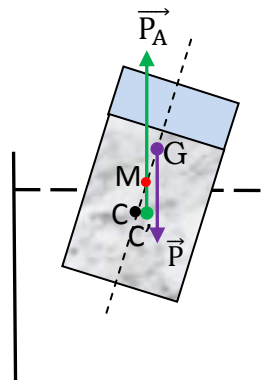
- Si le centre de gravité G est au-dessus du centre de poussée C , le poids et la poussée d'Archimède n'ont pas la même ligne d'action, la forme de la partie immergée change et de ce fait, le centre de poussée se déplace en C' . La ligne d'action de la poussée d'Archimède se déplace aussi et coupe l'axe de symétrie en point M appelé métacentre.

Remarque: la distance GM est appelée la hauteur métacentrique.

La stabilité dans ce cas est liée à la position de G par rapport à M :



M est en dessus de G ; équilibre stable

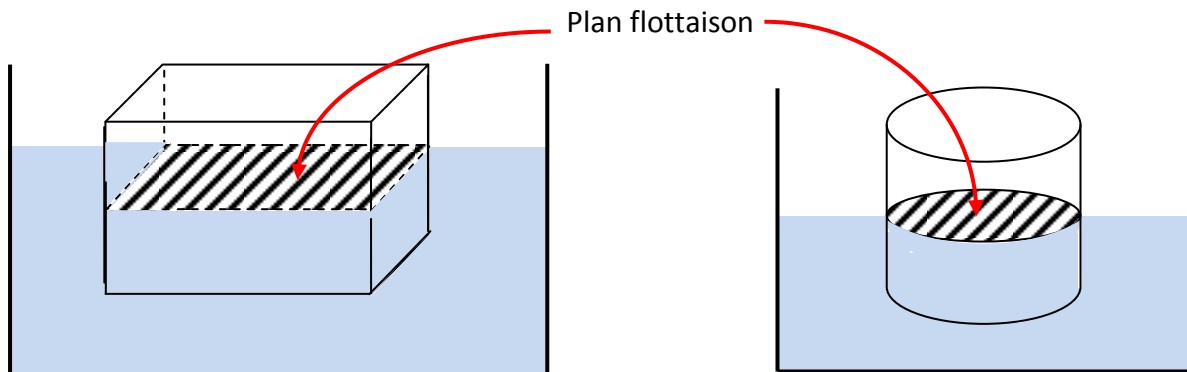


M est en dessous de G ; équilibre instable

On détermine la position du métacentre M par la relation suivante:

$$GM = \frac{I}{V_{imm}} - CG$$

I est le plus petit moment quadratique du plan flottaison par rapport à l'axe passant par le centre de ce plan G_p . $I = \min(I_{G_x}, I_{G_y})$



$GM = 0$ équilibre neutre

$GM > 0$ équilibre stable

$GM < 0$ équilibre instable

Application:

Un corps, de densité $d = 0,8$ flotte sur l'eau.

Ses dimensions sont $1m \times 2m \times 3m$.

Calculer la hauteur métacentrique et vérifier sa stabilité

Calculons tout d'abord la hauteur de la partie immergée h

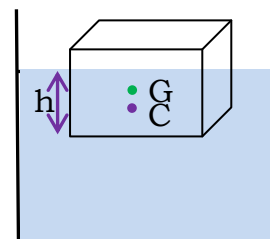
On a

$$P_A = P$$

$$\rho_{eau} \cdot g \cdot V_{imm} = \rho_{cops} \cdot g \cdot V_{corps}$$

$$\rho_{eau} \cdot g \cdot S \cdot h = d \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot S \cdot \ell$$

$$h = d \cdot \ell = 0,8 \cdot 1 = 0,8m$$



La hauteur du centre de la carène ou le centre de poussée C est $OC = \frac{h}{2} = 0,4$

La hauteur du centre de gravité G est $OG = \frac{\ell}{2} = 0,5$

Donc $CG = OG - OC = 0,5 - 0,4 = 0,1m$

Nous appliquons la relation de la hauteur métacentrique

$$GM = \frac{I}{V_{imm}} - CG$$

$$I = \min(I_x, I_y) = \min\left(\frac{bh^3}{12}, \frac{hb^3}{12}\right)$$

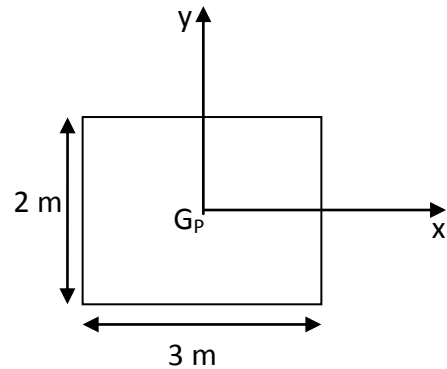
$$= \min\left(\frac{3 \cdot 2^3}{12}, \frac{2 \cdot 3^3}{12}\right)$$

$$I = \frac{3 \cdot 2^3}{12}$$

$$GM = \frac{\frac{3 \cdot 2^3}{12}}{S \cdot h} - CG$$

$$GM = \frac{\frac{3 \cdot 2^3}{12}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0,4} - 0,1 = 0,73 \text{ m} > 0$$

⇒ M est en dessus de G: équilibre stable



CHAPITRE II

Cinématique des fluides

CINEMATIQUE DES FLUIDES

Introduction

La cinématique est la description analytique d'un système en mouvement. Elle s'intéresse aux mouvements des fluides par rapport au temps sans tenir compte des forces qui ont donné naissance.

Le problème qui se pose est comment observer un milieu fluide en mouvement, comment l'observer et comment le décrire ?

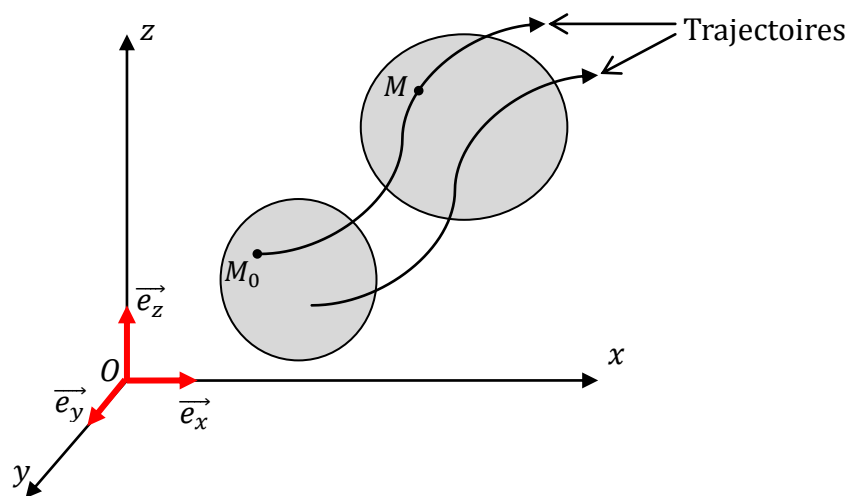
A ce fluide, on attache des grandeurs cinématiques (position, vitesse, accélération) et des grandeurs thermodynamiques (masse volumique, température, . . .).

1. Fluide en mouvement

Deux méthodes différentes peuvent être utilisées. Elles diffèrent par choix des variables adoptées.

1.1. Description de Lagrange

Soit une particule fluide, à l'instant t , définie par son vecteur position $\vec{r}(x, y, z)$, avec x , y , et z dépendant de t et des coordonnées x_0 , y_0 , z_0 à l'instant t_0 . Ces variables sont appelées variables de Lagrange. On peut dire que la connaissance de toutes les trajectoires donne une description complète du mouvement. La description de Lagrange consiste à identifier les particules du système par leur position et suivre de façon individuelle le mouvement de chaque la particule fluide.



La vitesse instantanée de la particule $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

L'accélération instantanée de la particule $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

1.2. Description d'Euler

Dans la pratique, il est difficile d'identifier et de suivre, une particule fluide en mouvement. Il apparaît donc judicieux d'introduire une description alternative pour un écoulement. La description d'Euler consiste à se placer en un point d'observation $M(x, y, z)$ fixe et à étudier les variations des grandeurs physiques (par exemple la vitesse) à des instants différents. La vitesse $v(M,t)$ du fluide en M à l'instant t est fonction des variables indépendantes r et t . Ainsi, l'ensemble des vitesses $v(M,t)$ ou champ de vitesses, permet de décrire le mouvement du fluide. Ce champ s'écrit en fonction des quatre variables d'Euler;

$$\vec{v} \begin{cases} \mu(x, y, z, t) \\ \vartheta(x, y, z, t) \\ \omega(x, y, z, t) \end{cases}$$

On peut récapituler les deux descriptions dans le tableau suivant

	Description de Lagrange	Description d'Euler
Variables	x_0, y_0, z_0, t	x, y, z, t
Inconnues	$x = x(x_0, y_0, z_0, t)$	$\mu = \mu(x, y, z, t)$
	$y = y(x_0, y_0, z_0, t)$	$\vartheta = \vartheta(x, y, z, t)$
	$z = z(x_0, y_0, z_0, t)$	$\omega = \omega(x, y, z, t)$

Remarque

En pratique, la description d'Euler qui est plus commode que celle de Lagrange car;

- Pour les écoulements permanents, la projection des vitesses sur le repère de référence ne dépendent pas du temps.
- Les vecteurs vitesses de l'écoulement forment un champ de vecteurs auquel on peut appliquer les propriétés des champs vectoriels.

2. Vecteur tourbillon

Par analogie avec un solide en rotation autour O fixe, pour lequel le vecteur rotation $\overline{\Omega}(t)$ est uniforme et lié à la vitesse locale $\vec{v}(M,t)$ par la relation:

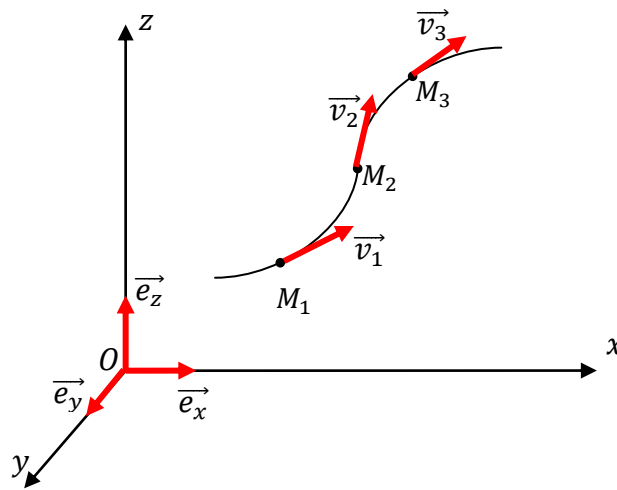
$$\vec{v}(M,t) = \overline{\Omega}(t) \wedge \overline{OM}$$

On définit le vecteur tourbillon d'un fluide en mouvement, à partir du champ local des vitesses, par la relation:

$$\vec{\Omega}(M, t) = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}}[\vec{v}(M, t)]$$

3. Lignes de courant

Soit une particule fluide de vecteur position $\vec{r}(x, y, z)$ à l'instant t_1 , à la même instant, une autre est à $\vec{r} + d\vec{r}$. En chaque point de l'écoulement, on observe la direction de la vitesse.



Définition

La ligne de courant est une courbe tangente en chacun de ses points $M_1, M_2, M_3 \dots$ appartenant à la ligne de courant, au vecteur vitesse en ce point.

On peut donc écrire $\vec{v} \wedge d\vec{r} = 0$

$$\vec{v} \wedge d\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \mu & \vartheta & \omega \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

$$(\vartheta dz - \omega dy)\vec{e}_x - (\mu dz - \omega dx)\vec{e}_y + (\mu dy - \vartheta dx)\vec{e}_z = 0$$

$$\frac{dx}{\mu(x, y, z, t_1)} = \frac{dy}{\vartheta(x, y, z, t_1)} = \frac{dz}{\omega(x, y, z, t_1)}$$

μ, ϑ et ω étant les composantes de \vec{v}

Exemple

Soit l'écoulement plan défini par le champ de vitesse;

$$\vec{v} \begin{cases} u = ax \\ v = -ay + t \end{cases}$$

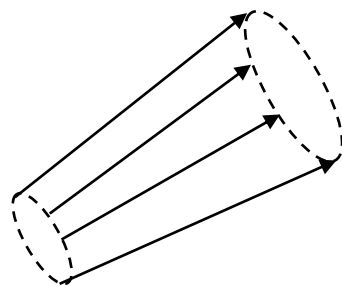
La ligne de courant est telle que:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ax} &= \frac{dy}{-ay + t_1} \\ (-ay + t_1)dx &= axdy \\ -a(ydx + xdy) + t_1dx &= 0 \\ -ad(xy) + t_1dx &= 0 \\ -axy + t_1x &= C(t) \\ y &= \frac{t_1x - C(t)}{ax} \end{aligned}$$

$C(t)$ est une constante d'intégration.

4. Tube de courant

On appelle tube de courant à l'instant t_1 , la surface constituée par l'ensemble des lignes de courant au même instant s'appuyant sur un contour fermé.



Tube de courant à l'instant t_1

5. Trajectoire

La trajectoire est la courbe décrite au cours du temps par une même particule de fluide du champ d'écoulement. Il ne faut pas confondre la trajectoire et la ligne de courant car pour cette dernière, on considère des particules différentes au même instant tandis que la trajectoire est relative à une même particule à des instants différents.

Les équations paramétriques différentielles des trajectoires sont données par:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} = \vartheta(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} = \omega(x, y, z, t) \end{cases}$$

Exemple; reprenons l'exemple précédent;

$$\vec{v} \begin{cases} \mu = ax \\ \vartheta = -ay + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = -ay + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = a dt \\ dy = (-ay + t) dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{at} \\ dy = (-ay + t) dt \end{cases}$$

On pose $A = -ay + t \Rightarrow dA = -ady + dt \Rightarrow dy = -\frac{1}{a}(dA - dt)$

$$dy = -\frac{1}{a}(dA - dt) = A dt \Rightarrow \frac{dA}{1 - aA} = dt$$

$$-\frac{1}{a} \ln(1 - aA) = -\frac{1}{a} \ln(1 + a^2y - at) = t \Rightarrow \ln(1 + a^2y - at)^{-\frac{1}{a}} = t$$

$$(1 + a^2y - at)^{-\frac{1}{a}} = e^t \Rightarrow (1 + a^2y - at) = e^{-at}$$

$$y = \frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{at} \Rightarrow \ln x = at \Rightarrow t = \frac{\ln x}{a} \\ y \Rightarrow y = \frac{1}{a^2}(\ln x - 1 + e^{-\ln x}) = \frac{1}{a^2}\left(\ln x - 1 + \frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{a^2}\left(\ln x - 1 + \frac{1}{x}\right)$$

6. Dérivée particulière

6.1. Définition

Une dérivée particulière de la grandeur G scalaire ou vectorielle est la dérivée par rapport au temps d'une grandeur définie sur un ensemble de particules fluides lorsque l'on suit la particule dans son mouvement. Notée $\frac{DG}{Dt}$.

6.2. Relation de la dérivée particulière

Soit $G=G(x,y,z,t)$ une grandeur caractéristique attachée à une particule fluide. Entre t et $t+dt$, la variation de G pour la même particule est;

$$dG = G(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - G(x, y, z, t)$$

De même, sa différentielle s'écrit

$$\begin{aligned} dG &= \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz + \frac{\partial G}{\partial t} dt \\ \frac{DG}{Dt} &= \frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x} \underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\right)}_{\mu} + \frac{\partial G}{\partial y} \underbrace{\left(\frac{dy}{dt}\right)}_{\vartheta} + \frac{\partial G}{\partial z} \underbrace{\left(\frac{dz}{dt}\right)}_{\omega} + \frac{\partial G}{\partial t} \\ \frac{DG}{Dt} &= \mu \frac{\partial G}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial G}{\partial y} + \omega \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} + \underbrace{\left(\mu \frac{\partial}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\vec{v} \cdot \vec{\nabla}} G \end{aligned}$$

ou aussi $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$

donc

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})G$$

$\frac{\partial G}{\partial t}$ représente la dérivée temporelle locale, en considérant x, y, z constantes.

$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})G$ est un terme du au déplacement non uniforme des particules fluide.

6.3. Expression de l'accélération d'une particule fluide

La vitesse est une grandeur caractéristique de la particule fluide qu'on peut suivre sa variation au cours du temps ce qui mène à l'accélération;

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$$

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\mu \vec{e}_x + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vartheta \vec{e}_y + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\omega \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}
(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= \left(\mu \frac{\partial \mu}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \mu}{\partial y} + \omega \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \omega \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \vec{e}_y \\
&\quad + \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \vec{e}_z \\
\vec{a} &= \begin{cases} a_x = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \left(\mu \frac{\partial \mu}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \mu}{\partial y} + \omega \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \\ a_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \left(\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \omega \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \\ a_z = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \end{cases}
\end{aligned}$$

7. Loi de conservation de masse

7.1. Débit volumique

Le débit volumique est le volume du fluide traversant une section élémentaire dS , il est défini comme;

$$q_v = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

7.2. Débit massique

Le débit massique est la masse du fluide traversant une section élémentaire dS , il est défini comme;

$$q_m = \iint_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

On considère un écoulement d'un fluide de volume V entre les instant t et $t+dt$, la variation de la masse s'écrit

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m(t+dt) - m(t)}{dt} = -\delta m_{\text{sortant}} = -q_m = - \iint_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

$$\frac{dm}{dt} = - \iint_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

On a aussi la masse à un instant t dans un volume dV ;

$$m(t) = \iiint_V \rho \cdot dV$$

$$\frac{d\left(\iiint_V \rho \cdot dV\right)}{dt} = - \iint_S \rho \cdot \vec{v} d\vec{S}$$

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iint_S \rho \cdot \vec{v} d\vec{S}$$

L'utilisation de théorème de Green-Ostrogradski ($\iint \Rightarrow \iiint$), permet d'écrire

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iiint_V \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) dV$$

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) \right] dV = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0$$

ou encore, puisque $\operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho + \rho \operatorname{div}(\vec{v})$ on aura donc

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

Remarque: pour un fluide incompressible ($\rho = cst$), on aura $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$

8. Classification des écoulements des fluides

8.1. Ecoulement stationnaire ou permanent

Si le champ de vitesses en M ne dépend pas du temps $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$

8.2. Ecoulement uniforme

Si le champ de vitesses en M ne dépend pas de la position $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$

8.3. Ecoulement irrotationnel (potentiel)

L'écoulement est irrotationnel si le vecteur tourbillon est nul partout

$$\vec{\Omega}(M, t) = \frac{1}{2} \overrightarrow{\operatorname{rot}}[\vec{v}(M, t)] = \vec{0}$$

$$\forall M, \operatorname{Rot} \vec{v}(M, t) = 0$$

Cette propriété a pour conséquence:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi$$

Le vecteur vitesse \vec{v} dérive d'une fonction potentiel φ . L'écoulement est dit à potentiel des vitesses ou plus simplement écoulement potentiel.

8.4. Écoulement rotationnel (tourbillonnaire)

Dans ce type d'écoulement:

$$\vec{\Omega}(M, t) = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}}[\vec{v}(M, t)] \neq \vec{0}$$

Le vecteur tourbillon est non nul en certain point.

$$\exists M, \text{Rot}\vec{v}(M, t) \neq 0$$

CHAPITRE III

Dynamique des fluides incompressibles parfaits

DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES PARFAITS

1. Equation d'Euler

Considérons une particule fluide de volume dV en mouvement avec une vitesse (en description d'Euler) $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Son accélération est donnée par la dérivée particulaire $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v}$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique (PFD) en considérant que le mouvement de la particule fluide (non visqueux) est dans le champ de pesanteur uniforme.

Bilan des forces

- Forces de pression $d\vec{F}_p = -(\overrightarrow{\text{grad}}P)dV$
- Les forces de frottement sont nulles (viscosité est nulle)
- Les forces extérieures (généralement ce n'est que le poids)

$$\partial m \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = -(\overrightarrow{\text{grad}}P)dV + \partial m \cdot \vec{g}$$

$$\partial m = \rho \cdot dV \Rightarrow \rho \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = -(\overrightarrow{\text{grad}}P) + \rho \cdot \vec{g}$$

$$\rho \cdot \left[\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} \right] = -(\overrightarrow{\text{grad}}P) + \rho \cdot \vec{g}$$

Il est clair, que si le fluide est au repos (vitesse nul), on retrouve la loi fondamentale de la statique des fluides $-(\overrightarrow{\text{grad}}P) + \rho \cdot \vec{g} = \vec{0}$

2. Equation de Bernoulli

Hypothèses;

- Le fluide est parfait et incompressible
- L'écoulement est laminaire et permanent (stationnaire).
- La seule force extérieure est le poids.

Considérons l'écoulement permanent d'un fluide incompressible entre les sections S_1 et S_2 jusqu'à S_1' et S_2' . Le théorème de Bernoulli est une forme de la conservation de l'énergie mécanique (puisque le fluide est parfait=pas de forces de frottement). L'énergie mécanique de la position (1) est égale à celle de la position (2):

$$E_1 = E_2$$

L'énergie E est par définition la somme de toutes les formes d'énergie pouvant appartenir au système (fluide)

$$E = E_c + E_{p,ext}$$

- E_c est l'énergie cinétique, donnée par;

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

- Energie potentielle de pression

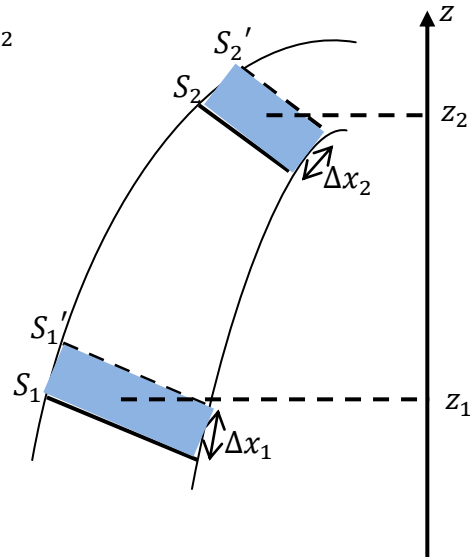
Cette énergie s'exprime comme le travail des forces de pression à travers la section S pour un déplacement Δx ;

$$E_{pre} = P \cdot S \cdot \Delta x$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{S \cdot \Delta x}$$

$$S = \frac{m}{\rho \cdot \Delta x}$$

$$E_{pre} = P \frac{m}{\rho}$$



- Energie potentielle de pesanteur

Cette énergie s'exprime comme le travail possible des forces de pesanteur. Soit g la valeur de l'accélération de la pesanteur du lieu considéré;

$$E_{pes} = m \cdot g \cdot z$$

D'après le théorème de la conservation de l'énergie mécanique:

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + P_1 \frac{m}{\rho} + mgz_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + P_2 \frac{m}{\rho} + mgz_2$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 + \rho gz_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2 + \rho gz_2$$

$$\rho \cdot \frac{v^2}{2} + P + \rho \cdot z \cdot g = Cst$$

Les termes de cette équation sont des énergies par unité de volume (J/m³), ce sont aussi des termes de pression (Pa).

En effet, 1J/m³ = 1N m/m³ = 1N/m² = 1Pa

La quantité $(\rho \cdot \frac{v^2}{2} + P + \rho \cdot z \cdot g)$ est appelée la charge totale du fluide.

3. Applications du théorème de Bernoulli

3.1. Vidange d'un réservoir (formule de Torricelli)

$$P_A + \rho z_A g + \rho \frac{v_A^2}{2} = P_B + \rho z_B g + \rho \frac{v_B^2}{2}$$

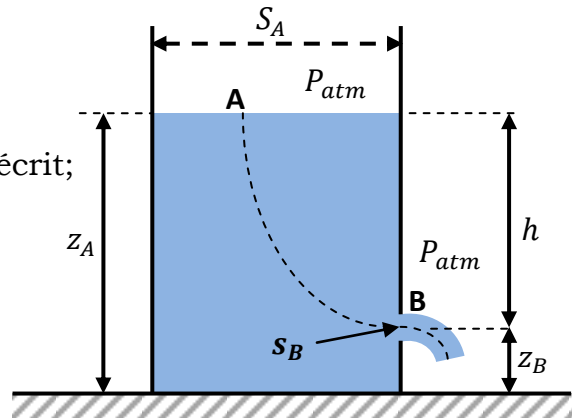
$$P_A = P_B = P_{atm}$$

La loi de conservation du débit volumique s'écrit;

$$q_V = S_A v_A = S_B v_B$$

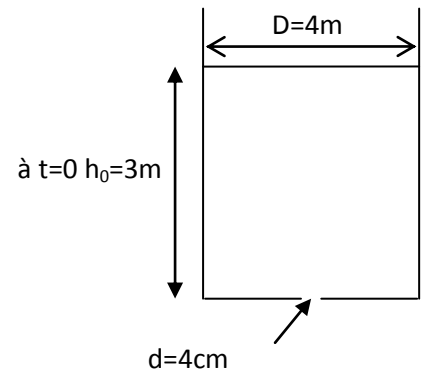
$$v_A = \frac{S_B}{S_A} v_B \text{ avec } S_B \ll S_A \Rightarrow \frac{S_B}{S_A} \rightarrow 0 \Rightarrow v_A \rightarrow 0$$

$$v_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)} = \sqrt{2gh} \rightarrow \text{formule de Torricelli}$$



Exemple:

Soit un réservoir de forme cylindrique rempli d'eau (fluide supposé parfait). L'eau s'écoule avec un régime stationnaire à travers un orifice qui se trouve au fond du réservoir.



1) à l'instant $t \rightarrow h(t)$. Déterminer la vitesse à l'orifice

2) Ecrire la relation de la conservation du débit et la relation de l'évolution de h en fonction de t . Quel est le temps de vidange.

Solution

1) $v_B = \sqrt{2gh}$

2) $s \cdot v_B = S \cdot v_A = -S \cdot \frac{dh}{dt}$

$$s \cdot \sqrt{2gh} = -S \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S} \sqrt{2g} dt$$

$$2\sqrt{h} = -\frac{s}{S} \sqrt{2g} t + K$$

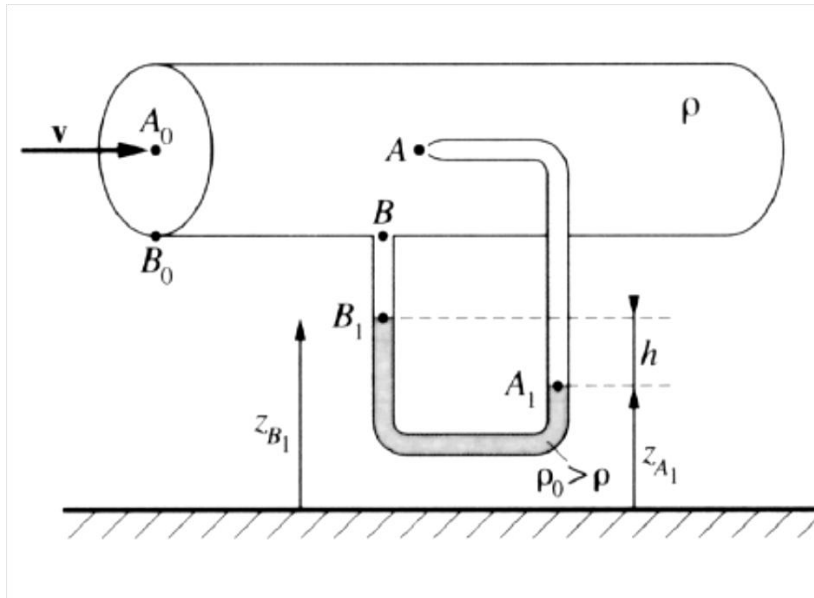
$$t = 0 \rightarrow h = h_0 \rightarrow K = 2\sqrt{h_0}$$

$$h(t) = h_0 \left[1 - \left(\frac{s}{S} \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \right) t \right]^2$$

Le temps de vidange $h(t) = h_0 \left[1 - \left(\frac{s}{S} \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \right) t \right]^2 = 0$

$$t = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \left(\frac{D}{d} \right)^2 \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 7820 \text{ s} = 2^{\text{h}} 10^{\text{minutes}} 20^{\text{secondes}}$$

3.2. Tube de Pitot



La vitesse dans la conduite (même v_B) en fonction de h :

$$P_{A1} = P_{B1} + \rho_0 g h$$

$$P_{B1} = P_B + \rho g (z_B - z_{B1})$$

$$P_{A1} = P_A + \rho g (z_A - z_{A1})$$

$$P_B - P_A = \rho g (z_A - z_{A1}) - \rho g (z_B - z_{B1}) - \rho_0 g h \quad (1)$$

Equation de Bernoulli entre A et B

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

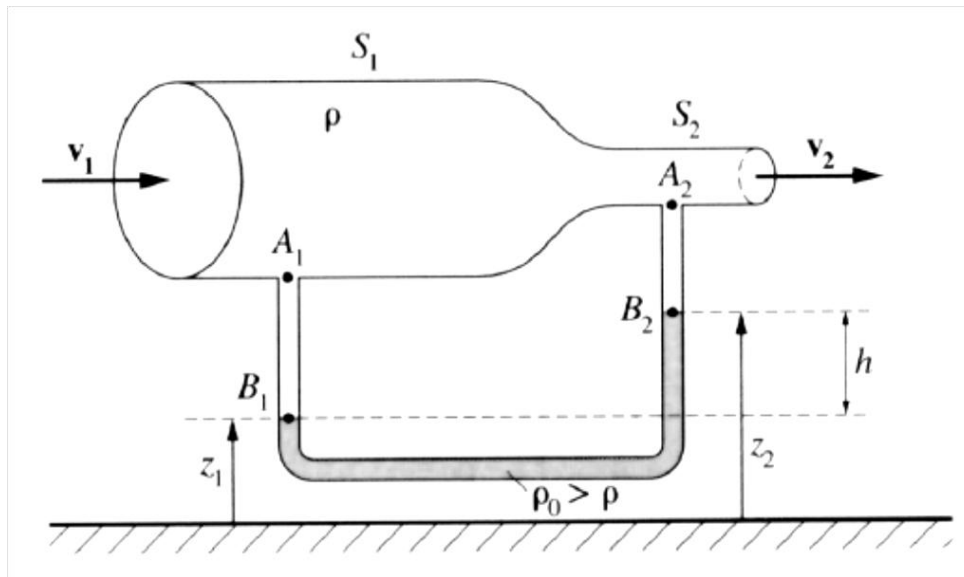
$v_A = 0$ (A est un point d'arrêt)

$$P_B - P_A = \rho g (z_A - z_B) - \frac{1}{2} \rho v_B^2 \quad (2)$$

A partir de (1) et (2) on trouve

$$v_B = v = \sqrt{2gh \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho} \right)}$$

3.3. tube de Venturi



Le tube de Venturi est une variante de l'expérience précédente (tube de Pitot). Un calcul semblable au précédent donne:

$$v_2 = \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{2gh \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho} \right)}$$

4. Théorème de quantité des quantités de mouvement

Grace au théorème de la quantité de mouvement nous pouvons déterminer les forces exercées sur les objets qui ont pour environnement les fluides en écoulement. Le principe fondamental de la dynamique (PFD) s'écrit;

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

A l'instant t , la quantité de mouvement s'écrit;

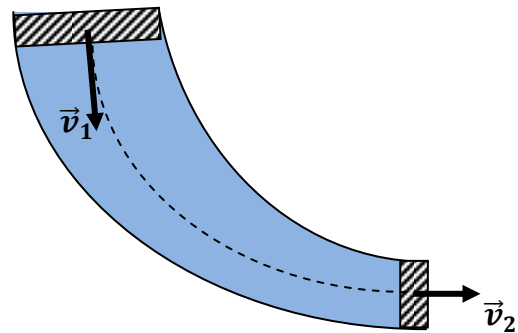
$$\vec{P}(t) = dm\vec{v}_1$$

A l'instant $t+dt$, la quantité de mouvement s'écrit;

$$\vec{P}(t + dt) = dm\vec{v}_2$$

$$\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = dm(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = d\vec{P}(t)$$

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} dt = dm(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$



$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \frac{dm}{dt}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

4.1. Réaction d'un jet

Les forces exercées par jet un d'eau sont déterminées en utilisant le théorème de la quantité de mouvement. Ces forces sont employées dans divers applications à l'instar de la production d'énergie électrique.

Nous appliquons le théorème des quantités de mouvement pour déterminer la réaction du jet horizontal s'échappant d'un orifice percé dans un grand réservoir.

$$\sum \vec{F}_{ext} = q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\vec{P}_{poids} + \vec{F} = q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

F est la résultante des forces de pression.

La projection de cette équation sur (Ox) donne;

$$F = q_m v_2 = \underbrace{\rho s v_2}_{q_m} v_2 = \rho s v_2^2$$

Dans le sens inverse, le réservoir subit une force égale et opposée à F, appelée réaction du jet:

$$R = -\rho s v_2^2$$

En utilisant la formule de Torricelli; $v_2 = \sqrt{2gz}$

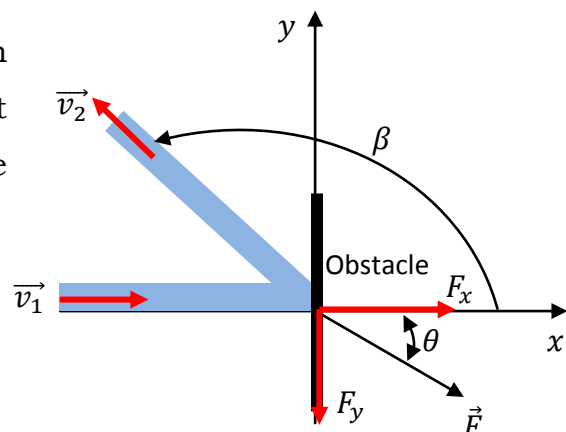
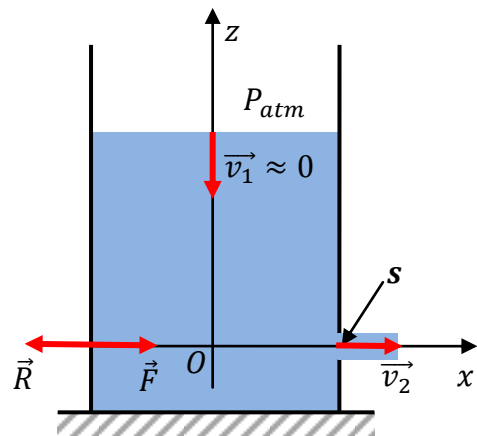
$$R = -2\rho s g z$$

4.2. Jet impactant

Soit un jet d'eau horizontal (dans le plan Oxy) frappant un obstacle avec un débit massique q_m . L'obstacle provoque une déflexion du jet d'un angle β .

$$\sum \vec{F}_{ext} = q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\vec{P}_{poids} + \vec{F} = q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$



Le jet d'eau est dans le plan Oxy, donc la projection sur ce plan donne

$$(\overline{P_{poids}} = 0);$$

$$\vec{F} = q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Le poids de l'eau est négligeable

$$P_1 = P_2 = P_{atm}$$

$$v_1 = v_2$$

$$\vec{v}_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 \begin{pmatrix} v_1 \cos \beta \\ v_1 \sin \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} F_x = q_m v_1 (1 - \cos \beta) \\ F_y = q_m (v_1 \sin \beta) \end{cases}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = q_m v_1 \sqrt{(1 - \cos \beta)^2 + (\sin \beta)^2} = q_m v_1 \sqrt{2(1 - \cos \beta)}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{\sin \beta}{(1 - \cos \beta)}$$

CHAPITRE IV

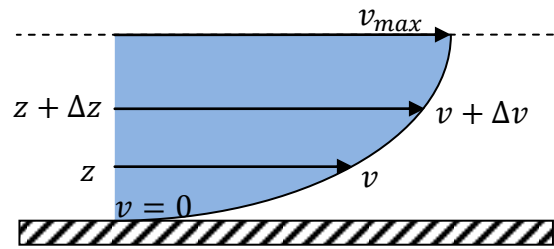
Dynamique des fluides incompressibles réels

DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES REELS

1. Notion de viscosité

1.1. Profil des vitesses

A cause des forces de frottement, les molécules qui composent les couches de fluide ne s'écoulent pas à la même vitesse. Chaque couche a sa vitesse $v(z)$ en fonction de z .



On dit qu'il existe un *profil de vitesse*.

1.2. Viscosité dynamique

Soit deux couches d'un fluide visqueux en mouvement séparés par une section qui s'oppose à la direction du glissement (perpendiculaire) d'une couche sur l'autre. Le module de la force de viscosité exercée par une couche sur une autre est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit ∂v , à leur surface S et inversement proportionnelle à ∂z (formule de Newton):

$$dF = \eta dS \frac{\partial v}{\partial z}$$

η est la viscosité dynamique du fluide,

$$[\eta] = \left[\frac{dF}{dS} \frac{\partial z}{\partial v} \right] = \frac{MLT^{-2}/L^2}{LT^{-1}/L} = ML^{-1}T^{-1}$$

L'unité de la viscosité dans Système International (SI) est le poiseuille Pl tel que; 1 Pl=1 Pa.s=1 kg/m.s. Comme η est très petite, on utilise couramment le centipoise (cPo)

$$1 Pl = 10 Po = 100 cPo$$

Exemples:

$$A 20^{\circ}C \Rightarrow \eta_{eau} \approx 1 cPo$$

$$A 20^{\circ}C \Rightarrow \eta_{air} \approx 0,018 cPo$$

1.3. Viscosité cinématique

La viscosité cinématique est le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique (unité $m^2.s^{-1}$)

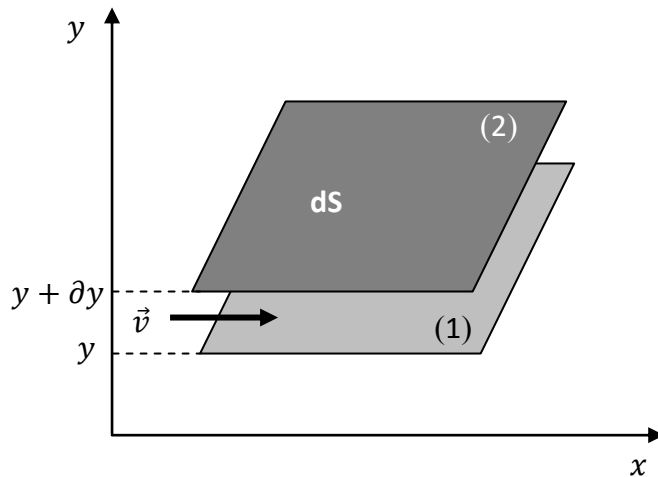
$$\gamma = \frac{\eta}{\rho}$$

2. Equation de Navier-Stokes

En absence de viscosité (fluide parfait), l'équation d'Euler s'écrit:

$$\rho \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = -(\overline{\text{grad}P}) + \rho \cdot \vec{g}$$

Considérons deux surfaces parallèles dS d'un fluide visqueux en écoulement avec une vitesse $\vec{v} = v(y, t)\vec{e}_x$.



La force exercée par la couche (2) sur la couche (1)

$$\overline{dF}_2 = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y+\partial y} dS \vec{e}_x$$

La force exercée par la couche (1) sur la couche (2)

$$\overline{dF}_1 = -\eta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_y dS \vec{e}_x$$

La résultante est $\overline{dF} = \overline{dF}_2 - \overline{dF}_1 = \eta \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y+\partial y} - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_y \right] dS \vec{e}_x = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \underbrace{dy dS}_{dV = \text{volume}} \vec{e}_x$

La résultante de la force volumique de viscosité est

$$\overline{dF}_{\text{volumique}} = \frac{\overline{dF}}{dV} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{e}_x$$

De même façon pour les autres axes

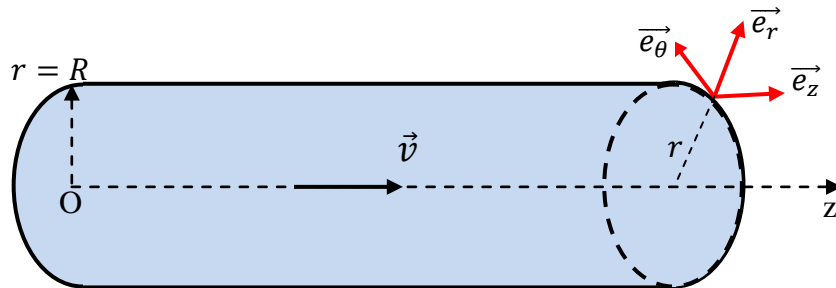
$$\overline{dF}_{\text{volumique}} = \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \vec{e}_x + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{e}_y + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \vec{e}_z \right) = \eta \Delta \vec{v}$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\rho \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = -(\overrightarrow{\text{grad}P}) + \rho \cdot \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

3. Écoulement de fluide dans une canalisation (écoulement de Poiseuille)

Considérons l'écoulement permanent laminaire d'un fluide de viscosité η et de masse volumique ρ , dans une conduite cylindrique horizontale. Le rayon R du cylindre est faible et la pesanteur est négligée.



L'écoulement est laminaire et suivant la direction z , le vecteur vitesse en tout point s'écrit;

$$\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$$

En négligeant la force de pesanteur, l'équation de Navier Stokes s'écrit:

$$\rho \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = -(\overrightarrow{\text{grad}P}) + \eta \Delta \vec{v}$$

Les composantes de la vitesse sont: $\vec{v}(0,0,\omega)$

$$\overrightarrow{\text{grad}P} = \frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z$$

La projection de l'équation de Navier Stokes donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial P}{\partial r} \\ 0 = \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \rho \cdot \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \Delta \vec{\omega} \end{array} \right.$$

$$\rho \underbrace{\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial r} + \vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)}_{\frac{D\vec{\omega}}{Dt}} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right)}_{\Delta \vec{\omega}} (*)$$

L'écoulement est permanent $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$

La vitesse varie selon r donc $\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$

$$(*) \Rightarrow 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dz} = \eta \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right) r = \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right)$$

Première intégration

$$\frac{1}{2\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right) r^2 + K_1 = r \frac{d\omega}{dr}$$

$$\frac{1}{2\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right) r + \frac{K_1}{r} = \frac{d\omega}{dr}$$

$$d\omega = \left(\frac{1}{2\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right) r + \frac{K_1}{r} \right) dr$$

Deuxième intégration

$$\omega = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right) r^2 + K_1 \ln(r) + K_2$$

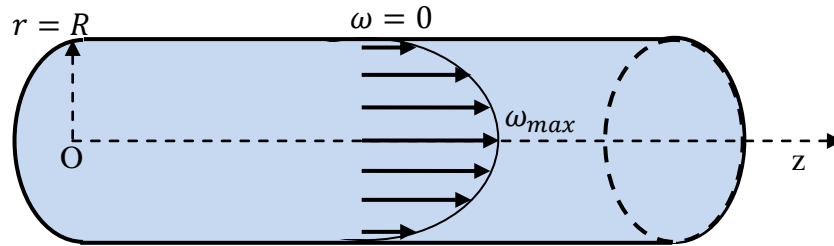
$r = 0 \Rightarrow \omega \rightarrow -\infty$ alors que la vitesse est finie, ce qui impose que $K_1 = 0$

$$r = R \Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow K_2 = -\frac{1}{4\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right) R^2$$

$$\omega(r) = -\frac{1}{4\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right) (R^2 - r^2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(r) \geq 0 \Rightarrow \frac{dP}{dz} < 0 \\ \omega_{max} = \omega(r=0) = -\frac{1}{4\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right) R^2 \end{array} \right.$$

Le profil des vitesses est une parabole



Nous définissons la vitesse moyenne de l'écoulement comme le rapport du débit volumique sur la section de la conduite, on a:

$$\langle \omega \rangle = \frac{q_V}{S} = \frac{1}{\pi R^2} \iint \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$dS = 2\pi r dr$$

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{\pi R^2} \iint -\frac{1}{4\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right) (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr$$

$$\langle \omega \rangle = -\frac{\left(\frac{dP}{dz} \right)}{2\eta R^2} \iint (R^2 - r^2) \cdot r dr$$

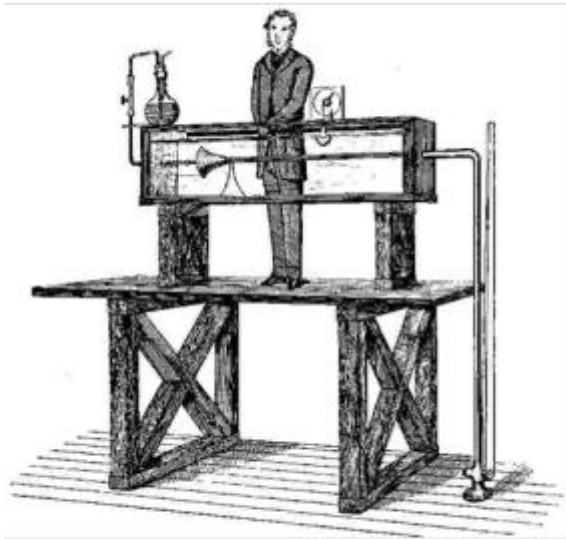
$$\langle \omega \rangle = -\frac{R^2}{8\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right) = \frac{\omega_{max}}{2}$$

$$q_V = \langle \omega \rangle \cdot S = -\frac{R^2}{8\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right) \cdot \pi R^2$$

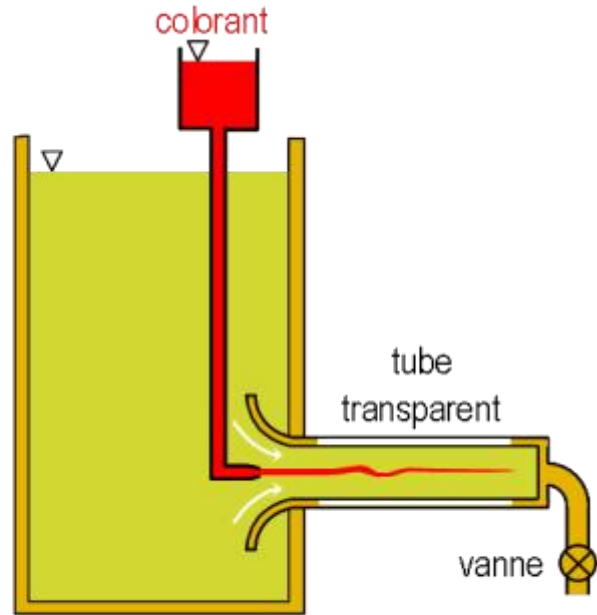
$$q_V = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right)$$

4. Régime d'écoulement – Nombre de Reynolds

L'expérience de *Reynolds* (1883) permet d'observer deux régimes d'écoulement: le régime laminaire et le régime turbulent à l'aide d'un dispositif comportant une conduite cylindrique transparente dans laquelle s'écoule un liquide avec un débit contrôlé par une vanne située en aval.

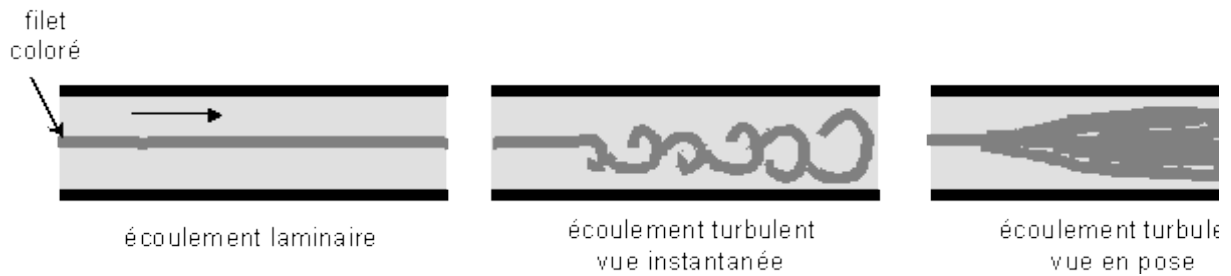


O. Reynolds (1883)



cuve à niveau constant

En amont de cette conduite, un colorant est introduit à l'aide d'une pipette et permet la visualisation d'un filet de fluide coloré (ligne d'émission). L'expérience montre que l'augmentation du débit cause un passage d'un état rectiligne (le régime laminaire) à un état instable (le régime turbulent), en passant par un état intermédiaire appelé; le régime transitoire.



Reynolds a montré que la transition du régime laminaire au régime turbulent est liée à la fois au débit un nombre sans dimension appelé le nombre de Reynolds regroupant la vitesse v , le diamètre D de la conduite, la masse volumique et la viscosité η

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{v D}{\gamma}$$

et l'expérience montre que

si $Re < 2000$	le régime est LAMINAIRE
si $2000 < Re < 4000$	le régime est intermédiaire
si $Re > 4000$	le régime est TURBULENT

5. Pertes de charge

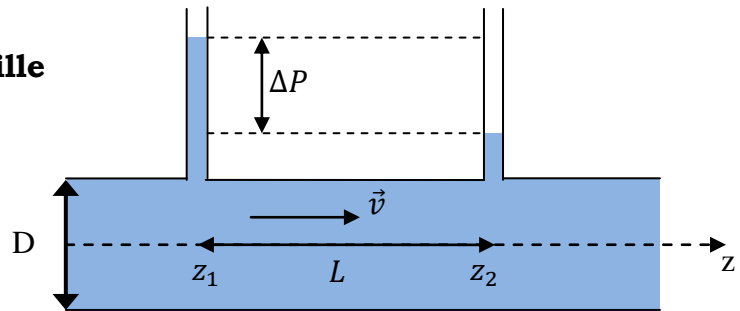
Lors du d'écoulement des liquides des frottements apparaissent entre les différentes couches de liquide ou entre les parois de la canalisation ou d'un accident. Ces frottements dus à la viscosité, entraînent une perte d'énergie pour le liquide. On parle de **pertes de charge**. Pour une canalisation horizontale cette perte d'énergie se caractérise par une diminution de la pression dans le sens de l'écoulement.

$$\Delta P = - \left(\frac{dP}{dz} \right) \Delta z$$

Cas de l'écoulement de Poiseuille

$$q_V = - \frac{\pi R^4}{8\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right)$$

$$q_V = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left(\frac{\Delta P}{\Delta z} \right) = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} \right)$$



On trouve la loi de Poiseuille $\Delta P = \frac{8\eta q_V}{\pi R^4} L = \frac{128\eta q_V}{\pi D^4} L$

5.1. Pertes de charge linéaires

C'est la perte d'énergie d'un fluide qui s'écoule dans une conduite rectiligne de section constante; elle est proportionnelle à la longueur L de la conduite et elle est plus importante pour un écoulement turbulent que pour un écoulement laminaire.

- **Cas d'un écoulement laminaire (formule de Poiseuille)**

Reprenons la loi de Poiseuille;

$$v = \langle \omega \rangle = -\frac{R^2}{8\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right) = \frac{R^2}{8\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} \right)$$

$$\Delta P = \frac{8\eta}{R^2} vL = \frac{32\eta}{D^2} vL$$

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{1}{\frac{1}{2} \rho v^2} \cdot \frac{32\eta}{D^2} vL \right)$$

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{64\eta}{\rho v D} \right) \frac{L}{D}$$

où apparaît le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement:

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta}$$

Ainsi la perte de charge s'écrit;

$$\Delta P_L = \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{64}{Re} \right) \frac{L}{D}$$

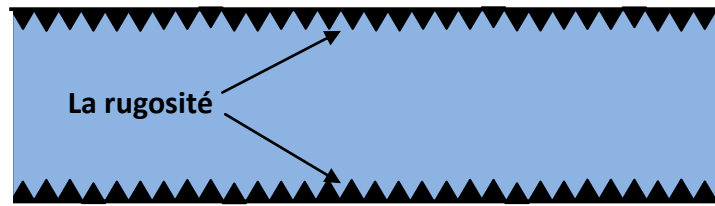
où $\lambda = \frac{64}{Re}$ est un nombre sans dimension qui prend le nom de coefficient de perte de charge linéaire ou régulière. À partir de résultat, on peut écrire:

$$\Delta P_L = \frac{1}{2} \rho v^2 \lambda \frac{L}{D}$$

En régime laminaire $\lambda = \frac{64}{Re}$

- **Cas d'un écoulement turbulent**

En 1932, Nikuradse mena des expériences pour étudier l'influence de la rugosité (notée ε) de paroi de conduites sur le profil de la vitesse de l'écoulement. Pour cela, il colla sur la paroi des grains de sable de taille calibrée grâce à un tamis.



- Dans un régime turbulent lisse ($\varepsilon = 0$), $4000 < Re < 10^5$, on peut utiliser la formule de Blasius

$$\lambda = 0,316 \cdot Re^{-0,25}$$

- Dans un régime turbulent rugueux $Re > 4000$; Plusieurs formules de calcul du coefficient λ sont proposées par différents auteurs:

- 1) La formule de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon}{3,71D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right]$$

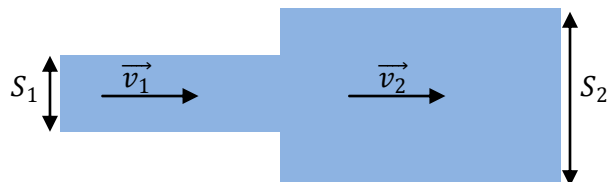
- 2) Diagramme ou abaque de Moody

5.2. Pertes de charge singulières ou accidentelles

Quand la conduite subit de brusques variations de section ou de direction; rétrécissement, élargissement, vanne, coude, clapet, filtre, débitmètre, échangeur ... il se produit des pertes de charge dites singulières; elles sont généralement mesurables et font partie des caractéristiques de l'installation.

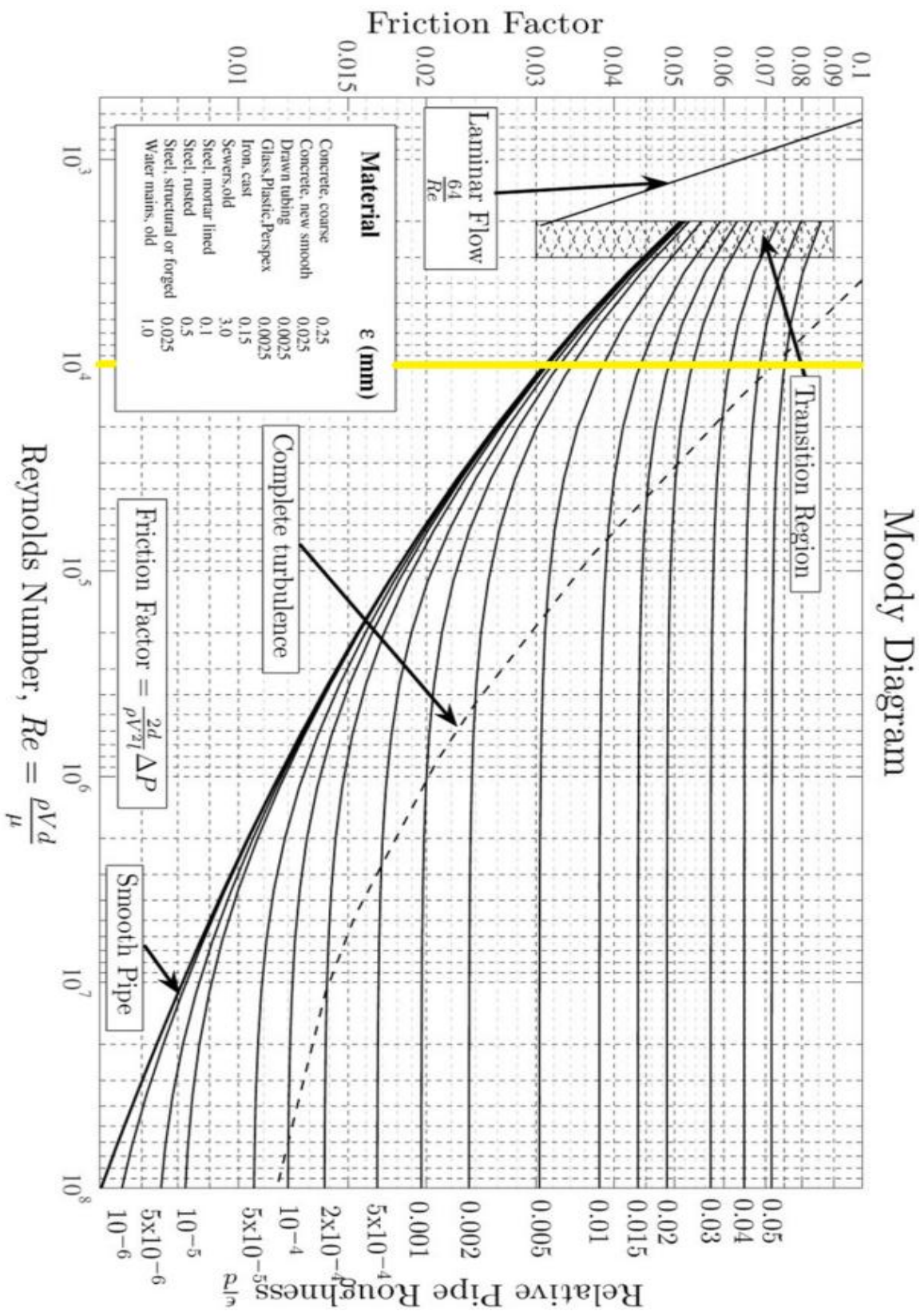
Par exemple, en cas d'un élargissement d'une conduite, Cette perte de charge peut être formulée en fonction de la pression cinétique de l'écoulement:

$$\Delta P_s = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2$$



On introduit un coefficient sans dimension, fonction uniquement de la géométrie de la singularité, en l'occurrence ici des sections amont et aval:

$$\Delta P_s = \frac{1}{2} \rho v_1^2 K \quad K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2$$



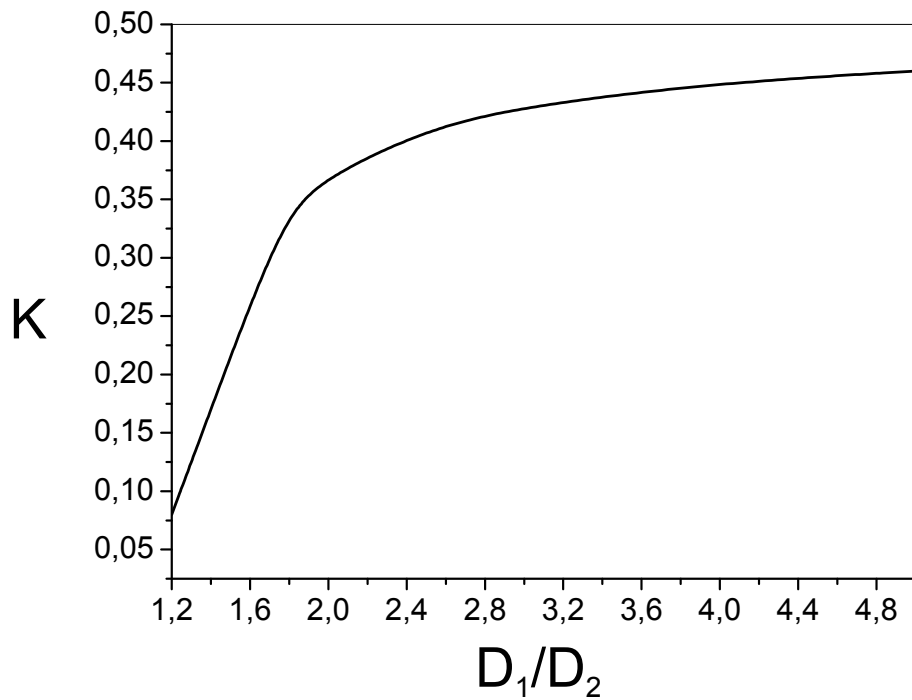
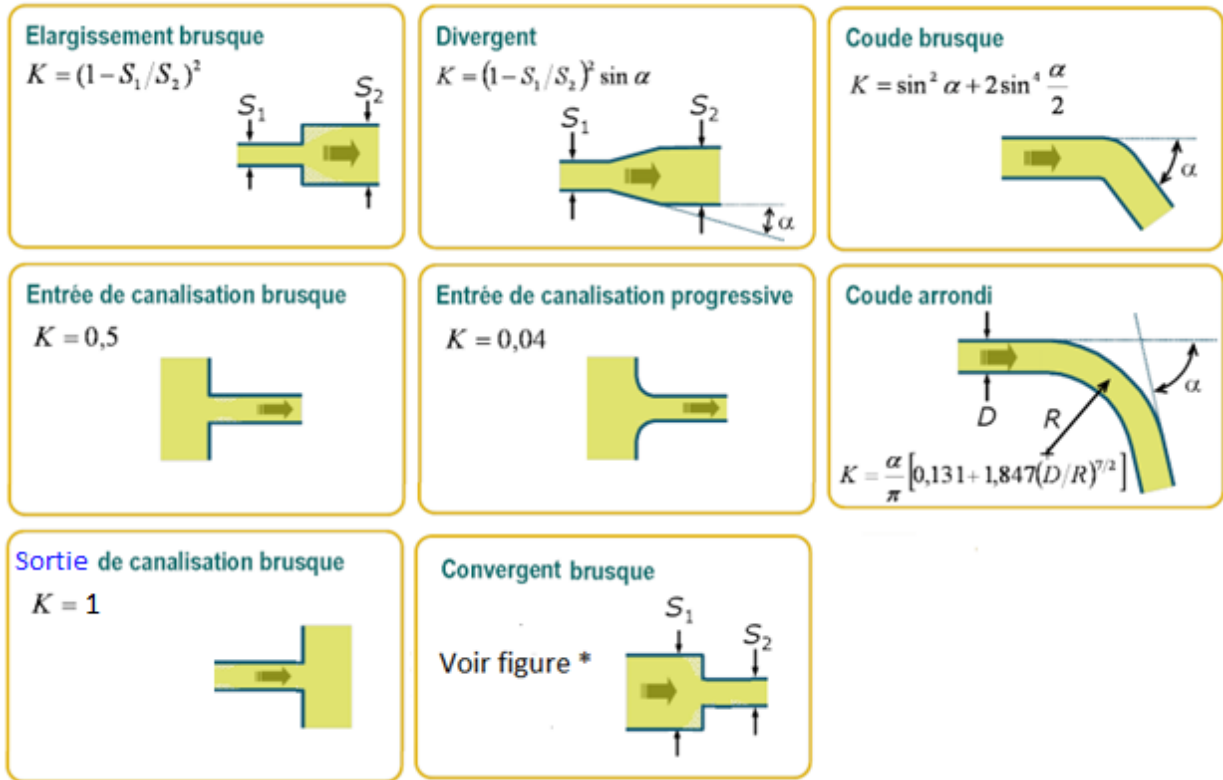


Figure *: Valeurs de K pour un convergent brusque

6. Equation de Bernoulli pour un fluide réel

Lors d'un écoulement d'un fluide réel d'un point (1) vers un point (2) l'équation de Bernoulli s'écrit sous la forme:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + \sum \frac{(\Delta P_L + \Delta P_S)}{\Delta P}$$

ΔP représente la perte de charge totale en Pa

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \sum \frac{(\Delta H_L + \Delta H_S)}{\Delta H}$$

ΔH représente la perte de charge totale en mètre

7. Equation de Bernoulli avec production d'énergie

Si W_{12} représente le travail mécanique échangé entre le fluide et les machines (éventuellement) placées entre les points 1 et 2, alors le théorème de Bernoulli prend la forme générale suivante:

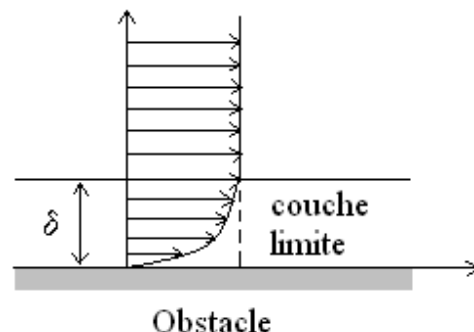
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + \sum \frac{(\Delta P_L + \Delta P_S)}{\Delta P} + W_{12}$$

- $W_{12} > 0$ si la machine fournit de l'énergie au fluide (pompe)
- $W_{12} < 0$ si la machine reçoit de l'énergie du fluide (turbine)
- $W_{12} = 0$ si entre 1 et 2 il n'y a pas de machine.

8. Couche limite

Quand un fluide visqueux en contact avec une paroi est en écoulement, il y aura la formation d'une couche au voisinage de cette dernière appelée la couche limite.

Dans la couche limite les forces de viscosité sont plus significatives et la vitesse varie, alors qu'en dehors de cette couche la vitesse est uniforme et le fluide peut être considéré comme parfait.



- [1] RANALD V. GILES (1986), « Mécanique des fluides et hydraulique: cours et problèmes », Série Schaum, Paris.
- [2] JOHN K. VENNARD (1962), « Elementary fluid mechanics », Library of congress catalog, United States of America.
- [3] LUMBROSO H. (1994), « Problèmes résolus de mécanique des fluides », Dunod, Paris.
- [4] DARROZES J. S., FRANCOIS C. (1982), « Mécanique des fluides incompressibles », Springer, Verlag Berlin Heidelberg.
- [5] CHASSAING P. (2010), « Mécanique des fluides », Cépaduèces-éditions, Toulouse.
- [6] ZEYTOUNIAN R. K. (1991), « Mécanique des fluides fondamentale », Springer, Verlag Berlin Heidelberg.
- [7] AGATI P., MATTERA N. (1996), « Mécanique appliquée », Dunod, Paris.
- [8] GOSSE J. (1995), « Mécanique des fluides », Techniques de l'Ingénieur, Saint-Denis.
- [9] AMIROUCHE S., BATTAGLIA J.L. (2011), « Mécanique des fluides », Dunod, Paris.
- [10] <http://ressources.unisciel.fr/mecaflux/co/mecaflux.html>
- [11] <http://numeliphy.unisciel.fr/index>
- [12] http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/claude_saintblanquet/